



Решење: Инструменти са покретним калемом

Део 1 – Мерење отпорности галванометра помоћу шантирања

- (а) Струја која се успоставља у колу одређена је изразом $I = \frac{u(t)}{R + R_G \parallel R_s}$, где је R_s отпорност шанта која се добија везивањем на прикључцима А и В. Отпорности R_s могу се добити директним везивањем расположивих отпорника, а проширење тог скупа може се остварити и њиховим паралелним повезивањем. Будући да је по услову задатка $R_G \ll R$ може се сматрати да је $I \approx \frac{u(t)}{R} = \text{const}$, за све изборе отпорности шанта R_s . Струја која се онда успоставља кроз галванометар може се добити као струјни разделник $I_G = I \frac{R_s}{R_s + R_G}$, одакле се може писати $\frac{I}{I_G} = 1 + R_G \frac{1}{R_s}$. У устаљеном стању за динамику казаљке важи $M_m = M_e$ па је $GI_G = k\theta$ па се закључује да је отклон казаљке θ сразмеран струји која се успоставља на галванометру, према томе је одговарајућа линеаризована зависност

$$\frac{1}{\theta} = \underbrace{\frac{1}{GI}}_a + \underbrace{\frac{R_G}{GI}}_b \frac{1}{R_s}. \quad (1)$$

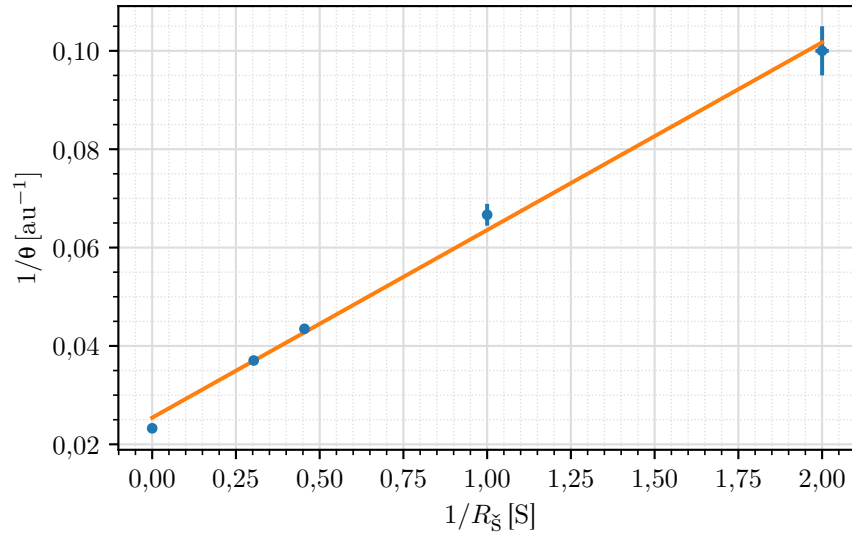
На основу тога, треба цртати зависност реципрочног угла казаљке $y = 1/\theta$ од реципрочне отпорности шанта $x = 1/R_s$, при чему ће онда однос коефицијента правца b и слободног одсечка a одговарати траженој отпорности галванометра $R_G = b/a$.

Приликом мерења, подешено је $U_{OS} = 4\text{ V}$, $U_m = 0$, $f = 0$. Резултати таквих мерења приказани су у табели 1. Том приликом, апсолутне грешке реципрочних вредности рачунају се као $\Delta\left(\frac{1}{\theta}\right) = \frac{\Delta\theta}{\theta^2}$, и $\Delta\left(\frac{1}{R_s}\right) = \frac{\Delta R_s}{R_s^2} = \frac{\delta R_s}{R}$, при чему се апсолутна грешка мереног угла одређује по основу половине подеока $\Delta\theta = 0,5\text{ au}$, док је релативна грешка отпорности позната и износи $\delta R = 1\%$.

$R_s [\Omega]$	$\theta [\text{au}]$	$\Delta\theta [\text{au}]$	$\Delta(1/\theta) [\text{au}^{-1}]$		$1/\theta [\text{au}^{-1}]$		$\Delta(1/R_s) [\text{S}]$		$1/R_s [\text{S}]$	
0,5	10	0,5	0,005	0,005	0,10	0,10	0,02	0,02	2,0	2,0
1,0	15	0,5	0,0022	0,002	0,0667	0,07	0,01	0,01	1,0	1,0
2,2	23	0,5	0,00095	0,0009	0,0435	0,04	0,0045	0,005	0,4545	0,5
3,3	27	0,5	0,00069	0,0007	0,0370	0,04	0,0030	0,003	0,3030	0,3
∞	43	0,5	0,00027	0,0003	0,0233	0,02	0	0	0	0

Табела 1: Резултати мерења отклона казаљке при различитим отпорностима шанта.

Цртањем одговарајућих зависности добијају се графици приказани на слици 1. Одређивањем коефицијента правца на основу две неексперименталне тачке, одређују се $b = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 0,03938\text{ au}^{-1}$. Одговарајућа грешка мерења може се проценити на основу израза за апсолутну грешку коефицијента правца $\Delta b = b \left(\frac{\Delta y_B + \Delta y_A}{|y_B - y_A|} + \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{|x_B - x_A|} \right) \approx 0,0042\text{ au}^{-1} = 0,004\text{ au}^{-1}$ (мајорирано, пратећи „правило 5%“), па је онда $b = (39 \pm 4)\text{ m au}^{-1}$. Одсечак на y оси се читава да износи $a = 0,024\text{ au}^{-1}$, док се за апсолутну грешку узима вредност јединичног подеока на графику $\Delta a = 0,001\text{ au}^{-1}$, па је онда $a = (0,024 \pm 0,001)\text{ au}^{-1}$. Одавде се израчунава тражена отпорност $R_G = b/a = 1,64\text{ }\Omega$, и апсолутна грешка резултата $\Delta R_G = R_G \left(\frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a} \right) = 0,3\text{ }\Omega$ (мајорирано). Коначно, тражена отпорност са интервалом грешке је $R_G = (1,6 \pm 0,3)\text{ }\Omega$.



Слика 1: Графички приказ резултата и одређивање оптималних правах.

Део 2 – Динамичко понашање инструмената

- (б) Да би се казаљка центрирала, напонски офсет је подешен на вредност $U_{OS} = 2,4 \text{ V}$, Амплитуда осциловања је постављена на $U_m = 0,6 \text{ V}$, а мењано је подешавање учестаности f . Мерена је зависност амплитуде A_{\max} . По услову задатка, грешка мерења учестаности се занемарује, $\Delta f \rightarrow 0$, а грешка амплитуде је двострука вредност једног подеока пошто је потребно узети у обзир и грешку позиције нуле и грешку читавања амплитуде $\Delta A_{\max} = 2 \text{ au}$. од учестаности f , а тражени график је на слици 2а.

f [Hz]	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3
A_{\max} [au]	7	7	7	8	8	9	11	13	15	17	19	20	21	19	16
f [Hz]	2,4	2,5	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0
A_{\max} [au]	13	11	10	7	6	5	4	3	2	2	2	1	1	1	1

Табела 2: Резултати мерења амплитуде и фазе при различитим фреквенцијама побуде.

- (в) На основу датих података, могуће је проценити вредност резонантне учестаности на интервалу између две максималне вредности на графику, при чему се за грешку мерења може узети половина ширине тог интервала, $f_r = (2,1 \pm 0,1) \text{ Hz}$.
- (г) Будући да дати систем представља принудни хармонијски осцилатор, израз за амплитуду осцилација у зависности од кружне учености $\omega = 2\pi f$, може се записати као

$$A(\omega) = \frac{\omega_0^2 A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}, \quad A_0 = A(\omega \rightarrow 0). \quad (2)$$

Таква зависност може се линеаризовати у облику $y = kx + n$ као

$$\underbrace{\left(\frac{A_0}{A(\omega)}\right)^2 - 1}_{y} = \underbrace{\frac{1}{\omega_0^4}}_k \underbrace{\omega^2}_x + \underbrace{\frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{\gamma^2}{\omega_0^2} - 2\right)}_n. \quad (3)$$

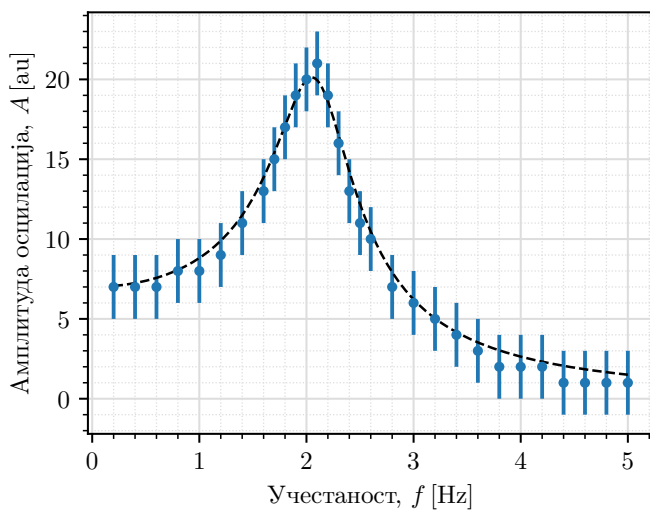


Обрадом датих мерења, могу се израчунати вредности x и y за обављена мерења, на основу чега се добијају бројне вредности из табеле 3, чијом се графичком представом добија график приказан на слици 2б. За цртања графика одабран је опсег $1,4 \text{ Hz} \leq f \leq 3,6 \text{ Hz}$ јер се процењује да у том опсегу грешке мерења нису превелике.

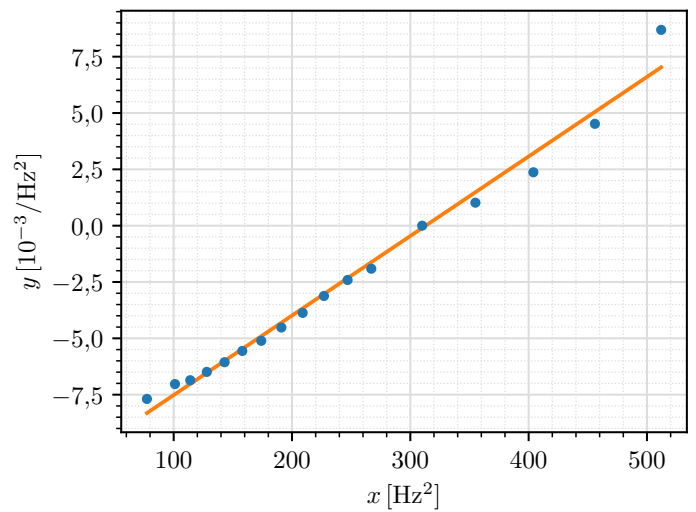
Коефицијент правца одређен помоћу две неексперименталне тачке је $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 3,37 \times 10^{-5} \text{ Hz}^{-4}$ па је

непригушена карактеристична учестаност $\omega_0 = \sqrt[4]{1/k} \Rightarrow \omega_0 = 13,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, коме одговара вредност $f_0 = 2,1 \text{ Hz}$.

Вредност одсечка на y -оси може се израчунати на основу једне експерименталне тачке према $n = y_A - kx_A = -10,85 \times 10^{-3} \text{ 1/Hz}^2$. На основу те вредности, даље се онда одређује $\gamma = \omega_0 \sqrt{2 + n\omega_0^2} \Rightarrow \gamma = 4,7 \text{ s}^{-1}$. График амплитудске карактеристике за овако израчунате параметре приказан је испрекиданом линијом на слици 2а



(а) Мерни подаци.



(б) Линеаризована зависност.

Слика 2: Зависност амплитуде од учестаности.

f [Hz]	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,7	1,8
A [au]	7	7	7	8	8	9	11	13	15	17
x [Hz ²]	1,58	6,32	14,2	25,3	39,5	56,8	77,4	101,1	114	128
y [10 ⁻³ /Hz ²]	0	0	0	-9,28	-5,94	-6,9	-7,69	-7,03	-6,86	-6,49
f [Hz]	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,8	3,0
A [au]	19	20	21	19	16	13	11	10	7	6
x [Hz ²]	143	158	174	191	209	227	247	267	310	355
y [10 ⁻³ /Hz ²]	-6,06	-5,56	-5,11	-4,52	-3,87	-3,12	-2,41	-1,94	0	1,02
f [Hz]	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0
A [au]	5	4	3	2	2	2	1	1	1	1
x [Hz ²]	404	456	512	570	632	696	764	835	910	987
y [10 ⁻³ /Hz ²]	2,37	4,52	8,63	19,7	17,8	16,2	62,8	57,5	52,8	48,6

Табела 3: Резултати мерења и израчунате вредности x и y при различитим учестаностима.

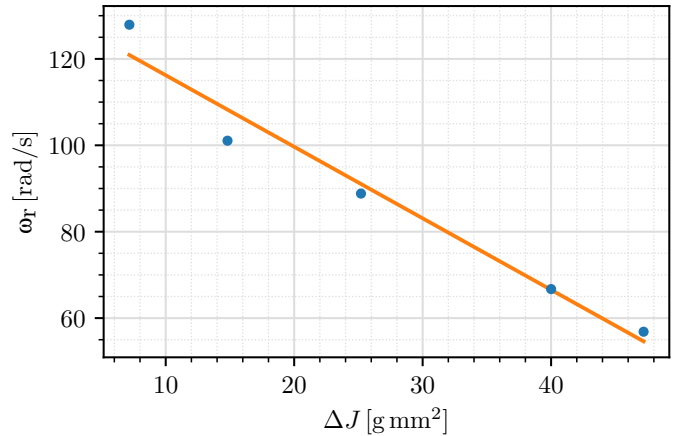


Део 3 – Мерење момената инерције казале

- (д) Резонантна кружна учестаност наступа када је амплитуда осцилација максимална. Сматрајући да је хилзна материјална тачка, по услову задатка, њен допринос моменту инерције дат је као $\Delta J_h = m_h r^2$, где је r растојање од осе ротације а m маса једне хилзне. Могуће је мењати растојање хилзне од осе ротације као и број хилзни N , па је укупан прираштај моменту инерције од свих хилзни укупно $\Delta J = m_h \sum_{i=1}^N r_i^2$. Мерење је начињено у неколико различитих случајева

N	r_i [mm]	f_r [Hz]	ΔJ [g mm ²]
1	16	1,8	7,168
1	23	1,6	14,812
1	30	1,5	25,200
2	30, 23	1,3	40,012
3	30, 23, 16	1,2	47,180

Табела 4: Мерења са повећаним моментом инерције.



Слика 3: Приказ резултата.

- (ђ) Резонантна фреквенција се може одредити из услова да је именилац израза (2) минималан, што се може наћи рачунањем нуле првог извода $\frac{d}{d\omega^2} ((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2) = 0$, одакле се налази да је резонантна кружна учестаност $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2} \gamma^2$, одакле се добија зависност $\omega_r^2 = \frac{k}{J + \Delta J} - \frac{1}{2} \frac{b^2}{(J + \Delta J)^2}$, односно $\omega_r^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{1 + \Delta J/J} \right) - \frac{\gamma^2}{2} \left(\frac{1}{1 + \Delta J/J} \right)^2$. Увођењем смене $x = \frac{1}{1 + \Delta J/J}$ добија се квадратна једначина $\omega_r^2 = \omega_0^2 x - \frac{\gamma^2}{2} x^2$, чије се мање решење узима будући да је $x < 1$, па је $x = \frac{\omega_0^2 - \sqrt{\omega_0^4 - 2\omega_r^2 \gamma^2}}{\gamma^2}$. Заменом свих резултата из табеле 4 добијају се резултати приказани у табели 5. Средња вредност свих добијених резултата је $\bar{J} = 23,9270$ g mm², док су одступања од средње вредности представљена у проширењу исте табеле. На основу максималног одступања, мајорирањем и заокруживањем се добија $J = (24 \pm 4)$ [g mm²]

ΔJ [g mm ²]	ω_r [rad/s]	x	J [g mm ²]	$J - \bar{J}$ [g mm ²]
7,168	11,302	0,7591	22,59	-1,33
14,812	10,053	0,5933	21,607	-2,32
25,200	9,4248	0,5189	27,1880	3,26
40,012	8,1681	0,3865	25,2000	1,27
47,178	7,5398	0,3281	23,0487	-0,87

Табела 5: Обрада мерења са додатним хилзнама.



Бодовање и вредновање експерименталне технике

Метод израде експеримента практично је препуштен такмичарима дефиницијом задатка. Да би се нарочито наградили такмичари који су одабрали боље експерименталне методе, које обезбеђују квалитетније резултате приликом израде експеримента, одређени број поена се ограничава да буде додељен само у случају да су те технике и коришћене.

Део 1.

(а) Укупно вреди **5п**, од чега се посебно вреднује:

- **0,3п** уколико је такмичар приметио да одређени отпорници практично не утичу на резултат мерења.
- **0,2п** уколико је такмичар користио парално или редно везивање отпорности ради повећања броја мерних тачака.
- **0,3п** уколико је такмичар повећавао UOS да би се повећала мерна прецизност
- Преостала **4,2п** се додељују по решењу, у складу са резултатима.

Део 2

(б) Укупно вреди **4п**, од чега се посебно вреднује

- **0,5п** уколико је мерено са максималном резолуцијом, или уколико је мерено са повећаном резолуцијом у околини резонантне учестаност
- **0,3п** уколико је такмичар повећавао U_m да би повећао прецизност мерења односа амплитуде механичких и електричних осцилација.
- **0,3п** уколико је амплитуда рачуната као средња вредност максималног и минималног положаја казаљке, јер позиција нуле не може да се намести тачно са задатом резолуцијом UOS.
- **0,2п** уколико је грешка амплитуде рачуната узимајући у обзир и
 - грешку читавања нуле + грешку читавања амплитуде (цео или пола подеока), или
 - двоструку грешку читавања амплитуде, јер се чита и максимална вредност и у позитивној и у негативној полупериоди.
- Преостала **2,7п** се додељују по решењу, у складу са резултатима.

(в) Укупно вреди **1п**, од чега се посебно вреднује

- **0,3п** се додељује само уколико је резонантна фреквенција измерена са најбољом могућом резолуцијом која износи 0,1 Hz.
- Преостала **0,7п** се додељује по решењу, у складу са резултатима.

(г) **4п** Тачка се односи на обраду резултата мерења, експериментална техника се не вреднује.

Део 3

(д) Укупно вреди **2п** од чега се посебно вреднује

- **0,3п** уколико је варирана и позиција и број хилзни на казаљци.
- **0,2п** уколико је процена положаја хилзне одређена усредњавањем најдаље и најближе тачке према градуацији екрана, заједно са проценом одговарајуће грешке.
- Преосталих **1,5п** се додељује по решењу, у складу са резултатима.

(ђ) **4п** Тачка се односи на обраду резултата мерења, експериментална техника се не вреднује.

Задатке припремио: *Данило Ђокић*, Електротехнички факултет, Београд

Рецензенти: *Милош Пејтрашиновић*, Физички факултет, Београд; *др Ненад Вукмировић*, Институт за физику у Београду,

Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *Проф. др Имре Гуш*, Департаман за физику, Нови Сад