ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2023/2024. ГОДИНЕ

Друштво физичара Србије и
Министарство просвете Републике Србије
РЕШЕЊА – АЛФА КАТЕГОРИЈА*

II разред

РЕПУБЛИЧКИ НИВО
Београд, 6.4.2024.

1. У тексту задатка није било напоменуто каквом процесу одговара топлотни капацитет, c. Уколико се узима укупан топлотни капацитет, који важи при процесу описаном у задатку, решење је $\Delta T = Q/(mc)$. Из тог разлога решење $\Delta T = Q/(mc)$ се прихвата и носи **(20 поена)**.

   Уколико је топлотни капацитет при константој дужини, c_ℓ, решење је следеће. Пошто је дужина шипке фиксирана непокретним зидовима, након загревања део предате енергије прелази у енергију деформације, W, а део на загревање шипке, Q_T:
$$Q = Q_T + W \ \textbf{(4 поена)}\ .$$
   Енергија утрошена на загревање је
$$Q_T = mc\Delta T \ \textbf{(3 поена)}\ ,$$
   где је m маса шипке а ΔT промена температуре услед загревања. Пошто можемо занемарити промену попречног пресека, S, густина шипке остаје константна, па је маса $m = \rho\ell S$ **(1 поен)**. Када зидови не би постојали, шипка би се нашла у недеформисаном стању са дужином $\ell_2 = \ell(1+\alpha\Delta T)$ **(2 поена)**. Дакле, услед зидова, настаје деформација
$$\Delta\ell = \ell_2 - \ell = \ell\alpha\Delta T \ \textbf{(2 поена)}\ .$$
   Та промена дужине одговара енергији деформације
$$W = \frac{ES}{2\ell}(\Delta\ell)^2 = \frac{ES\ell\alpha^2}{2}\Delta T^2 \ \textbf{(3 поена)}\ .$$
   Враћањем у израз за одржање енергије, добијамо квадратну једначину за промену температуре:
$$Q = \rho\ell Sc\Delta T + \frac{ES\ell\alpha^2}{2}\Delta T^2 \ \textbf{(3 поена)}\ .$$
   Решавањем ове једначине, добијамо два решења за промену температуре, ΔT:
$$\Delta T = -\frac{\rho c}{E\alpha^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho c}{E\alpha^2}\right)^2 + \frac{2Q}{S\ell E\alpha^2}} \ \textbf{(1 поен)}\ .$$
   Пошто се додавањем топлоте, тело мора загрејати, узимамо позитивно решење:
$$\Delta T = \frac{\rho c}{E\alpha^2}\left(\sqrt{1 + \frac{2E\alpha^2 Q}{S\ell(\rho c)^2}} - 1\right) \ \textbf{(1 поен)}\ .$$

2. Температура идеалног гаса је:
$$T = \frac{pV}{nR}\ .$$
   Користећи дефиницију процеса, $p = p_0 - \alpha V$, добијамо квадратну везу између V и T:
$$T = \frac{p_0 V(1-\alpha V/p_0)}{nR} \ \textbf{(2 поена)}\ .$$
   Ова квадратна једначина достиже максимум када је запремина $V_m = \frac{p_0}{2\alpha}$ **(2 поена)**. Температура тада достиже вредност:
$$T_m = \frac{p_0^2}{4\alpha nR} \ \textbf{(1 поен)}\ .$$
   До запремине V_m, гас се загрева и шири, тако да свакако прима топлоту из околине. Након V_m, гас се хлади и шири тако да и даље прима топлоту до неке тачке (p^*, V^*, T^*), након чега почиње да отпушта топлоту **(2 поена)**. Да бисмо одредили ту тачку, потребно је да нађемо топлоту, Q, коју гас размени са околином почевши ширење од неке тачке која лежи на прави $p = p_0 - \alpha V$. Ту почетну тачку можемо произвољно поставити на $V_0 = 0$, $T_0 = 0$, и p_0. Проширивши се до запремине V, топлота коју гас размени са околином је $Q(V) = \Delta U + A$, где је промена унутрашње енергије двоатомског гаса $\Delta U = \frac{5}{2}nR(T - T_0) = \frac{5}{2}nRT$ **(2 поена)**, а рад одговара површини испод трапеза оивиченог са 0, V, p_0, и p: $= \frac{1}{2}(p+p_0)V$ **(2 поена)**. Све укупно, размена топлоте је:
$$Q = \frac{5}{2}pV + \frac{1}{2}(p+p_0)V \ \textbf{(1 поен)}\ .$$

Задатке припремили: *Ђорђе Богдановић, Никола Коњик* и *Предраг Поповић*, Физички Факултет, Универзитет у Београду.
Рецензент: *Момир Арсенијевић*, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу.
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду

Користећи дефиницију процеса из поставке задатка, добијамо:

$$Q = \frac{5}{2}(p_0 - \alpha V)V + \frac{1}{2}\left(2p_0 - \alpha V\right)V \ .$$

Сређивањем добијамо квадратну везу између Q и V:

$$Q = \frac{7Vp_0}{2}\left(1 - \frac{6\alpha V}{7p_0}\right) \ \textbf{(2 поена)} \ .$$

Док гас прима топлоту од околине, Q расте, након чега почиње да опада. Дакле, тачка до које гас прима топлоту одговара максималној вредности Q **(2 поена)**. Она се достиже за

$$V^* = \frac{7p_0}{12\alpha} \quad , \quad p^* = \frac{5p_0}{12} \quad , \quad T^* = \frac{35p_0^2}{144\alpha nR} \ \textbf{(2 поена за макар један од израза)} \ .$$

3. Познато је да на атмосферском притиску p_0 вода кључа на $^\circ t_1 = 100^\circ C$. На дубини $h = 90m$, на којој се налази ниво воде на крају пасивне фазе, укупни притисак је $p = p_0 + \rho g h \approx 10p_0$ **(2 поена)** што значи да је толики и притисак паре у резервоару изнад тог нивоа. Према Клаузијус-Клапејроновој једначини, температура кључања воде на том притиску, на крају пасивне фазе, је $^\circ t_2 = 179.2^\circ C$. **(3 поена)**

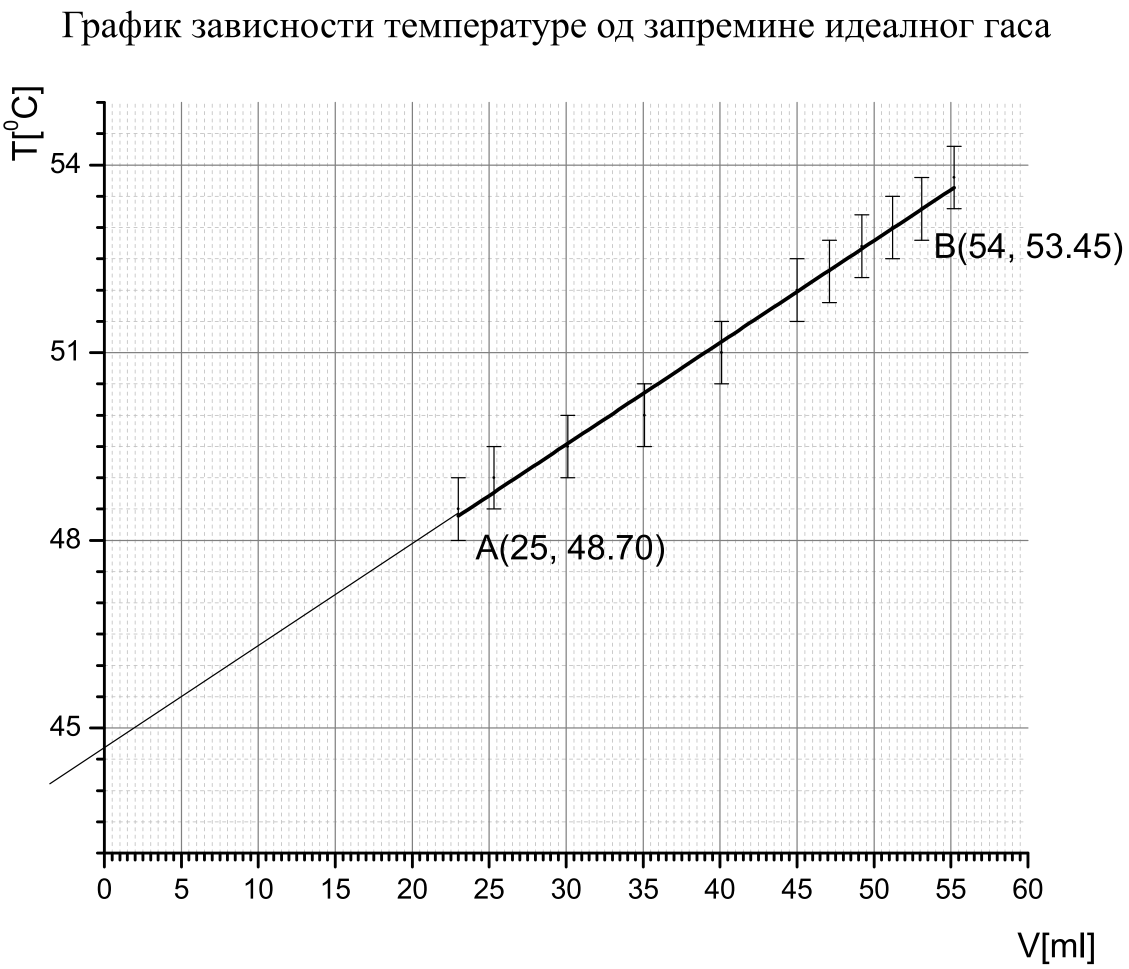
   Стене током пасивне фазе загревају воду док на самом крају пасивне фазе вода не достигне температуру $^\circ t_2$ и почне да кључа **(2 поена*)**. Пасивна фаза се завршава избацивањем занемарљиве количине воде из уског тунела. Тада тунел постаје испуњен воденом паром, почиње активна фаза, притисак на површини преостале вода се готово тренутно враћа на вредност атмосферског притиска p_0 па се и температура кључања враћа на вредност $^\circ t_1$ **(2 поена*)**, а вода и даље кључа. То значи да ће вода кључати док се не охлади на температуру $^\circ t_1$. Вода се хлади испаравањем, претварајући унутрашњу енергију у латентну топлоту водене паре. **(3 поена*)**

   На почетку активне фазе у резервоару се налазила укупна маса воде m на температури $^\circ t_2$. На крају активне фазе преостала је количина воде $m - \Delta m$ на температури $^\circ t_1$, а гејзир је избацио масу водене паре Δm на температури $^\circ t_1$. Важи релација $mc(^\circ t_2 -^\circ t_1) = \lambda \Delta m$ (1) **(6 поена)**, где је латентна топлота испаравања $\lambda = \dfrac{\Lambda}{\mu}$ **(1 поен)**. Једноставно се добија тражена маса водене паре коју је гејзир избацио из себе $\frac{\Delta m}{m} = \dfrac{\mu c(^\circ t_2 -^\circ t_1)}{\Lambda} = 14.7\%$. **(1 поен)**

   Напомена. Све поене* доделити свакоме ко је тачно записао релацију (1) и свакоме ко је недвосмислено у раду дошао до бодованих закључака чак и ако није записао релацију (1).

4. На основу Торичелијеве теореме може се одредити брзина којом млаз воде излази из зида $v = \sqrt{2gh}$ **(1 поен)**. Посматрајмо судар млаза и лопатице који траје Δt и током кога укупно Δm воде наиђе на лопатицу брзином $\vec{v}$, односно напусти лопатицу брзином $\vec{w}$. Време судара довољно је кратако да можемо сматрати да се током њега лопатица креће транслаторно константном брзимо $\vec{u}$. Прећи ћемо у инерцијални референтни системе везан за лопатицу. Млаз воде налеће брзином интензитета $v' = v - u$, прати кривину лопатице симетрично на обе стране трпећи реактивни притисак лопатице и лопатицу напушта под углом β брзином интензитета w'. Обзиром да је млаз стално у хоризонталној равни и да је изложен атмосферском притиску на улазу и излазу, на основу Бернулијеве једначине важи да ће интензитет брзине остати непромењен $w' = v'$ **(5 поена)**. Тражену снагу одредићемо на два начина.

   Први начин. Гледано из референтног система лопатице, промена импулса коју претрпи маса Δm течности дешава се само у правцу кретања млаза и по интензитету је једнака $\Delta p = \Delta m v'(1 - \cos\beta)$ **(4 поена)** услед дејства



Слика 1: График зависности температуре од запремине идеалног гаса из задатка 5.

средње силе интензитета $F_{sr} = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = \dfrac{\Delta m}{\Delta t} v'(1-\cos\beta)$ **(2 поена)**. По закону акције и реакције, средња сила истог интензитета али супротног смера делује на лопатицу, односно турбину. Дефиниција масеног протока гласи $q_m = \dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \rho v' S$ **(1 поен)**, где је интервал времена Δt јако мали. Тражена средња сила је $F_{sr} = \rho v'^2 S(1-\cos\beta)$. У референтном систему хидроелектране видимо да сила F_{sr} одржава брзину лопатице u константном (током времена Δt) те је тражена средња снага $P_{sr} = F_{sr}\cdot u = \rho(\sqrt{2gh}-u)^2 uS(1-\cos\beta)$ **(3 поена)**.

Други начин. У референтном систему хидроелектране масени проток је $\tilde{q}_m = \dfrac{\Delta\tilde{m}}{\Delta t} = \rho v S$ **(1 поен)** али за исто време Δt само део те масе $\Delta\tilde{m}$ долази у контакт и предаје своју енергију лопатици јер лопатица "бежи". Нека је та маса Δm (управо маса посматрана у првом предложеном начину). Важи релација $\dfrac{\Delta\tilde{m}}{\Delta m} = \dfrac{v}{v-u}$ **(4 поена)**. Промена кинетичка енергија те количине воде је $\Delta E = \dfrac{1}{2}\Delta m(w^2 - v^2)$ **(1 поен)**, а остварена снага је $P_{sr} = \dfrac{-\Delta E}{\Delta t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta\tilde{m}}{\Delta t}\dfrac{v-u}{v}(v^2-w^2)$ **(2 поена)**. На основу косинусне теореме $w^2 = w'^2 + u^2 - 2uw'\cos(180^\circ - \beta)$ **(1 поен)** па је тражена снага $P_{sr} = \dfrac{1}{2}\rho S(v-u)(v^2 - w'^2 - u^2 - 2uw'\cos\beta)$ што се своди на $P_{sr} = \rho(\sqrt{2gh}-u)^2 uS(1-\cos\beta)$ **(1 поен)**.

Ова снага је минимална када је $\cos\beta = 1$, односно када је $\beta = 0^\circ$ што практично значи да лопатице не постоје. Снага је максимална када је $\cos\beta = -1$, односно када је $\beta = 180^\circ$ **(1 поен)** што одговара ситуацији када су лопатице максимално закривљене. Тада је максимална снага $P_{sr} = 2\rho(\sqrt{2gh}-u)^2 uS$. Како је ово идеалан случај, а вода мора напусти лопатицу тако да не смета самој турбини, приликом конструкције бира се угао који је $\beta \approx 170^\circ$.

Задатке припремили: *Ђорђе Богдановић, Никола Коњик* и *Предраг Поповић*, Физички Факултет, Универзитет у Београду.
Рецензент: *Момир Арсенијевић*, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу.
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду

Нека је $\beta = 180°$. У траженом случају $u = \dfrac{v}{2}$ средња снага своди се на $P_{sr} = \dfrac{1}{4}\rho\sqrt{2gh}^3 S$. У том случају је $v' = \dfrac{v}{2}$ па је брзина излазног млаза у референтном систему хидроелектране $w = w' - u = 0$ **(2 поена)**. Дакле, вода турбини предаје сву своју снагу односно $\eta = 100\%$ **(1 поен)**.

5. График са правилно унетим вредностима **(5 поена)**, тачке A и B са графика **(1 поен)**.

   Дати подаци приближно леже на правој $V = at + b$ (слика 1), где је нагиб $a \approx (0.16 \pm 0.04)\, ml/°C$ **(2 поена)** а одсечак је $b \approx (44.6 \pm 0.5)\, ml$ **(2 поена)**. При изобарском процесу, запремина се мења по закону $V = nRT/p = nR(t - t_0)/p$, где је t_0 температура апсолутне нуле **(1 поена)**. Вредност апсолутне нуле се дакле добија као однос одсечка и нагиба $t_0 = -b/a$ **(1 поена)**. Грешка мерења температуре апсолутне нуле се добија на основу грешака одсечка и нагиба, $\Delta t_0/t_0 = \Delta b/b + \Delta a/a$ **(2 поена)**. Све укупно, то заменом вредности даје $t_0 \approx (-270 \pm 80)°C$ **(1 поен)**. Број молова се добија из нагиба $n = ap/R$ **(2 поена)** а грешка мерења је $\Delta n/n = \Delta a/a + \Delta p/p$ **(2 поена)**, што заменом вредности даје $n \approx (1.8 \pm 0.5)\, mmol$ **(1 поен)**.

Задатке припремили: *Ђорђе Богдановић, Никола Коњик* и *Предраг Поповић*, Физички Факултет, Универзитет у Београду.
Рецензент: *Момир Арсенијевић*, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу.
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Универзитет у Новом Саду