РЕШЕЊА - АЛФА КАТЕГОРИЈА*

1. а) **I начин:** Дијагонале квадрата деле квадрат странице a и масе M на 4 једнака једнакокрака троугла дужине катете $a' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и масе $M' = \frac{1}{4}M$. Момент инерције је адитивна величина, па су због симетрије моменти инерције поменутих троуглова у односу на нормалу која пролази кроз центар квадрата C једнаки и сваки износи $I' = \frac{1}{4}I = \frac{1}{24}Ma^2$. **[2п]** Према томе, момент инерције сваког троугла изражен преко његове масе и дужине катете је $I' = \frac{1}{3}(\frac{1}{4}M)(\frac{1}{2}a^2) = \frac{1}{3}M'a'^2$. Сада је јасно да је момент инерције троугаоне плочице у коју удара метак у односу на нормалу која пролази кроз тачку O једнак $I_O = \frac{1}{3}Ma^2$. **[4п]**

   II начин: Дијагонала квадрата дели квадрат на два једнака једнакокрака троугла дужине катете a и масе $M' = \frac{1}{2}M$. Момент инерције је адитивна величина, па су због симетрије моменти инерције поменутих троуглова у односу на нормалу која пролази кроз центар квадрата C једнаки и сваки износи $I_C = \frac{1}{2}I = \frac{1}{12}Ma^2 = \frac{1}{6}M'a^2$. **[2п]** Дакле, момент инерције троугаоне плочице у коју удара метак у односу на у односу на нормалу која пролази кроз средиште хипотенузе је $\frac{1}{6}Ma^2$. Према Штајнеровој теореми је $I_C = I_T + Md_{CT}^2$ и $I_O = I_T + Md_{OT}^2$, где су I_T и I_O моменти инерције у односу на нормале које пролазе кроз тежиште троугаоне плочице Т, односно теме О, редом, а $d_{CT} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $d_{OT} = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2}$ растојања између тежишта Т и тачака C и T, редом. Одавде је момент инерције у односу на нормалу која пролази кроз тачку O једнак $I_O = I_C - Md_{CT}^2 + Md_{OT}^2 = \frac{1}{3}Ma^2$. **[4п]**

   б) Како је време судара занемарљиво кратко, може се сматрати да при судару важи закон одржања момента импулса $mv_0\frac{a}{2} = I\omega$, где је $I = I_O + md_{CO}^2 = \frac{3}{2}ma^2$ момент инерције система метак - троугаона плочица у односу на тачку O након судара. **[4п]** Почетна угаона брзина након судара је онда $\omega = \frac{v_0}{3a}$. **[2п]** При ротацији система метак - троугаона плочица важи закон одржања енергије. Услов да се троугаона плочица не преврне је еквивалентан томе да се сва кинетичка енергија претвори у потенцијалну у тренутку када се центар хипотенузе у ком се налази метак нађе тачно изнад тачке O. Тада ће систем остати у лабилној равнотежи. Пошто је троугаона плочица хомогена, њен центар маса се налази у тежишту једнакокраког правоуглог троугла. Из закона одржања енергије следи $\frac{1}{2}I\omega^2 + mg\frac{a}{2} + Mg\frac{a}{3} = mg\frac{a}{\sqrt{2}} + Mg\frac{2a}{3\sqrt{2}}$. **[6п]** Одавде се добија да је максимална брзина којом метак може да удари у плочицу $v_{0max} = \sqrt{18ga(\sqrt{2}-1)}$. **[2п]**

2. а) Коефицијенти самоиндукције (индуктивност) се добијају на основу формуле $N_i\Phi_{ii} = L_iI_i$, где је N_i број навојака калема i и Φ_{ii} флукс магнетног поља у калему i које ствара струја I_i протичући кроз калем i индуктивности L_i, и износе $L_1 = \mu_0\mu_r\frac{N_1^2}{l}a^2\pi = 80\,\mathrm{mH}$, **[1п]** $L_2 = \mu_0\frac{N_2^2}{l}((\mu_r-1)a^2+b^2)\pi = 20{,}6\,\mathrm{mH}$ **[1,5п]** и $L_3 = \mu_0\frac{N_3^2}{l}((\mu_r-1)a^2+c^2)\pi = 5{,}4\,\mathrm{mH}$. **[1,5п]** Коефицијенти међусобне индукције се добијају на основу формуле $N_j\Phi_{ij} = M_{ij}I_i$ и износе $M_{12} = \mu_0\mu_r\frac{N_1N2}{l}a^2\pi = 40\,\mathrm{mH}$, **[1п]** $M_{23} = \mu_0\mu_r\frac{N_2N_3}{l}((\mu_r-1)a^2+b^2)\pi = 10{,}3\,\mathrm{mH}$ **[2п]** и $M_{31} = \mu_0\mu_r\frac{N_3N_1}{l}a^2\pi = 20\,\mathrm{mH}$. **[1п]**

   б) Задатак се може решити у комплексном домену. Комплексне електромоторне силе су $\underline{\varepsilon}_1 = 400\,\mathrm{V}$, $\underline{\varepsilon}_2 = 400e^{-j\frac{2\pi}{3}}\,\mathrm{V}$ и $\underline{\varepsilon}_3 = 400e^{-j\frac{4\pi}{3}}\,\mathrm{V}$. Нека су све комплексне струје усмерене тако да увиру у чвор B, а комплексне електромоторне силе такве да им је позитиван крај окренут ка калемовима. Према Првом Кирхофовом закону важи $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$. **[2п]** Према Другом Кирхофовом закону важи $\underline{\varepsilon}_1 - \underline{I}_1j\omega L_1 - \underline{I}_2j\omega M_{12} - \underline{I}_3j\omega M_{31} = \underline{\varepsilon}_2 - \underline{I}_1j\omega M_{12} - \underline{I}_2j\omega L_2 - \underline{I}_3j\omega M_{23} = \underline{\varepsilon}_3 - \underline{I}_1j\omega M_{31} - \underline{I}_2j\omega M_{23} - \underline{I}_3j\omega L_3$. **[4п]** Заменом $\underline{I}_3 = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$ у претходни израз се добија $\underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_2 = \underline{I}_1j\omega(L_1 - M_{12} - M_{31} + M_{23}) + \underline{I}_2j\omega(M_{12} - L_2 - M_{31} + M_{23})$ и $\underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_3 = \underline{I}_1j\omega(L_1 - M_{31} - M_{31} + L_3) + \underline{I}_2j\omega(M_{12} - M_{23} - M_{31} + L_3)$.

   в) Задатак се може решити у комплексном домену. Комплексне електромоторне силе су $\underline{\varepsilon}_1 = 400\,\mathrm{V}$, $\underline{\varepsilon}_2 = 400e^{-j\frac{2\pi}{3}}\,\mathrm{V}$ и $\underline{\varepsilon}_3 = 400e^{-j\frac{4\pi}{3}}\,\mathrm{V}$. Нека су све комплексне струје усмерене тако да увиру у чвор B, а комплексне електромоторне силе такве да им је позитиван крај окренут ка калемовима. Према Првом Кирхофовом закону важи $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$. Према Другом Кирхофовом закону важи $\underline{\varepsilon}_1 - \underline{I}_1j\omega L_1 = \underline{\varepsilon}_2 - \underline{I}_2j\omega L_2 = \underline{\varepsilon}_3 - \underline{I}_3j\omega L_3$. Заменом $\underline{I}_3 = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$ у претходни израз се добија $\underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_2 = \underline{I}_1j_1 - \underline{I}_2j\omega L_2)$ и $\underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_3 = \underline{I}_1j\omega(L_1 + L_3) + \underline{I}_2j\omega L_3$. Одавде се добија да су комплексне струје $\underline{I}_1 = (-0{,}240295 - j0{,}711926)\,\mathrm{A}$, $\underline{I}_2 = -2{,}61479 + j0{,}147861)\,\mathrm{A}$ и $\underline{I}_3 = (2{,}85508 + j0{,}564064)\,\mathrm{A}$, а њихове ефективне вредности $I_1 = 0{,}751385\,\mathrm{A}$, **[2п]** $I_2 = 2{,}61896\,\mathrm{A}$ **[2п]** и $I_3 = 2{,}91027\,\mathrm{A}$. **[2п]**

3. Како занемарујемо утицај гравитације, на слици (1) су приказане све силе које делују на n-ту перлу, дуж y-осе. Видимо да је укупна сила која делује дуж y-осе једнака $F_y = T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 = T\frac{y_{n+1}-y_n}{a} - T\frac{y_n-y_{n-1}}{a}$**[3п+3п]** где смо искористили да су при малим осцилацијама дуж y-осе, углови θ_2 и θ_1 мали па важи $\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta$. Сада је једначина кретања n-те перле: $ma_n = \frac{T}{a}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1})$ **[3п]**, где је a_n убрзање n-те перле. При нормалној моди осциловања, свака перла осцилује хармонијски, истом фреквенцијом ω и истом фазном разликом ϕ тј. $y_i = A_i\cos(\omega t + \phi)$ **[1п]** за $i = 1,2,\cdots N$. За амплитуду n-те перле важи $A_n = A\sin(nka)$ где је $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ таласни број. Сада је $a_n = -\omega^2A_n\cos(\omega t + \phi)$ **[1п]**. Заменом ових израза у једначину кретања n-те перле имамо: $A_{n+1} + A_{n-1} =$

Задатке припремили: *Настасија Цонић* (1 и 2. задатак), *Петар Петрашиновић* (3, 4 и 5. задатак), Физички факултет, Универзитет у Београду
Рецензент: *др Ненад Стевановић*, Природно - математички факултет, Универзитет у Крагујевцу
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду

$(2-\frac{m\omega^2 a}{t})A_n$ **[3п]** тј. $\sin((n+1)ka)+\sin((n-1)ka)=(2-\frac{m\omega^2 a}{T})\sin(nka)$ **[2п]**. Применом једнакости из текста задатка имамо $2\sin(nka)\cos(ka)=(2-\frac{m\omega^2 a}{T})\sin(nka)$ **[1п]**. Следи $\cos(ka)=2-\frac{m\omega^2 a}{T}$ **[2п]** одакле добијемо зависност кружне фреквенце малих осцилација од таласног броја (дисперзиону релацију): $\omega^2=\frac{4T}{ma}\sin^2(\frac{ka}{2})$ **[1п]**.

4. Иницијално, електрично поље услед плоча 1 и 2 на месту где се налази плоча 3 је $E=\frac{Q-q}{2\varepsilon_0 S}$ **[1п]**, па је сила која делује на плочу 3 у почетном тренутку $F=\frac{Q(Q-q)}{2\varepsilon_0 S}$ **[1п]**. Током судара, плоче 2 и 3 ефективно постају једна плоча укупног наелектрисања $Q+q$. Током судара наелектрисање се тако распоређује да неутралише укупно поље између плоча у додиру. Ово значи да ће десна страна система плоча 2 и 3 имати наелектрисање $\frac{q}{2}$ (тј плоча 3 након раздвајања) а лева страна система плоча 2 и 3 ће имати $Q+\frac{q}{2}$ (тј. плоча 2 након раздвајања) **[6п] (Бодовати са 6п свако објашњење које доводи до овакве расподеле наелектрисања)**. Након судара, поље услед плоче 1 и 2 је $E'=\frac{q}{4\varepsilon_0 S}$**[2п]** а на плочу 3 делује сила $F'=\frac{q^2}{8\varepsilon_0 S}$**[1п]**. Укупни извршени ради приликом кретања плоче је $A=(F+F')d=\frac{d}{8\varepsilon_0 S}(2Q-q)^2$**[4п]**. Овај рад једнак је укупној промени кинетичке енергије плоче 3 тј. $A=\Delta E_k=\frac{1}{2}mv^2$ **[3п]** где је v брзина плоче 3 када се врати у почетни положај. Сада је $v=\sqrt{\frac{d}{\varepsilon_0 mS}}(Q-\frac{q}{2})$ **[2п]**.

5. Када су магнетна и електрична сила која делује на јоне у крви супротног смера а једнаког интензитета, на јоне у крви не делује никаква сила. Следи $qvB=qE$ тј. $E=vB$ **[1п]**, при чему је $E=\frac{U}{d}$ где је U напон и d растојање између електрода. Коришћењем израза за магнетну индукцију у центру Хелмхолцових калемова, добијамо зависност $U=dv\mu_0 NR^2\left(\left(\frac{D}{2}\right)^2+R^2\right)^{-\frac{3}{2}}I$**[1п]** . Из коефицијента правца добијене зависности можемо наћи брзину протока крви кроз артерије. Да бисмо одредили коефицијент праве бирамо две тачке A и B, које се налазе на правој између прве и друге тачке и између претпоследње и последње тачке, редом. Координате тих тачака су $A(3{,}0\,\mathrm{A};15{,}0\,\mu\mathrm{V})$ **[1п]** $B(16{,}9\,\mathrm{A};86\,\mu\mathrm{V})$ **[1п]**, а њихове грешке $\Delta y_A=0{,}8\,\mu\mathrm{V}$ и $\Delta x_A=0{,}1\,\mathrm{A}$ **[0,5п+0,5п]**, $\Delta y_B=4\,\mu\mathrm{V}$ и $\Delta x_B=0{,}1\,\mathrm{A}$ **[0,5п+0,5п]**. Коефицијент праве је $k=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=5{,}11\,\mu\Omega$, а његова грешка $\Delta k=\mid k\mid\left(\frac{\Delta y_A+\Delta y_B}{|y_B-y_A|}+\frac{\Delta x_A+\Delta x_B}{|x_B-x_A|}\right)=0{,}42\,\mu\Omega$. Коначно, $k=(5{,}1\pm0{,}5)\,\mu\Omega$ **([1п+1п] 1п за тачно израчунату вредност, 1п за тачно израчунату грешку)**. Попречни пресек артерије је $S=r^2\pi=1{,}5386\cdot10^{-6}\,\mathrm{m}^2$ и одговарајућа грешка $\Delta S=2S\frac{\Delta r}{r}=0{,}22\cdot10^{-6}\,\mathrm{m}^2$, тј. $S=(1{,}5\pm0{,}3)\cdot10^{-6}\mathrm{m}^2$ **[0,5п+0,5п]**. Коефицијент правца ове линеарне зависности је $k=dv\mu_0 NR^2\left(\left(\frac{D}{2}\right)^2+R^2\right)^{-\frac{3}{2}}$. Одавде је брзина протока крви у артерији $v=\frac{k}{d\mu_0 NR^2\left(\left(\frac{D}{2}\right)^2+R^2\right)^{-\frac{3}{2}}}=0{,}487\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ и запремински проток је $Q=Sv=7{,}49\cdot10^{-7}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$. Одговарајуће грешке су $\Delta v=v(\frac{\Delta k}{k}+\frac{\Delta d}{d})=0{,}06\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ и $\Delta Q=Q(\frac{\Delta S}{S}+\frac{\Delta v}{v})=2\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$, па је коначно $v=(0{,}49\pm0{,}06)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ **([1п+1п] 1п за тачно израчунату вредност, 1п за тачно израчунату грешку)** и $Q=(7\pm2)\cdot10^{-7}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$ **([1п+1п] 1п за тачно израчунату вредност, 1п за тачно израчунату грешку)**.
У табели су приказане заокружене вредности **([2,8п] за потпуно исправну табелу, по 0,2п за сваку ставку у прве две колоне)**.
Исправно нацртан график вреди [4,2п].
Начин бодовања: Негативни поени за график, између осталог за:

- Координатне осе треба цртати по ивицама милиметарског папира -0.2
- Без наслова -0.2 (наслов није $y=f(x)$)
- Лоша размера -0.2 (график заузима мање од 1/4 простора папира)
- Осе нису обележене и недостају јединице -0.2
- Унете су мерене бројне вредности на осе -0.2
- Ако 1. и 2. изабрана тачка није између 1. и 2. односно претпоследње и последње експерименталне -0.5
- Изабране тачке нису у мереном опсегу -0.5
- Лоша размера подеока -0.2 (на милиметарском папиру може да одговара ... 0.05; 0.1; 0.2; 0.4; 0.5; 1; 2; 4; 5; 10 ... јединица величине која се приказује)

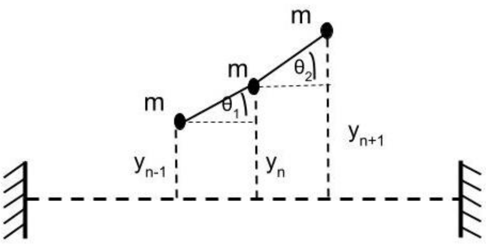
Негативни поени за рачун, између осталог за:

- Лоша размера – за коефицијент правца 50
- Ако нису изабране добре тачке са графика – за тражене величине 50

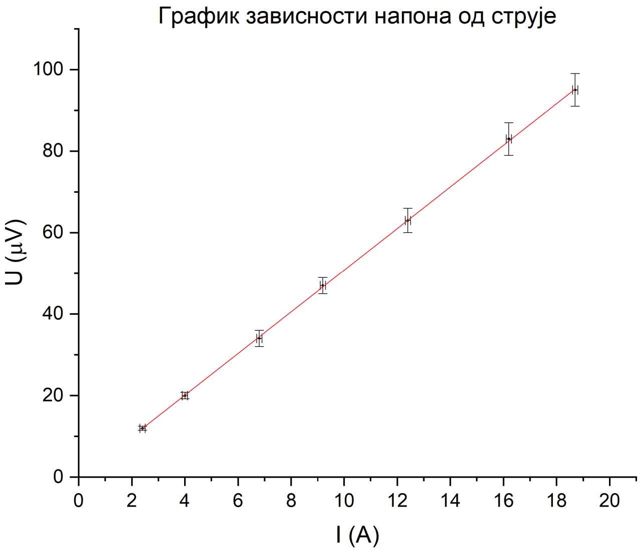
Задатке припремили: *Настасија Цонић* (1 и 2. задатак), *Петар Петрашиновић* (3, 4 и 5. задатак), Физички факултет, Универзитет у Београду
Рецензент: *др Ненад Стевановић*, Природно - математички факултет, Универзитет у Крагујевцу
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду

Таблица 1: Експериментални подаци са одговарајућим апсолутним грешкама

	$U[\mu V]$	$\Delta U[\mu V]$	$I[A]$
1	12,0	0,5	2,4
2	20,0	0,8	4,2
3	34,0	2,0	6,8
4	47,0	2,0	9,2
5	63,0	3,0	12,4
6	83,0	4,0	16,2
7	95,0	4,0	18,7



Слика 1: Слика у решењу задатка 3.



Слика 2: График у задатку 5.

Решења свих задатака треба јасно образложити и треба јасно навести све физичке законе и дефинисати све ознаке које се користе у решењу задатка.

*У алфа категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима специјализованих гимназија за области математика и физика.

Задатке припремили: *Настасија Цонић* (1 и 2. задатак), *Петар Петрашиновић* (3, 4 и 5. задатак), Физички факултет, Универзитет у Београду
Рецензент: *др Ненад Стевановић*, Природно - математички факултет, Универзитет у Крагујевцу
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду