ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2023/2024. ГОДИНЕ

Друштво физичара Србије и Министарство просвете Републике Србије

III разред | **РЕШЕЊА - БЕТА КАТЕГОРИЈА*** | **ДРЖАВНИ НИВО** **6. април 2024.**

1. Према Штајнеровој теореми је $I_O = I_T + Md_{OT}^2 = \frac{1}{3}Ma^2 = ma^2$, где је I_O момент инерције у односу на нормалу које пролази кроз теме , а $d_{OT} = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2}$ растојање између тежишта T и тачке O. **[3п]**
Како је време судара занемарљиво кратко, може се сматрати да при судару важи закон одржања момента импулса $mv_0\frac{a}{2} = I\omega$, где је $I = I_O + md_{CO}^2 = \frac{3}{2}ma^2$ момент инерције система метак - троугаона плочица у односу на тачку O након судара, при чему је $d_{CO} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. **[6п]** Почетна угаона брзина након судара је онда $\omega = \frac{v_0}{3a}$. **[2п]** При ротацији система метак - троугаона плочица важи закон одржања енергије. Услов да се троугаона плочица не преврне је еквивалентан томе да се сва кинетичка енергија претвори у потенцијалну у тренутку када се центар хипотенузе у ком се налази метак нађе тачно изнад тачке O. Тада ће систем остати у лабилној равнотежи. Пошто је троугаона плочица хомогена, њен центар маса се налази у тежишту једнакокраког правоуглог троугла. Из закона одржања енергије следи $\frac{1}{2}I\omega^2 + mg\frac{a}{2} + Mg\frac{a}{3} = mg\frac{a}{\sqrt{2}} + Mg\frac{2a}{3\sqrt{2}}$. **[6п]** Одавде се добија да је максимална брзина којом метак може да удари у плочицу $v_{0max} = \sqrt{18ga(\sqrt{2}-1)}$. **[3п]**

2. а) Коефицијенти самоиндукције (индуктивност) се добијају на основу формуле $N_i\Phi_{ii} = L_iI_i$, где је N_i број навојака калема i и Φ_{ii} флукс магнетног поља у калему i које ствара струја I_i протичући кроз калем i индуктивности L_i, и износе $L_1 = \mu_0\mu_r\frac{N_1^2}{l}a^2\pi = 80\,\mathrm{mH}$, **[1п]** $L_2 = \mu_0\frac{N_2^2}{l}((\mu_r-1)a^2+b^2)\pi = 20{,}6\,\mathrm{mH}$ **[1,5п]** и $L_3 = \mu_0\frac{N_3^2}{l}((\mu_r-1)a^2+c^2)\pi = 5{,}4\,\mathrm{mH}$. **[1,5п]** Коефицијенти међусобне индукције се добијају на основу формуле $N_j\Phi_{ij} = M_{ij}I_i$ и износе $M_{12} = \mu_0\mu_r\frac{N_1N_2}{l}a^2\pi = 40\,\mathrm{mH}$, **[1п]** $M_{23} = \mu_0\mu_r\frac{N_2N_3}{l}((\mu_r-1)a^2+b^2)\pi = 10{,}3\,\mathrm{mH}$ **[2п]** и $M_{31} = \mu_0\mu_r\frac{N_3N_1}{l}a^2\pi = 20\,\mathrm{mH}$. **[1п]**

   б) Задатак се може решити у комплексном домену. Комплексне електромоторне силе су $\underline{\varepsilon}_1 = 400\,\mathrm{V}$, $\underline{\varepsilon}_2 = 400e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ V и $\underline{\varepsilon}_3 = 400e^{-j\frac{4\pi}{3}}$ V. Нека су све комплексне струје усмерене тако да увиру у чвор B, а комплексне електромоторне силе такве да им је позитиван крај окренут ка калемовима. Према Првом Кирхофовом закону важи $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$. **[2п]** Према Другом Кирхофовом закону важи $\underline{\varepsilon}_1 - \underline{I}_1j\omega L_1 - \underline{I}_2j\omega M_{12} - \underline{I}_3j\omega M_{31} = \underline{\varepsilon}_2 - \underline{I}_1j\omega M_{12} - \underline{I}_2j\omega L_2 - \underline{I}_3j\omega M_{23} = \underline{\varepsilon}_3 - \underline{I}_1j\omega M_{31} - \underline{I}_2j\omega M_{23} - \underline{I}_3j\omega L_3$. **[4п]** Заменом $\underline{I}_3 = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$ у претходни израз се добија $\underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_2 = \underline{I}_1j\omega(L_1 - M_{12} - M_{31} + M_{23}) + \underline{I}_2j\omega(M_{12} - L_2 - M_{31} + M_{23})$ и $\underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_3 = \underline{I}_1j\omega(L_1 - M_{31} - M_{31} + L_3) + \underline{I}_2j\omega(M_{12} - M_{23} - M_{31} + L_3)$.

   в) Задатак се може решити у комплексном домену. Комплексне електромоторне силе су $\underline{\varepsilon}_1 = 400\,\mathrm{V}$, $\underline{\varepsilon}_2 = 400e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ V и $\underline{\varepsilon}_3 = 400e^{-j\frac{4\pi}{3}}$ V. Нека су све комплексне струје усмерене тако да увиру у чвор B, а комплексне електромоторне силе такве да им је позитиван крај окренут ка калемовима. Према Првом Кирхофовом закону важи $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$. Према Другом Кирхофовом закону важи $\underline{\varepsilon}_1 - \underline{I}_1j\omega L_1 = \underline{\varepsilon}_2 - \underline{I}_2j\omega L_2 = \underline{\varepsilon}_3 - \underline{I}_3j\omega L_3$. Заменом $\underline{I}_3 = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$ у претходни израз се добија $\underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_2 = \underline{I}_1j_1 - \underline{I}_2j\omega L_2)$ и $\underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_3 = \underline{I}_1j\omega(L_1 + L_3) + \underline{I}_2j\omega L_3$. Одавде се добија да су комплексне струје $\underline{I}_1 = (-0{,}240295 - j0{,}711926)\,\mathrm{A}$, $\underline{I}_2 = -2{,}61479 + j0{,}147861)\,\mathrm{A}$ и $\underline{I}_3 = (2{,}85508 + j0{,}564064)\,\mathrm{A}$, а њихове ефективне вредности $I_1 = 0{,}751385\,\mathrm{A}$, **[2п]** $I_2 = 2{,}61896\,\mathrm{A}$ **[2п]** и $I_3 = 2{,}91027\,\mathrm{A}$. **[2п]**

3. Запремина шипке је $V = SL$ па је маса шипке $m = \rho_1SL$ **[2п]**. Када је мало померена из равнотежног положаја, на шипку делују две силе: сила земљине теже вертикално наниже $F_g = \rho_1SLg$**[1п]** и сила потиска вертикално навише $F_p = \rho_2SLg$ **[1п]**. Како је $\rho_1 > \rho_2$ резултујућа сила $F_P - F_g$ делује у тачки у средини шипке, у смеру навише **[1п]**. Момент силе у односу на зглоб у тачки P је $M = -(\rho_2-\rho_1)SLg\frac{L}{2}\sin\theta$ **[4п]**. При малим осцилацијама важи $\sin\theta \approx \theta$ тј. $M \approx -(\rho_2-\rho_1)SLg\frac{L}{2}\theta$ **[2п]**. Знак $-$ у резултујућем моменту се јавио због тога што се резултујући момент супротставља повећању θ **[1п]**. Момент инерције шипке око тачке P је $I = \frac{1}{3}ML^2 = \frac{1}{3}S\rho_1L^3$ **[1п]**. Једначина кретања шипке је: $I\alpha = M$ **[1п]**а заменом одговарајућих израза $\alpha = -\frac{M}{I}\theta = -\omega^2\theta$ **[3п]** упоређивањем са једначином хармонијског осцилатора имамо $\omega = \sqrt{\frac{3g(\rho_2-\rho_1)}{2\rho_1L}}$ **[3п]**.

4. Иницијално, електрично поље услед плоча 1 и 2 на месту где се налази плоча 3 је $E = \frac{Q-q}{2\varepsilon_0S}$ **[1п]**, па је сила која делује на плочу 3 у почетном тренутку $F = \frac{Q(Q-q)}{2\varepsilon_0S}$ **[1п]**. Током судара, плоче 2 и 3 ефективно постају једна плоча укупног наелектрисања $Q+q$. Током судара наелектрисање се тако распоређује да неутралише укупно поље између плоча у додиру. Ово значи да ће десна страна система плоча 2 и 3 имати наелектрисање $\frac{q}{2}$ (тј плоча 3 након раздвајања) а лева страна система плоча 2 и 3 ће имати $Q + \frac{q}{2}$ (тј. плоча 2 након раздвајања) **[6п]** **(Бодовати са 6п свако објашњење које доводи до овакве расподеле наелектрисања)**. Након судара, поље услед плоче 1 и 2 је $E' = \frac{q}{4\varepsilon_0S}$**[2п]** а на плочу 3 делује сила $F' = \frac{q^2}{8\varepsilon_0S}$**[1п]**. Укупни извршени ради приликом кретања плоче је $A = (F + F')d = \frac{d}{8\varepsilon_0S}(2Q-q)^2$**[4п]**. Овај рад једнак је укупној промени кинетичке енергије плоче 3 тј. $A = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2$ **[3п]** где је v брзина плоче 3 када се врати у почетни положај. Сада је $v = \sqrt{\frac{d}{\varepsilon_0mS}}(Q-\frac{q}{2})$ **[2п]**.

Задатке припремили: *Настасија Ћонић* (1 и 2. задатак), *Петар Петрашиновић* (3, 4 и 5. задатак), Физички факултет, Универзитет у Београду
Рецензент: *др Ненад Стевановић*, Природно - математички факултет, Универзитет у Крагујевцу
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду

5. Када су магнетна и електрична сила која делује на јоне у крви супротног смера а једнаког интензитета, на јоне у крви не делује никаква сила. Следи $qvB = qE$ тј. $E = vB$ **[1п]**, при чему је $E = \frac{U}{d}$ где је U напон и d растојање између електрода. Коришћењем израза за магнетну индукцију у центру Хелмхолцових калемова, добијамо зависност $U = dv\mu_0 NR^2\left(\left(\frac{D}{2}\right)^2 + R^2\right)^{-\frac{3}{2}} I$**[1п]** . Из коефицијента правца добијене зависности можемо наћи брзину протока крви кроз артерије. Да бисмо одредили коефицијент праве бирамо две тачке A и B, које се налазе на правој између прве и друге тачке и између претпоследње и последње тачке, редом. Координате тих тачака су $A(3{,}0\,\mathrm{A}; 15{,}0\,\mu\mathrm{V})$ **[1п]** $B(16{,}9\,\mathrm{A}; 86\,\mu\mathrm{V})$ **[1п]**, а њихове грешке $\Delta y_A = 0{,}8\,\mu\mathrm{V}$ и $\Delta x_A = 0{,}1\,\mathrm{A}$ **[0,5п+0,5п]**, $\Delta y_B = 4\,\mu\mathrm{V}$ и $\Delta x_B = 0{,}1\,\mathrm{A}$ **[0,5п+0,5п]**. Коефицијент праве је $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 5{,}11\,\mu\Omega$, а његова грешка $\Delta k = \mid k \mid \left(\frac{\Delta y_A + \Delta y_B}{|y_B - y_A|} + \frac{\Delta x_A + \Delta x_B}{|x_B - x_A|}\right) = 0{,}42\,\mu\Omega$. Коначно, $k = (5{,}1 \pm 0{,}5)\,\mu\Omega$ (**[1п+1п] 1п за тачно израчунату вредност, 1п за тачно израчунату грешку**). Попречни пресек артерије је $S = r^2\pi = 1{,}5386 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$ и одговарајућа грешка $\Delta S = 2S\frac{\Delta r}{r} = 0{,}22 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$, тј. $S = (1{,}5 \pm 0{,}3)\cdot 10^{-6}\mathrm{m}^2$ **[0,5п+0,5п]**. Коефицијент правца ове линеарне зависности је $k = dv\mu_0 NR^2\left(\left(\frac{D}{2}\right)^2 + R^2\right)^{-\frac{3}{2}}$. Одавде је брзина протока крви у артерији $v = \frac{k}{d\mu_0 NR^2\left(\left(\frac{D}{2}\right)^2 + R^2\right)^{-\frac{3}{2}}} = 0{,}487\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ и запремински проток је $Q = Sv = 7{,}49 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$. Одговарајуће грешке су $\Delta v = v(\frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta d}{d}) = 0{,}06\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ и $\Delta Q = Q(\frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta v}{v}) = 2\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$, па је коначно $v = (0{,}49 \pm 0{,}06)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (**[1п+1п] 1п за тачно израчунату вредност, 1п за тачно израчунату грешку**) и $Q = (7 \pm 2)\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$ (**[1п+1п] 1п за тачно израчунату вредност, 1п за тачно израчунату грешку**).
У табели су приказане заокружене вредности (**[2,8п] за потпуно исправну табелу, по 0,2п за сваку ставку у прве две колоне**).
Исправно нацртан график вреди [4,2п].
Начин бодовања: Негативни поени за график, између осталог за:

- Координатне осе треба цртати по ивицама милиметарског папира -0.2
- Без наслова -0.2 (наслов није $y = f(x)$)
- Лоша размера -0.2 (график заузима мање од 1/4 простора папира)
- Осе нису обележене и недостају јединице -0.2
- Унете су мерене бројне вредности на осе -0.2
- Ако 1. и 2. изабрана тачка није између 1. и 2. односно претпоследње и последње експерименталне -0.5
- Изабране тачке нису у мереном опсегу -0.5
- Лоша размера подеока -0.2 (на милиметарском папиру може да одговара ... 0.05; 0.1; 0.2; 0.4; 0.5; 1; 2; 4; 5; 10 ... јединица величине која се приказује)

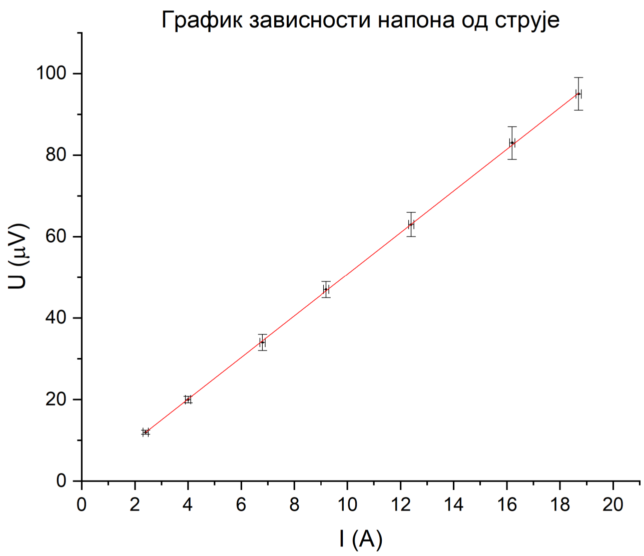
Негативни поени за рачун, између осталог за:

- Лоша размера – за коефицијент правца 50
- Ако нису изабране добре тачке са графика – за тражене величине 50

Задатке припремили: *Настасија Цонић* (1 и 2. задатак), *Петар Петрашиновић* (3, 4 и 5. задатак), Физички факултет, Универзитет у Београду
Рецензент: *др Ненад Стевановић*, Природно - математички факултет, Универзитет у Крагујевцу
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду

Табела 1: Експериментални подаци са одговарајућим апсолутним грешкама

	$U[\mu\mathrm{V}]$	$\Delta U[\mu\mathrm{V}]$	$I[\mathrm{A}]$
1	12,0	0,5	2,4
2	20,0	0,8	4,2
3	34,0	2,0	6,8
4	47,0	2,0	9,2
5	63,0	3,0	12,4
6	83,0	4,0	16,2
7	95,0	4,0	18,7



Слика 1: График у задатку 5.

Решења свих задатака треба јасно образложити и треба јасно навести све физичке законе и дефинисати све ознаке које се користе у решењу задатка.

*У бета категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима свих врста гимназија осим специјализованих гимназија за области математика и физика.

Задатке припремили: *Настасија Цонић* (1 и 2. задатак), *Петар Петрашиновић* (3, 4 и 5. задатак), Физички факултет, Универзитет у Београду
Рецензент: *др Ненад Стевановић*, Природно - математички факултет, Универзитет у Крагујевцу
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду