Решење: Задатак 2 (10 поена)

Део А - Ларморова прецесија (3 поена)

(а) Заменом $\vec{\mu} = -g\vec{S}$ у $\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ добијамо $\frac{\mathrm{d}\vec{\mu}}{\mathrm{d}t} = -g\vec{\mu} \times \vec{B}$. Како је $(\vec{\mu} \times \vec{B}) \perp \vec{\mu}$ то је и $\frac{\mathrm{d}\vec{\mu}}{\mathrm{d}t} \perp \vec{\mu}$ **[0,5п]**. Сада је $\vec{\mu} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\mu}}{\mathrm{d}t} = 0$ тј. $\frac{\mathrm{d}|\vec{\mu}|^2}{\mathrm{d}t} = 0$ одакле $\mu = |\vec{\mu}| = \mathrm{const.}$ **[0,5п]**

(б) Слично, имамо да је $\vec{B} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\mu}}{\mathrm{d}t} = 0$ тј. $\frac{\mathrm{d}(\vec{B} \cdot \vec{\mu})}{\mathrm{d}t} = 0$ одакле је $\vec{B} \cdot \vec{\mu} = const.$. Следи да се и угао који заклапају вектори $\vec{B}$ и $\vec{\mu}$ не мења, па врх вектора $\vec{\mu}$ описује кружницу. **[0,5п]**

(в) Користећи да је $\vec{B} = B\vec{e_z}$, моментна једначина за магнетни момент честице постаје $\frac{\mathrm{d}\vec{\mu}}{\mathrm{d}t} = -g\mu B \sin\phi \vec{e_\theta}$ **[0,5п]**. Пројекцијом на правац $\vec{e_\theta}$ добијамо $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = -gB\mu \sin\phi$ **[0,5п]**. Како врх вектора $\vec{\mu}$ описује кружницу полупречника $\mu \sin\phi$, као на слици 1 , следи $\mathrm{d}\mu = \mu \sin\phi \mathrm{d}\theta$ одакле добијамо да је Ларморова фреквенца $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega_L = -gB$.**[0,5п]**

Део Б - Прелазак у ротирајући референтни систем (4 поена)

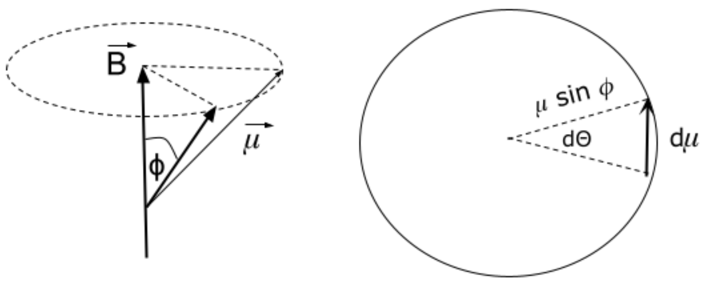
(а) Користећи релацију из текста задатка, добијемо $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{\mu}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rot}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\mu}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{lab}} - \vec{\omega} \times \vec{\mu} \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\mu}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rot}} = -g(\vec{\mu} \times \vec{B}) - \vec{\omega} \times \vec{\mu}$ **[0,5п]**. Коришћењем дистрибутивности добијамо: $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{\mu}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{rot}} = -g\vec{\mu} \times (\vec{B} - \frac{\vec{\omega}}{g}) = -g\vec{\mu} \times \vec{B}_{\mathrm{eff}}$ **[0,5п]**.

(б) Будући да смо добили исти облик једначине за магнетни момент честице у систему S', Ларморова фреквенца у систему S' је: $\omega'_L = -gB_{\mathrm{eff}} = -g(B - \frac{\omega}{g})$ **(0.5 п)**.

(в) Посматрајмо магнетно поље из ротирајућег система. У овом систему магнетно поље је облика $\vec{B} = B_0\vec{e'_z} + b\vec{e'_x}$ **[1п]**. У систему који ротира, ефективно магнетно поље је $\vec{B}_{\mathrm{eff}} = (B_0 - \frac{\omega}{g})\vec{e'_z} + b\vec{e'_x}$ **[1п]**. Нова Ларморова фреквенца је $\Omega_L = -gB_{\mathrm{eff}} = -g\sqrt{\left(B_0 - \frac{\omega}{g}\right)^2 + b^2}$ **[0,5п]**.

Део В - Квантна природа спина (3 поена)

(а) На месту где се налази екран Е, по Хајзенберговом принципу, важи: $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$. Несигурност импулса атома је $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$. Током времена t, несигурност ширине снопа δx ће порасти на $\delta x = \Delta v_x t \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x}t$ **[0,5п]**.



Слика 1: Прецесија магнетног момента око магнетног поља у делу задатка под А.

Међутим, размак између два снопа условљен је силом F_x па је након времена t размак снопова дуж x-осе $d_x = 2\frac{1}{2}\frac{F_x}{m}t^2 = \frac{1}{m}|\mu_x|Ct^2$ **[0,5п]**. Да би разликовали ком снопу честица припада, размак између снопова мора бити већи од ширине снопова, иначе је немогуће одредити колика је x компонента спина атома. Дакле треба да важи $d_x \gg \delta x$ тј. $\frac{1}{\hbar}|\mu_x|\,\Delta x\,C\,t \gg 1$ **[0,5п]**.

(б) Када атоми пролазе кроз екран, услед ширине процепа, варијација магнетног поља које атоми осећају је $\Delta B = C\Delta x$ **[0,5п]**. Следи да ће угаона фреквенца прецесије имати расипање од $\Delta\omega = g\Delta B = \frac{\mu_z}{\hbar}\Delta B = \frac{|\mu_x|}{\hbar}C\Delta x$ **[0,5п]**. Уколико је услов из претходног дела за мерење μ_x задовољен следи $\Delta\omega t \gg \frac{g\hbar}{|\mu|} = 1$ **[0,5п]** тј. $\Delta\omega t \gg 1$ расипање угла око ког магнетни моменти прецесирају је толико велико да је несигурност при мерењу μ_z јако велика.

Задатак припремио: *Петар Петрашиновић*, Физички факултет, Београд
Рецензент: *доц. др Момир Арсенијевић*, ПМФ Крагујевац
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *Проф. др Имре Гут*, Департман за физику, Нови Сад