



## Задача 2: Спин у магнетном пољу (10 поена)

Фундаментална особина свих честица, поред масе и наелектрисања, је спин. Спин је унутрашњи облик момента импулса, карактеристичан за одређени тип честица. Иако је за потпуни опис и разумевање спина потребна квантна механика, неке особине можемо разматрати и класично. У оквиру овог задатка разматраћемо утицај магнетног поља на спин. Класично, моментна једначина за спин је:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B},$$

где  $\vec{S}$  представља унутрашњи угаони момент честице (тј. спин),  $\vec{\mu}$  је магнетни момент честице, док је  $\vec{B}$  магнетно поље. Веза између спина честице и њеног магнетног момента је:

$$\vec{\mu} = -g\vec{S},$$

при чему је  $g$  жиромагнетни однос.

### Део А - Ларморова прецесија (3 поена)

- (а) [1п] Показати да магнетно поље  $\vec{B}$  не мења интензитет магнетног момента  $\mu$ .
- (б) [0,5п] У случају константног магнетног поља показати да се и угао између  $\vec{B}$  и  $\vec{\mu}$  не мења.
- (в) [1,5п] Униформно магнетно поље  $\vec{B}$  гради угао  $\phi$  са магнетним моментом честице  $\vec{\mu}$ . Због постојања момента силе магнетног поља, магнетни момент честице  $\vec{\mu}$  ротира око правца магнетног поља  $\vec{B}$ . Ово додатно кретање, узроковано присуством магнетног поља, назива се *Ларморова прецесија*. Одредити угаону фреквенцу Ларморове прецесије  $\omega_L$ , узимајући да је  $\vec{B} = B\vec{e}_z$

### Део Б - Прелазак у ротирајући референтни систем (4 поена)

У овом делу, размотримо феномен из другог референтног система. Замислимо да смо, из лабораторијског референтног система  $S = (x, y, z)$ , прешли у нови референтни систем  $S' = (x', y', z')$  који ротира угаоном фреквенцијом  $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ , у односу на лабораторијски референтни систем. У почетном тренутку  $t = 0$  координате у ова два система се поклапају. Произвољни вектор  $\vec{V} = V_x\vec{e}_x + V_y\vec{e}_y + V_z\vec{e}_z$  можемо записати као  $\vec{V} = V'_x\vec{e}'_x + V'_y\vec{e}'_y + V'_z\vec{e}'_z$  у систему  $S'$ . Веза између извода овог вектора по времену у ова два система је

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\text{lab}} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{V}$$

где је  $\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\text{lab}}$  извод по времену вектора  $\vec{V}$  у лабораторијском референтном систему, а  $\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{\text{rot}}$  извод по времену вектора  $\vec{V}$  у ротирајућем референтном систему.

- (а) [1п] Наћи временску еволуцију (извод по времену) вектора магнетног момента честице у  $S'$  систему. Решење изразити помоћу  $\vec{B}_{\text{eff}} = \vec{B} - \frac{\omega}{g}\vec{e}'_z$  ефективног магнетног поља.
- (б) [0,5 п] У случају константног магнетног поља  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  одредити угаону фреквенцију Ларморове прецесије у  $S'$  систему.
- (в) [2,5п] Размотримо сада утицај временски зависног магнетног поља на честицу са спином. Претпоставимо да се магнетно поље може представити у облику  $\vec{B} = B_0\vec{e}_z + \vec{b}(t)$ , при чему је први сабирак константни део магнетног поља док други сабирак представља ротационо магнетно поље, и облика је:  $\vec{b}(t) = b(\cos\omega t\vec{e}_x + \sin\omega t\vec{e}_y)$ . Израчунати  $\vec{B}_{\text{eff}}$ . Одредити угаону фреквенцију Ларморове прецесије у систему  $S'$  (систем у ком је  $B_{\text{eff}}$  константно).



Део В - Квантна природа светлости (3 поена)

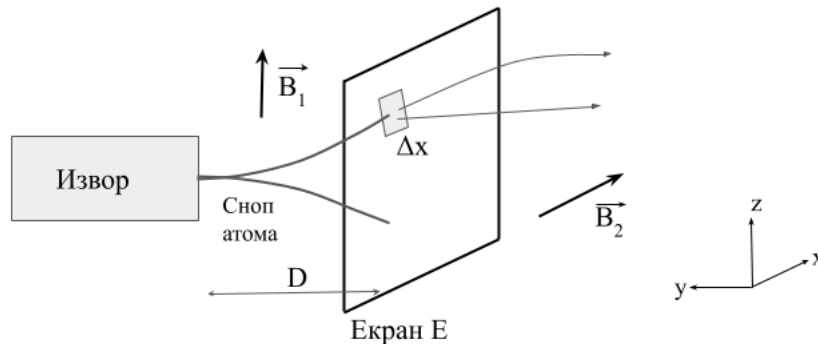
Спин је, ипак, векторска величина. Због своје квантне природе, немогуће му је мерити све компоненте истовремено. Можемо му мерити интензитет  $\mu$  и једну компоненту (на пример  $\mu_z$ ) истовремено, али не и све  $\mu$ ,  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ ,  $\mu_z$ . У овом делу ћемо, на основу Хајзенбергових релација неодређености, показати да се ове величине заиста не могу мерити истовремено.

- (а) [1,5 п] У јаком магнетном пољу, честица са спином може се наћи у два квантна стања: „горе“ и „доле“. Посматрајмо извор атома сребра, који има мали отвор. Кроз овај отвор излеће сноп атома дуж  $y$ -осе као на слици 1, и улећу у јако, просторно променљиво, магнетно поље  $\vec{B}_1$ , које је доминантно усмерено дуж  $z$ -осе. Услед дејства овог поља, атоми у различитим стањима са магнетним моментом  $\mu_z = \pm g\hbar$  (спин стања „горе“ и „доле“ респективно) су „поцепани“ дуж  $z$ -осе. На растојању  $D$  од извора, постављен је екран Е тако да само атоми са спином у стању „горе“ могу да прођу. Такорећи, након екрана Е, атоми су „препарирани“ у стање са спином „горе“. Одмах након екрана Е, атоми улећу у јако, просторно променљиво, магнетно поље  $\vec{B}_2$  доминантно усмерено дуж  $x$ -осе и на њих делује сила  $F_x = \mu_x C$ . Дуж  $x$ -осе атоми имају магнетни момент  $\mu_x = \pm g\hbar$  (спин стања „горе“ и „доле“ респективно). Да бисмо одредили  $\mu_x$  посматрајући „цепање“ дуж  $x$ -осе, показати да мора бити задовољено

$$\frac{1}{\hbar} |\mu_x| \Delta x C t \gg 1$$

при чему је  $\Delta x$  ширина процепа на екрану кроз коју пролазе атоми, док је  $t$  време након проласка кроз екран.

- (б) [1,5 п] Атоми су иницијално „препарирани“ у спин стању „горе“ након проласка кроз екран, при чему је  $\mu_z = g\hbar = |\mu_x|$ . Ово значи да ће атоми прецесирати са различитим угаоним фреквенцама у опсегу  $\Delta\omega$  око  $x$  компоненте  $\vec{B}_2$ , тј око  $B_{2x} = B_0 + Cx$ . Показати да је ширење угла прецесије  $\Delta\omega t$  велико, тако да не можемо истовремено мерити  $\mu_x$  и  $\mu_z$ .



Слика 1: Поставка из дела задатка под В.