Решење: Задатак 3 (10 поена)

(а) Ласерски сигнал се креће брзином светлости и у времену dt пређе двоструко растојање, $2a$, од земље до месеца. Дакле, налазимо просечно растојање до месеца као $a = c/(2dt) \approx 384000\,km$ **(0.5 поена)**. Ако се месец удаљава брзином v од земље, онда је време повратка у години G дуже за $\Delta dt = 2v(G - G_0)/c$ него у години G_0. Одавде добијамо брзину удаљавања месеца као $v = c\Delta dt/2(G - G_0)$, што заменом вредности даје $v \approx 3.8\,cm/$години **(0.5 поена)**.

(б) Брзину промене дужине дана можемо наћи из одржања момента импулса система земља-месец. Нека је Ω угаона брзина месеца око земље. Током његовог кретања по кружној орбити, центрипетална сила, $F_c = M_m a\Omega^2$, мора бити једнака сили гравитације између земље и месеца, $F_g = G\frac{M_z M_m}{a^2}$ (сматрајући да приближно месец кружи око центра земље). Једнакост између ове две силе даје везу између угаоне брзине месеца и растојања од земље (трећи Кеплеров закон):

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM_z}{a^3}}\ . \tag{1}$$

Пошто месец сматрамо материјалном тачком, његов момент инерције на путу око земље је $I_m = M_m a^2$ а момент импулса је $L_m = I_m\Omega$. Користећи трећи Кеплеров закон, налазимо везу између момента импулса месеца и његовог растојања до земље:

$$L_m = M_m\sqrt{aGM_z}\ \textbf{(0.5 поена)}\ . \tag{2}$$

Са друге стране, земља је сфера, па је њен момент инерције $I_z = \frac{2}{5}M_z R_z^2$, а момент импулса је $L_z = I_z\omega$, где је ω угаона брзина ротације земље око своје осе. Месец и земља заједно чине затворен систем, па се укупан момент импулса одржава, $L_m + L_z = const$. Нека индекс "1" означава тренутне вредности величина, а индекс "2" ове величине наредне године. Онда, заменом формула за моменте импулса месеца и земље, налазимо:

$$\tfrac{2}{5}M_z R_z^2\omega_1 + M_m\sqrt{a_1 GM_z} = \tfrac{2}{5}M_z R_z^2\omega_2 + M_m\sqrt{a_2 GM_z}\ \textbf{(0.5 поена)}\ . \tag{3}$$

Прегруписањем и коришћењем $\omega = 2\pi/T$, добијамо:

$$\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} = -\frac{5M_m\sqrt{GM_z}}{4\pi M_z R_z^2}(a_2^{1/2} - a_1^{1/2})\ . \tag{4}$$

Пошто се месец за година дана удаљи врло мало ($3.8cm$) у односу на његову тренутну удаљеност ($384000km$), можемо искористити математичку формулу дату у задатку — $a_2^{1/2} - a_1^{1/2} \approx \frac{1}{2}a_1^{-1/2}(a_2 - a_1)$. Слично, можемо претопоставити да се дан за годину дана продужи врло мало, па важи $T_2^{-1} - T_1^{-1} \approx -T_1^{-2}(T_2 - T_1)$. На основу овога, налазимо продужење дана за годину дана у зависности од промене удаљености месеца:

$$T_2 - T_1 = \frac{5M_m T^2}{4\pi M_z R_z^2}\sqrt{\frac{GM_z}{a}}(a_2 - a_1)\ \textbf{(0.5 поена)}\ . \tag{5}$$

Заменом $a_2 - a_1 \approx 3.8cm$ и осталих вредности добијамо промену дужине дана, $\Delta T = T_2 - T_1 \approx 3.5 \times 10^{-5}s$ током периода од годину дана. Овим темпом потребно је око 100 милиона година да би се дан продужио за један сат ($3600s/\Delta T \approx 103 \times 10^6$ година) **(0.25 поена)**.

(в) Земља успорава услед трења између земље и њеног воденог покривача деформисаног плимом и осеком. Дакле, рад силе трења се (делимично) троши на смањење кинетичке енергије ротације земље. Према поставци задатка, удео $q = 0.5$ укупне енергије садржане у таласу плиме и осеке се утроши на ово трење у току једног дана. Енергија таласа по јединици површине је $\varepsilon_T = \frac{1}{8}\rho g H^2$, па је укупна енергија $E_T = \varepsilon_T A = \frac{\pi}{2}\rho g H^2 R_z^2$, где је $A = 4R_z^2\pi$ површина земље. Из овога следи да се у току једног дана, на трење утроши енергија

$$E_{tr} = \frac{q\pi}{2}\rho g H^2 R_z^2\ \textbf{(0.5 поена)}\ . \tag{6}$$

Са друге стране, кинетичка енергија земљине ротације је

$$E_R = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \ . \tag{7}$$

У току једног дана, она се промени за

$$\Delta E_R = \frac{1}{2} I_z (\omega_2^2 - \omega_1^2) \ \textbf{(0.5 поена)} \ , \tag{8}$$

где индекс 1 означава тренутне величине, а индекс 2 величине наредног дана. Користећи формулу из поставке задатка, закључујемо да је $\omega_2^2 - \omega_1^2 \approx 2\omega_1(\omega_2 - \omega_1)$. Користећи резултате из претходног одељка (једначина 4), добијамо да је промена угаоне брзине земље

$$\omega_2 - \omega_1 = -\frac{5M_m}{4R_z^2}\sqrt{\frac{G}{M_z a_1}}(a_2 - a_1) \ \textbf{(0.5 поена)} \ . \tag{9}$$

Промена растојања у току једног дана је $a_2 - a_1 = vT$. Пошто се кинетичка енергија мења услед рада ове силе трења, важи $\Delta E_R + E_{tr} = 0$ **(0.5 поена)**, па из једначина 6, 8 и 9 добијамо

$$\frac{q}{2}\rho g H^2 R_z^2 = M_m \sqrt{\frac{GM_z}{a}} v \ . \tag{10}$$

Сређивањем добијамо висину таласа

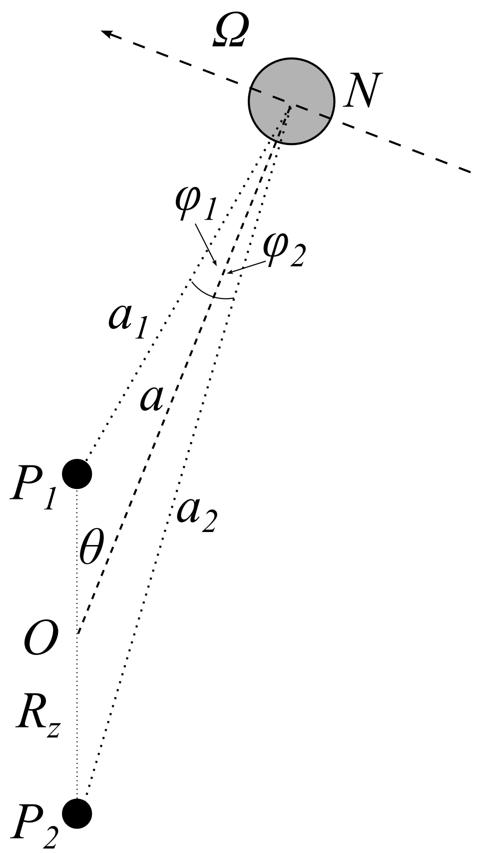
$$H = \left(\frac{2M_m}{q\rho g R_z^2}\sqrt{\frac{GM_z}{a}} v\right)^{1/2} \ \textbf{(0.5 поена)} \ . \tag{11}$$

Ово се додатно може упростити ако приметимо да је $GM_z = gR_z^2$, што даје

$$H = \left(\frac{2M_m v}{q\rho\sqrt{gR_z^2 a}}\right)^{1/2} \ . \tag{12}$$

Заменом вредности, добијамо висину плиме и осеке $H \approx 0.95\, m$ **(0.25 поена)**

(г)



Две тачкасте масе које стварају момент силе из дела задатка под (г).

Из претходних рачуна лако можемо добити момент силе, τ_z, који успорава земљину ротацију. Тај момент је дат са:

$$\tau_z = I_z \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \; . \tag{13}$$

Помоћу једначине 8 можемо повезати момент силе са променом енергије ротације током периода Δt: $\Delta E_R = I_z\omega\Delta\omega = \omega\tau_z\Delta t$ (где смо искористили $\omega_2^2 - \omega_1^2 \approx 2\omega\Delta\omega$). Опет према претходном делу задатка, промена енергије ротације након једног дана је дата са $\Delta E_R = -\frac{q\pi}{2}\rho g H^2 R_z^2$ (једначина 6). Дакле, узимајући период времена од једног дана, $\Delta t = T$, добијамо момент силе као:

$$\tau_z = -\frac{q}{4}\rho g H^2 R_z^2 \;\textbf{(0.5 поена)}\; . \tag{14}$$

По закону акције и реакције, овај момент силе је једнаке величине и супротног знака од момента који делује на месец, $\tau_m = -\tau_z$. Да бисмо довели у везу овај момент силе са отклоном θ, потребно је да га изједначимо са моментом силе који генеришу две тачкасте масе (слика). Момент силе у односу на центар ротације (тачку O) којим горња материјална тачка (са индексом 1) делује на месец је $\tau_1 = aF_1 \sin\varphi_1$, gde je F_1 гравитациона сила између материјалне тачке и месеца а φ_1 угао између дужи ON и дужи P_1N. Слично, момент силе који генерише доња тачка (са индексом 2) је $\tau_2 = -aF_2 \sin\varphi_2$. Укупан момент силе је дакле

$$\tau_m = \tau_1 + \tau_2 = a(F_1 \sin\varphi_1 - F_2 \sin\varphi_2) \;\textbf{(0.5 поена)}\; . \tag{15}$$

Гравитационе силе су дате са:

$$F_1 = \frac{GmM_m}{a_1^2} \quad , \quad F_1 = \frac{GmM_m}{a_2^2} \; . \tag{16}$$

Углове φ_1 и φ_2 можемо добити из синусне теореме:

$$\sin\varphi_1 = \sin\theta \frac{R_z}{a_1} \quad , \quad \sin\varphi_2 = \sin\theta \frac{R_z}{a_2} \tag{17}$$

Са овим се добија момент силе као:

$$\tau_m = aGmM_mR_z \sin\theta(a_1^{-3} - a_2^{-3}) \textbf{ (0.5 поена) .} \tag{18}$$

Пошто је растојање земље и месеца, a, много веће од полупречника земље, растојања a_1 и a_2 су слична па можемо користити математичку формулу из задатка, $(a_1^{-3} - a_2^{-3}) \approx -3a^{-4}(a_1 - a_2)$. Растојања a_1 и a_2 можемо добити из косинусне теореме:

$$a_1 = \sqrt{a^2 + R_z^2 - 2aR_z\cos\theta} \quad , \quad a_2 = \sqrt{a^2 + R_z^2 + 2aR_z\cos\theta} \textbf{ (0.25 поена) .} \tag{19}$$

Да бисмо нашли њихову разлику, потребно је да препишемо растојања као

$$a_{1,2} = a\sqrt{1 + \left(\frac{R_z}{a}\right)^2 \mp 2\frac{R_z}{a}\cos\theta} \textbf{ .} \tag{20}$$

Пошто је полупречник земље мали у односу на растојање до месеца, можемо искористити математичку формулу дату у задатку $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ да добијемо

$$a_{1,2} \approx a\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R_z}{a}\right)^2 \mp \frac{R_z}{a}\cos\theta\right) \textbf{ (0.5 поена) .} \tag{21}$$

Њихова разлика је онда:

$$a_1 - a_2 \approx -2R_z\cos\theta \textbf{ .} \tag{22}$$

Са овим, добијамо момент силе као:

$$\tau_m = 3\frac{GmM_mR_z^2}{a^3}\sin(2\theta) \textbf{ .} \tag{23}$$

Ово можемо искомбиновати са једначином 14 за момент силе и са формулом за масу $m = \sqrt{8\pi/15}\rho R_z^2 H$ датом у тексту задатка. Тако добијамо отклон θ као:

$$\sin(2\theta) = \frac{q}{12}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\frac{a^3gH}{GR_z^2M_m} \textbf{ (0.5 поена) .} \tag{24}$$

Ово се може поједноставити коришћењем $g = GM_z/R_z^2$, па се тако добија:

$$\theta = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{q}{12}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\frac{M_z}{M_m}\frac{H}{R_z}\frac{a^3}{R_z^3}\right) \textbf{ .} \tag{25}$$

Заменом вредности, добијамо $\theta \approx 2.5^\circ$ $(0.043\,rad)$ **(0.25 поена)**.

(д) Равнотежа ће се успоставити када трење, као и момент силе који је његова последица, нестану. То се дешава када земљина ротација успори довољно тако да дужина дана постане једнака периоду ротације месеца око земље — у том случају, велика полуоса елипсоида је усмерена према месецу, па момент силе нестаје, а трења нема пошто водени покривач ротира истом брзином као земља. Дакле, услов за равнотежу је $\omega = \Omega$ **(1 поен)**. Користећи трећи Кеплеров закон, добијамо везу између дужине дана и растојања до месеца у овој равнотежи:

$$T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a^3}{GM_z}} \textbf{ (0.5 поена) .} \tag{26}$$

Задатак припремио: *Предраг Поповић*, Физички факултет, Београд
Рецензент: *Ненад Стевановић*, Природно-математички факултет, Крагујевац
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *Проф. др Имре Гут*, Департман за физику, Нови Сад