ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2023/2024. ГОДИНЕ

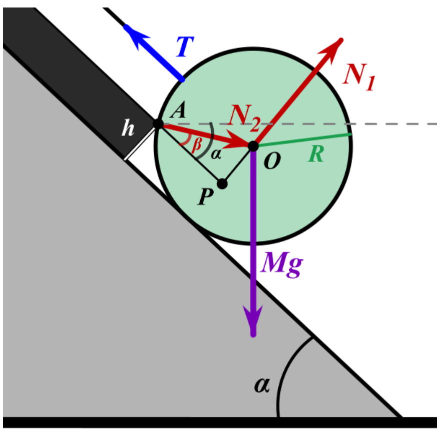
Друштво физичара Србије и
Министарство просвете Републике Србије
РЕШЕЊА – А КАТЕГОРИЈА

I разред | **ДРЖАВНИ НИВО** | **6. април 2024.**

1. Нека је растојање између дечака и њему ближе зграде l_1, онда је растојање између њега и даље зграде: $l_2 = \eta l_1$. Како је растојање између зграда D следи: $l_1 = D/(\eta+1)$ **[1п]** и $l_2 = \eta D/(\eta+1)$ **[1п]**. При одбијању лоптице од зида интензитет брзине се не мења, и како је упадни угао једнак одбојном, следи да се вертикална компонента брзине лоптице при судару не мења. Хоризонтална компонента брзине лоптице при судару мења знак. Како одбијање лоптице не утиче на њено кретање у вертикалном правцу, важи $-v\sin\alpha = v\sin\alpha - gt$ **[3п]**, где је t укупно време кретања лоптице. Из претходне једначине добија се: $t = 2v\sin\alpha/g$ **[3п]**. Укупан пређени пут лоптице у хоризонталном правцу једнак је домету који би лоптица имала да нема препрека (препреке мењају само померај). Домет косог хитца у том случају једнак је: $d = v\cos\alpha t = 2v^2\sin\alpha\cos\alpha/g$ **[3п]**. Како дечак хвата лоптицу након $N = 3$ одбијања, пређени пут у хоризонталном правцу је: $d = l_2 + D + D + l_2 = 2l_2 + 2D = 2D(2\eta+1)/(\eta+1)$ **[4п]**. Изједначавањем овог израза са изразом добијеним из једначина кретања следи: $v = \sqrt{\frac{gD}{\sin\alpha\cos\alpha}\frac{2\eta+1}{\eta+1}}$ **[5п]**.

2. Задатак је најлакше решити у систему везаном за сатну казаљку. Нека су угаоне брзине минутне и сатне казаљке у тренутку када је сат показивао $2\,h 14\,min$ редом Ω_1 и Ω_2. Како је механизам сата исправан, важи $\Omega_1 = 12\Omega_2$. Релативна угаона брзина минутне казаљке у односу на сатну казаљку у почетном тренутку је: $\omega_1 = \Omega_1 - \Omega_2 = \frac{11}{12}\Omega_1$ **[1п]**. Почетни угао који заклапају казаљке је: $\phi = \frac{14}{60}360^\circ - (\frac{2}{12}360^\circ + \frac{1}{12}\frac{14}{60}360^\circ) = 17^\circ$ **[1п]**. Угао који минутна казаљка пређе до првог сусрета са сатном казаљком је $\theta_1 = 360^\circ - \phi = 343^\circ$ **[1п]**. Релативно угаоно успорење износи: $\alpha = \frac{11}{12}\alpha_1$ **[1п]** где је α_1 угаоно успорење минутне казаљке у лабораторијском систему. Угао који опише минутна казаљка од првог стартовања штоперице до првог поклапања казаљки је: $\theta_1 = \omega_1\Delta t_1 - \frac{1}{2}\alpha\Delta t_1{}^2$ **[4п]**. У тренутку првог поклапања казаљки релативна угаона брзина износи $\omega_2 = \omega_1 - \alpha\Delta t_1$. Након Δt_2 казаљке се поново поклопе и минутна казаљка пређе додатни угао $\theta_2 = 360^\circ$, па се добија релација: $\theta_2 = \omega_2\Delta t_2 - \frac{1}{2}\alpha\Delta t_2{}^2$ **[4п]**. Решавањем добијеног система по α добија се: $\alpha = \frac{2(\theta_1\Delta t_2 - \theta_2\Delta t_1)}{\Delta t_1\Delta t_2(\Delta t_1 + \Delta t_2)} = 5{,}333\cdot 10^{-3}\frac{\circ}{min^2}$ **[2п]**. Заменом ове вредности у једначину за θ_1 добија се релативна угаона брзина у почетном тренутку: $\omega_1 = \frac{\theta_1}{\Delta t_1} + \frac{1}{2}\alpha(\Delta t_1) = 5{,}086\frac{\circ}{min}$ **[2п]**. Угао који пређе минутна казаљка у лабораторијском систему до заустављања, θ_3, добија се из једначине: $(\Omega_1)^2 = 2\alpha_1\theta_3$ **[1п]**. Из односа кинематичких величина лабораторијског и релативног референтног система следи: $(\frac{12}{11}\omega_1)^2 = 2\frac{12}{11}\alpha\theta_3$, па зауставни угао минутне казаљке износи $\theta_3 = 2645{,}7^\circ$ **[1п]**. Један минутни подеок одговара углу $360^\circ/60 = 6^\circ$, те до заустављања минутна казаљка пређе $\theta_3/6^\circ = 441$ подеока. Урачунавајући и почетну позицију минутне казаљке (на почетку је она на 14-ом подеоку), коначна позиција минутне казаљке је на $441 + 14 = 455$-ом подеоку. Како је $455 = 7\cdot 60 + 35$, минутна казаљка показује $35\,min$ **[1п]**, а сатна казаљка показује $2\,h + 7\,h = 9\,h$ **[1п]**. Коначно време које показује сат је: $9\,h\,35\,min$.

3. На (*Слика* 1) су приказане силе које делују на ваљак у референтном систему везаном за стрму раван.



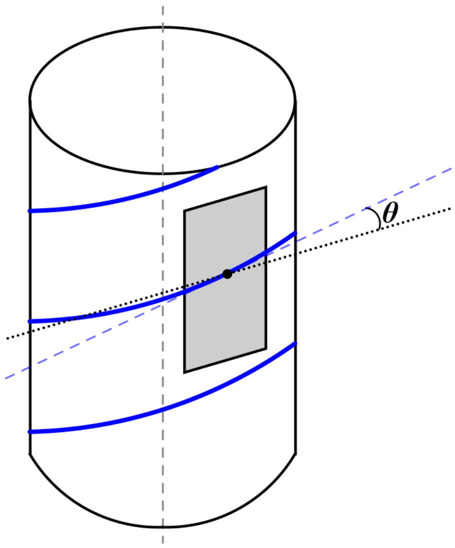
Слика 1

У том систему ваљак се налази у равнотежи и додирује степеник, па је услов равнотеже сила: $T - N_2\cos\beta - Mg\sin\alpha = 0$ (1) **[3п]** и $N_1 + N_2\sin\beta - Mg\cos\alpha = 0$ (2) **[3п]** . Да бисмо одредили угао β уочимо троугао OAP. Лако можемо уочити да је $\sin\beta = \frac{R-h}{R} = \frac{1}{2}$, па је $\beta = 30^\circ$ **[2п]**. Услов равнотеже сила које делују на коцку је: $T = mg\sin\alpha$ (3) **[2п]**. Када једначину (3) уврстимо у једначину (1) добијамо да је: $N_2 = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}(m-M)\,g$ (4) **[2п]**. Ако ваљак додирује степеник, онда је $N_2 \geq 0$, па из једначине (4) следи услов за минималну вредност масе коцке: $m \geq M$ (5) **[2п]**. Из једначина (2) и (4) следи да је: $N_1 = Mg\cos\alpha - (m-M)\,g\sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta$ (6) **[2п]**. Из услова да ваљак додирује стрму раван, $N_1 \geq 0$, и једначине (6) следи да је: $m \leq M(\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta + 1)$ (8)

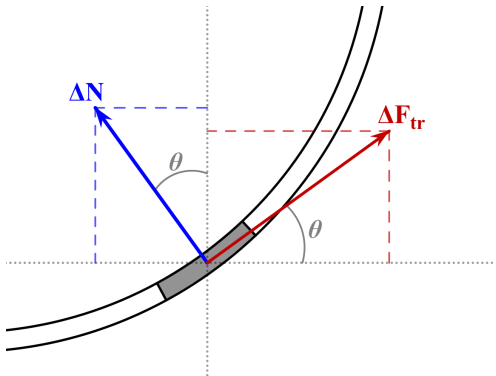
Задатке припремили: *Немања Мадић*, *др Биљана Николић*, Физички факултет Универзитета у Београду и *др Соња Предин*, Институт за физику у Београду; Рецензент: *Богдан Станојевић*, Физички факултет Универзитета у Београду; Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *Проф. др Имре Гут*, Природно-математички факултет Универзитета у Новом Саду

[**2п**]. Услов равнотеже момената сила у односу на тачку A је: $T(R-h) + N_1 R\cos\beta = MgR\cos(\alpha-\beta)$ (7) и ако једначине (3) и (6) уврстимо у једначину (7), добијамо да је услов равнотеже момента сила у тачки A задовољен [**2п**]. На крају, на основу једначина (5) и (8) и заменом вредности углова α и β, добијамо да је услов да ваљак мирује: $M \leq m \leq 2M$.

4. Како су навоји шрафа идентични и хомогено распоређени сваки делић навоја заклапа исти угао θ са хоризонталом (*Слика* 2). Кад шраф направи једну пуну ротацију, спусти се за вертикално растојање између два навоја H/n, где је H висина шрафа, па се угао θ може одредити као: $\mathrm{tg}\theta = \frac{H/n}{2\pi R} = \frac{\xi}{2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [**3п**], па је: $\theta = 30^\circ$ [**1п**]. Навоји шрафа и стола додирују се само са доње стране навоја шрафа, па се сила нормалне реакције и сила трења јављају само на тој површини. Када посматрамо произвољно мали делић навоја слика коју добијамо (*Слика* 3) је иста на сваком месту било којег навоја. Пошто шраф има цео број навоја, сума хоризонталних компонената сила је нула. Вертикалне компоненте сила које делују на појединачне делиће навоја су једнаке за сваки делић и могу се сумирати у укупну вертикалну силу F_v којом сто делује на шраф. Сила трења којом сто делује на један делић навоја једнака је $\Delta F_{tr} = \mu\Delta N$, па са (*Слика* 3) следи: $F_v = \sum\{\Delta N\cos\theta + \mu\Delta N\sin\theta\}$. Ако уведемо ознаку $N = \sum\Delta N$, једначина транслације по вертикалној оси постаје: $ma = mg - N\cos\theta - \mu N\sin\theta$ [**4п**]. Сумирањем момената хоризонталних компонената силе нормалне реакције и силе трења, које делују на појединачне делиће навоја, добија се укупан момент силе који ротира шраф. Једначина ротације шрафа је: $I\alpha = (N\sin\theta - \mu N\cos\theta)R$ [**4п**], где је $I = mR^2/2$ [**1п**]. Из чињенице да се шраф спусти за H/n при ротацији за пун круг, следи да је однос вертикалног и угаоног убрзања: $\frac{a}{\alpha} = \frac{H/n}{2\pi} = R\mathrm{tg}\theta$ [**4п**]. Заменом N из једначине за ротацију у једначину вертикалног кретања шрафа добија се убрзање: $a = g\frac{2(1-\mu\mathrm{ctg}\theta)}{2+\mathrm{ctg}^2\theta-\mu\mathrm{ctg}\theta} = g\frac{2(1-\mu\sqrt{3})}{5-\mu\sqrt{3}}$ [**3п**].



Слика 2



Слика 3

5. (а) Нека је m маса, а H висина ваљка, густина ваљка је: $\rho = \frac{m}{(R^2-r^2)\pi H}$ [**0,5п**], док је момент инерције ваљка око своје осе: $I = \frac{1}{2}\rho\pi H(R^4 - r^4)$ [**0,5п**]. Заменом израза за густину у израз за момент инерције добија се: $I = \frac{m(R^4-r^4)}{2(R^2-r^2)} = \frac{1}{2}m(R^2+r^2)$ [**1п**].
(б) Једначина кретања центра ваљка дуж стрме равни је: $ma = mg\sin\alpha - F_{tr}$ [**0,5п**], где је F_{tr} сила трења. Једначина ротације ваљка око своје осе дата је једначином: $I\beta = F_{tr}R$ [**0,5п**]. Како ваљак не проклизава по подлози, важи веза убрзања центра ваљка и његовог угаоног убрзања: $a = \beta R$ [**0,5п**]. Решавањем овог система по убрзању, добија се $a = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{I}{mR^2}}$ [**0,5п**].
(в) Пређени пут центра ваљка после времена t од почетка кретања је: $l = \frac{at^2}{2} = \frac{g\sin\alpha t^2}{2+2\frac{I}{mR^2}} = \frac{g\sin\alpha t^2}{3+(r/R)^2}$ [**1п**]. Зависност квадрата времена од пређеног пута је линеарна: $t^2 = kl$, где је коефицијент пропорционалности дат изразом: $k = \frac{3+(r/R)^2}{g\sin\alpha}$ [**1п**]. Одређивањем вредности k може се добити вредност убрзања Земљине теже.

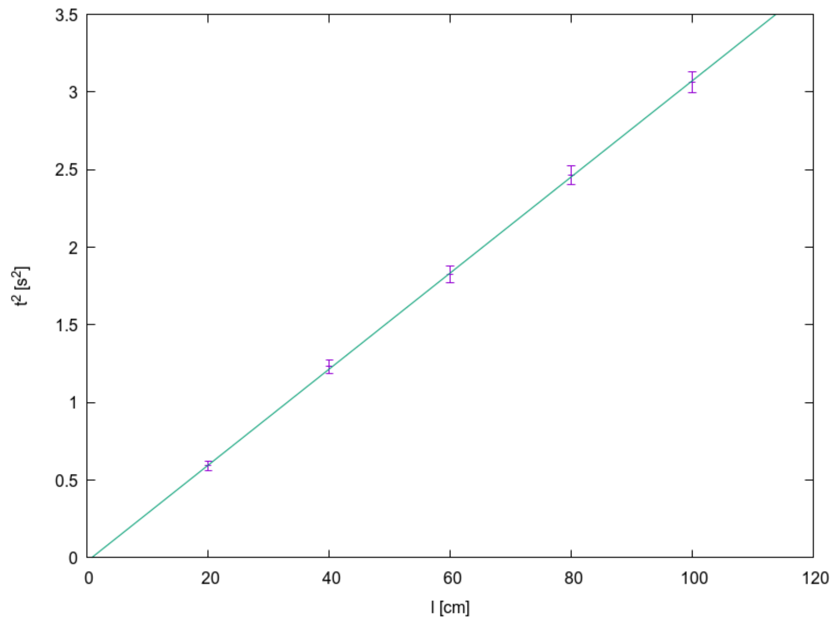
Задатке припремили: *Немања Мадић*, *др Биљана Николић*, Физички факултет Универзитета у Београду и *др Соња Предин*, Институт за физику у Београду; Рецензент: *Богдан Станојевић*, Физички факултет Универзитета у Београду; Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *Проф. др Имре Гут*, Природно-математички факултет Универзитета у Новом Саду

(г) Црта се линеарна зависност $t^2(l)$ или друга правилно изабрана линеаризована зависност величина t и l. Апсолутна грешка величине t^2 рачуна се као: $\Delta t^2 = 2t\Delta t$ [**1п**]. У (*Табела* 4а) дате су вредности за величине l и t^2 са одговарајућим апсолутним грешкама, док је график зависности $t^2(l)$ на (*Слика* 4б). Табела са правилно заокруженим резултатима вреди [**2п**], при чему се свака тачна вредност за величине t^2 и Δt^2 бодује са [**0,2п**]. График са правилно обележеним осама и тачкама са грешкама вреди [**7п**]. Правилно нацртане и обележене осе бодују се са по [**1п**] свака. Сваку добро уцртану тачку бодовати са [**0,8п**]; ако је тачка унета без грешке, бодовати са [**0,4п**]. Провучену линију кроз све експерименталне тачке бодовати са [**1п**].

(д) Са графика зависности $t^2(l)$ очитавају се две тачке A и B, тако да се тачка A налази између прве две, а тачка B између последње две експерименталне тачке. Координате тачака A и B су: $x_A = 30{,}0\,cm$, $y_A = (0{,}91 \pm 0{,}05)\,s^2$, $x_B = 90{,}0\,cm$, $y_B = (2{,}75 \pm 0{,}07)\,s^2$. Грешке по x-оси су исте за обе тачке и износе вредност најмањег подеока на милиметарској хартији, $\Delta x_A = \Delta x_B = 0{,}5\,cm$. У зависности од оријентације папира, могу се добити другачије вредности најмањег подеока. Коефицијент правца зависности $t^2(l)$ је: $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 3{,}07\,s^2/m$ [**1п**], а релативна грешка за коефицијент правца је $\delta k = \frac{\Delta y_A + \Delta y_B}{y_B - y_A} + \frac{\Delta x_A + \Delta x_B}{x_B - x_A} = 8{,}19\,\%$ [**1п**]. Релативна грешка рачуната занемаривањем грешака очитавања по x-оси бодује се са [**0,5п**] (уместо са [**1п**]). Убрзање Земљине теже је: $g = \frac{3 + (r/R)^2}{k \sin\alpha} = 9{,}65\,m/s^2$ [**0,5п**], док је грешка за g дата изразом: $\Delta g = g\delta k = 0{,}79\,m/s^2$ [**0,5п**], па је заокружена вредност убрзања Земљине теже са грешком: $g = (9{,}7 \pm 0{,}8)\,m/s^2$ [**1п**]. Признавати правилни поступак за другачије изабране тачке A и B.

$l[cm]$	$t^2[s^2]$	$\Delta t^2[s^2]$
20	0,59	0,03
40	1,23	0,05
60	1,82	0,06
80	2,46	0,07
100	3,06	0,07

(а) Експериментални подаци



(б) Зависност квадрата времена од пређеног пута

Слика 4 Експериментални резултати

Задатке припремили: *Немања Мадић*, *др Биљана Николић*, Физички факултет Универзитета у Београду и *др Соња Предин*, Институт за физику у Београду; Рецензент: *Богдан Станојевић*, Физички факултет Универзитета у Београду; Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *Проф. др Имре Гут*, Природно-математички факултет Универзитета у Новом Саду