

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД
из предмета физике

**Мали Аутономни Покретљиви
Актуатор**

Ученик

Алекса Чеперковић, 4а

Ментор

Драгица Ивковић

Београд, јун 2026.

Садржај

1 Увод	2
1.1 Мотивација.....	2
1.2 Преглед рада	2
2 Кинематика диференцијалног погона	3
2.1 Геометрија робота	3
2.2 Кретање у равни.....	3
3 Математички модел	4
3.1 Кинематика кретања	4
3.2 Интеграција пређеног пута	5
3.3 Модел мотора	6
3.3.1 Електрични и механички модел мотора	6
3.3.2 Извођење дискретног модела из механичког модела	7
3.3.3 Дискретни модел мотора	8
4 Контролни алгоритми	9
4.1 Обсервер	9
4.2 Конверзија управљачког сигнала	10
4.3 Контрола мотора.....	10
4.4 LiDAR.....	11
5 Симулације	13
5.1 Параметри модела	13
5.2 Симулација путање	14
5.2.1 Прва претпорставка	14
5.2.2 Прецизнији сензор на моторима.....	15
5.3 Симулација са LiDAR сензором	16
6 Закључак	18

1. Увод

Овај рад се бави симулацијом кретања мобилног робота са диференцијалним погоном. Циљ је развој математичког модела који омогућава праћење положаја робота и анализу његовог кретања у контролисаном симулационом окружењу. Симулација омогућава тестирање алгоритама управљања без ризика и ограничења физичког система.

1.1 Мотивација

МАПА је робот развијен у оквиру такмичења Еуробот. Пошто је у питању аутономни систем, било је неопходно развити симулатор ради тестирања алгоритама кретања пре примене на стварном роботу. Симулатор омогућава брзу проверу исправности модела, као и анализу понашања система у различитим условима.

1.2 Преглед рада

Рад је организован кроз неколико целина које обухватају моделовање, имплементацију и анализу кретања мобилног робота са диференцијалним погоном. У првом делу је описана кинематика диференцијалног погона и изведен основни модел кретања у равни. Затим је развијен дискретни математички модел који омогућава нумеричку симулацију положаја, брзине и оријентације робота.

Након тога представљени су модели мотора, као и метода за процену стања заснована на енкодерима и обсерверу. Посебна пажња посвећена је конверзији управљачког PWM сигнала у еквивалентни напон мотора.

У наставку је описан алгоритам праћења путање заснован на waypoint-има, као и метода управљања оријентацијом робота. На крају су приказане симулације кретања у различитим условима, укључујући варијацију резолуције енкодера и увођење LiDAR сензора, уз анализу добијених резултата.

2. Кинематика диференцијалног погона

2.1 Геометрија робота

Робот са диференцијалним погоном састоји се од два независно управљана погонска точка и једног пасивног точка који обезбеђује стабилност конструкције. Стање робота у равни описује се вектором положаја (x, y) и оријентацијом θ , која представља угао између локалног координатног система робота и глобалног координатног система. На слици 2.1 приказана је геометрија диференцијалног погона и однос брзина точкова.



Слика 2.1: Диференцијални погон

2.2 Кретање у равни

Кинематика диференцијалног погона заснива се на разлици угаоних и линеарних брзина левог и десног точка. Локална линеарна брзина робота и његова угаона брзина директно зависе од односа брзина точкова.

Када су брзине оба точка једнаке, резултујуће кретање је праволинијско без промене оријентације. Уколико постоји разлика у брзинама, јавља се закривљено кретање са тренутним центром ротације који се налази на одговарајућој удаљености од робота.

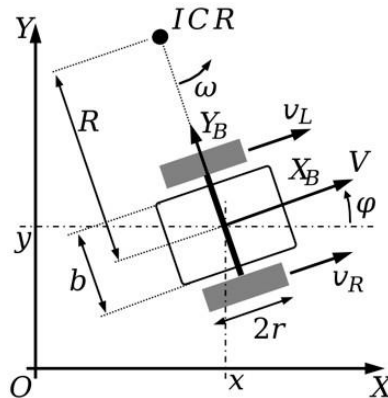
У случају једнаких брзина по интензитету, али супротног смера, центар ротације се поклапа са геометријским центром робота, што резултује ротацијом у месту без транслационог кретања.

3. Математички модел

Математички модел представља формализацију кретања робота која омогућава нумеричку симулацију његовог понашања у времену. У раду се користи дискретна апроксимација континуалног кретања уз фиксни временски корак Δt .

3.1 Кинематика кретања

Геометријски модел диференцијалног погона дефинисан је растојањем између тачкова d , као и линеарним брзинама левог и десног точка v_L и v_R . На основу ових величина одређују се линеарна и угаона брзина робота. На слици 3.1 приказано је одређивање позиције робота са диференцијалним погоном.



Слика 3.1: Положај робота са диференцијалним погоном

Линеарна и угаона брзина дефинишу се као:

$$v = \frac{v_L + v_R}{2}, \quad \omega = \frac{v_R - v_L}{d} \quad (3.1)$$

Линеарна брзина представља просечну компоненту кретања оба точка, док угаона брзина произилази из њихове разлике и описује промену оријентације робота.

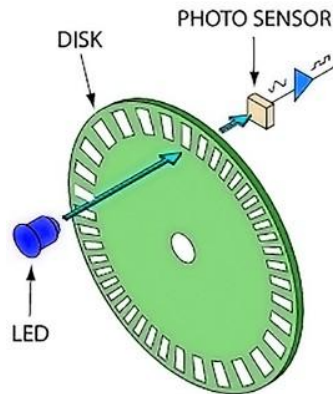
Промена положаја и оријентације у времену може се описати дискретним моделом који апроксимира континуално кретање. Стање робота у тренутку $k + 1$ добија се из стања у тренутку k :

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ \theta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\theta_k) & 0 \\ \sin(\theta_k) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_k \Delta t \\ \omega_k \Delta t \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Овај модел представља дискретни опис кретања у равни и користи се за нумеричку симулацију еволуције положаја и оријентације робота.

3.2 Интеграција пређеног пута

Енкодер представља сензор који претвара ротацију точка у серију електричних импулса. Свака промена угла точка генерише одређен број импулса, при чему укупан број импулса омогућава процену пређеног угла и дистанце. У овом систему користи се енкодер са фиксном резолуцијом, где један импулс одговара одређеном линеарном померају точка. На слици 3.2 приказан је принцип рада енкодера.



Слика 3.2: Енкодер на погонском точку

Пређени пут сваког точка користи се за процену кретања робота на основу читавања енкодера. У дискретном моделу, пређена дистанца се добија интеграцијом брзине у времену.

Резолуција енкодера дефинише се као:

$$res = \frac{2\pi r}{N} \quad (3.3)$$

где је:

- r полупречник точка,
- N број импулса енкодера по једној пуној ротацији.

На основу измерених брзина точкова, пређена дистанца се ажурира у сваком временском кораку као:

$$d_L \leftarrow d_L + v_L \Delta t, \quad d_R \leftarrow d_R + v_R \Delta t \quad (3.4)$$

Ова апроксимација представља нумеричку интеграцију кретања у дискретном времену и користи се за процену пређеног пута левог и десног точка.

3.3 Модел мотора

Модел мотора описује везу између управљачког напона и постигнуте угаоне брзине точка. У оквиру овог рада мотор се апроксимира као динамички систем првог реда, при чему постоји пропорционална зависност између улазног сигнала и стационарне брзине, уз присутну инерцију система.

Коефицијенти K_L и K_R представљају појачање мотора, односно однос између примењеног напона и резултујуће брзине у стационарном режиму. Параметри C_L и C_R описују инерцијалност система, односно брзину прелаза између стања брзине.

3.3.1 Електрични и механички модел мотора

Понашање DC мотора може се описати спрегом електричног и механичког дела система. У електричном делу важи напонска једначина:

$$V = E + IR \quad (3.5)$$

где је V улазни напон, E индукована контраелектромоторна сила (back EMF), I струја намотаја, а R унутрашњи отпор мотора.

Против-електромоторна сила је пропорционална угаоној брзини осовине:

$$E = k_e \omega \quad (3.6)$$

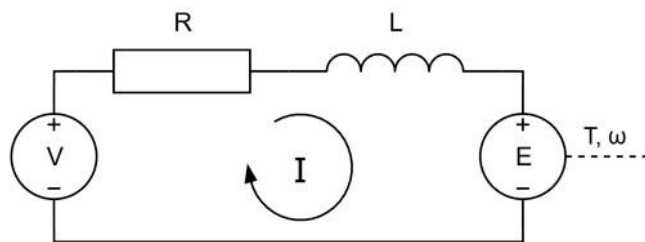
где је k_e константа мотора, а ω угаона брзина.

У механичком делу важи релација између момента и струје:

$$T = k_m I \quad (3.7)$$

где је T момент на осовини мотора, а k_m константа момента.

Ове једначине описују директну спрегу електричне и механичке динамике мотора и представљају физичку основу поједностављеног модела који се користи у симулацији. На слици 3.3 приказана је шема физичког модела DC мотора.



Слика 3.3: Физички модел DC мотора и пренос енергије

3.3.2 Извођење дискретног модела из механичког модела

Управљачки напон мотора се уводи као улазни сигнал:

$$u = V \quad (3.8)$$

где је u управљачки напон који се добија из PWM сигнала као:

$$u = V_{bat} \cdot c \quad (3.9)$$

где је $c \in [-1,1]$ нормализована управљачка величина. Полазни електрични и механички односи DC мотора су:

$$u = E + IR, \quad E = k_e \omega, \quad T = k_m I \quad (3.10)$$

Супституцијом електромоторне силе:

$$u = k_e \omega + IR \quad (3.11)$$

одакле следи струја:

$$I = \frac{u - k_e \omega}{R} \quad (3.12)$$

Момент мотора:

$$T = k_m I = \frac{k_m}{R} (u - k_e \omega) \quad (3.13)$$

Динамика ротације:

$$A \frac{d\omega}{dt} + S\omega = T \quad (3.14)$$

Убацивањем момента добија се:

$$A \frac{d\omega}{dt} + S\omega = \frac{k_m}{R} (u - k_e \omega) \quad (3.15)$$

Сређивањем:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_m}{AR} u - \left(\frac{S}{A} + \frac{k_m k_e}{AR} \right) \omega \quad (3.16)$$

Дефинишу се константе:

$$a = \frac{k_m}{AR}, \quad b = \frac{S}{A} + \frac{k_m k_e}{AR} \quad (3.17)$$

Добија се систем првог реда:

$$\frac{d\omega}{dt} = a u - b \omega \quad (3.18)$$

3.3.3 Дискретни модел мотора

Дискретизацијом континуалног модела мотора добијају се параметри дискретног система:

$$a_L = (1 - C_L) K_L, \quad a_R = (1 - C_R) K_R \quad (3.19)$$

$$b_L = \frac{1}{K_L}, \quad b_R = \frac{1}{K_R} \quad (3.20)$$

Коефицијенти K_L и K_R одређују однос између улазног напона и постигнуте брзине мотора, док параметри C_L и C_R описују инертност система, односно колико брзо мотор достиже задату брзину.

На основу ових односа, динамика брзине точкова се описује дискретним ажурирањем:

$$v_L \leftarrow v_L + a_L (u_L - b_L v_L) \quad (3.21)$$

$$v_R \leftarrow v_R + a_R (u_R - b_R v_R) \quad (3.22)$$

Овај модел омогућава стабилну нумеричку симулацију одзива мотора на промене управљачког сигнала у дискретном времену.

4. Контролни алгоритми

Путања је дефинисана као уређен низ waypoint тачака:

$$W = [(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2) \quad \cdots \quad (x_n, y_n)] \quad (4.1)$$

Током кретања робот посматра тренутну циљну тачку и покушава да минимизује угаону грешку у односу на њу.

$$u = V_{bat} \cdot c \quad (4.2)$$

где је $c \in [-1, 1]$ нормализована управљачка величина. Полазни електрични и механички односи DC мотора су:

$$\theta_d = \text{atan2}(y_t - y, x_t - x) \quad (4.3)$$

МАПА током извршавања путање покушава да одржи максималну брзину и да се стално креће према следећој тачки. Самим тиме рачуна разлику између циљаног и тренутног угла.

$$\Delta\theta = \theta_d - \theta_{МАПА} \quad (4.4)$$

Грешка оријентације се нормализује:

$$\Delta\theta = \begin{cases} \Delta\theta - 2\pi, & \Delta\theta > \pi \\ \Delta\theta + 2\pi, & \Delta\theta < -\pi \end{cases} \quad (4.5)$$

4.1 Обсервер

Због неизбежних разлика између физичког система и математичког модела долази до постепеног одступања стања у симулацији. Ово одступање настаје услед апроксимација у моделу мотора, дискретизације и непредвидивих фактора као што је неравна подлога.

Да би се спречило акумулирање грешке користи се корективни члан заснован на мерењу енкодера. Идеја је да се модел периодично “везује” за измерено стање система кроз разлику између измереног и предиктованог пређеног пута. Пређени пут из енкодера се рачуна као:

$$d^{enc} = enc \cdot res \quad (4.5)$$

где је res резолуција енкодера, односно пређени пут по импулсу.
Грешка модела је:

$$e = d^{enc} - d \quad (4.6)$$

Ова грешка се користи као повратна спрега која коригује управљачки сигнал:

$$u_L \leftarrow u_L + K(enc_L \cdot res - d_L) \quad (4.7)$$

$$u_R \leftarrow u_R + K(enc_R \cdot res - d_R) \quad (4.8)$$

Константа K одређује јачину корекције. Мала вредност доводи до спорог исправљања одступања, док превелика вредност може унети осцилације у систем. Овај механизам представља једноставан облик позиционог обзервера који стабилизује модел током дужег рада.

4.2 Конверзија управљачког сигнала

Управљачки сигнал се задаје у облику PWM сигнала које се преводе у напон мотора. Ова конверзија је неопходна јер се физички систем управља напонам, а не директно PWM сигналом.

$$u_L = u_{bat} \cdot \frac{pwm_L + pwm_L^{prev}}{2 \cdot 255}, \quad u_R = u_{bat} \cdot \frac{pwm_R + pwm_R^{prev}}{2 \cdot 255} \quad (4.9)$$

С обзиром да није могуће тренутно променити PWM сигнал, правимо претпоставку да је потребно два циклуса како би се постигао напон. Самим тиме за тренутни сигнал узимамо просек претходног и садашњег.

4.3 Контрола мотора

На основу угаоне грешке формира се разлика брзина тачкова:

$$\Delta v = -K_\theta \Delta \theta \cdot d \quad (4.10)$$

где је:

- K_θ коефицијент контролера,
- d растојање између тачкова.

У случају позитивне вредности Δv леви мотор ради максималном брзином, док се PWM десног мотора рачуна као:

$$pwm_R = 255 - \frac{\Delta v \cdot 255}{K_R \cdot u_{bat}} \quad (4.11)$$

При негативној вредности Δv десни мотор ради максималном брзином, а PWM левог мотора постаје:

$$pwm_L = 255 + \frac{\Delta v \cdot 255}{K_L \cdot u_{bat}} \quad (4.12)$$

PWM сигнали су ограничени на интервал:

$$-255 \leq pwm \leq 255 \quad (4.13)$$

У формулама се користи апсолутна вредност а знак само диктира смер окретања. Оваква структура управљања омогућава роботу да мења оријентацију разликом брзина точкова и да се непрекидно усмерава ка следећем *waypoint*-у.

4.4 LiDAR

Након развоја основног система аутономног кретања, робот је проширен могућношћу избегавања препрека помоћу LiDAR сензора удаљености.

LiDAR сензор емитује ласерски зрак и мери дистанцу до препреке на основу времена потребног да се рефлектовани сигнал врати до сензора.

Оријентација LiDAR сензора дефинисана је углом θ_{lidar} у односу на локални координатни систем робота. Укупан угао под којим се врши мерење добија се као:

$$\theta = \theta_{MAPA} + \theta_{lidar} \quad (4.14)$$

где је θ тренутна оријентација робота.

У симулацији се уместо мерења времена директно рачуна геометријски пресек ласерског зрака са објектима у окружењу.

За сваку итерацију симулације ажурирају се положај и оријентација робота, након чега се одређује смер ласерског зрака. Објекти у окружењу моделовани су као четвороуглови чије се ивице посматрају као засебни линијски сегменти. Правац ласерског зрака описује се вектором:

$$\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta) \quad (4.15)$$

Положај тачака на зраку описан је параметарском једначином:

$$(x, y) + t(v_x, v_y) \quad (4.16)$$

где параметар t представља удаљеност дуж зрака.

За сваки линијски сегмент рачуна се пресек са ласерским зраком. Од свих пресека који задовољавају услов $t > 0$, бира се најмања вредност t_{min} , која представља прву препреку у правцу зрака.

Детектована тачка добија се као:

$$(x + t_{min} \cdot v_x, y + t_{min} \cdot v_y) \quad (4.17)$$

Та позиција се користи искључиво ради визуелизације детекције препреке у симулацији.

Пошто је кретање робота организовано тако да се робот у већини случајева креће ка центру терена, избегавање препрека реализује се скретањем у смеру центра терена. Интензитет избегавања зависи од удаљености препреке и обрнуто је пропорционалан измереној дистанци.

Кориговани циљни угао ажурира се према релацији:

$$\theta_{set}(k+1) = \theta_{set}(k) + \Delta t \left(F_{avoid} + K_r (\theta_{target} - \theta_{set}(k)) \right) \quad (4.18)$$

где је:

- F_{avoid} корективни члан добијен на основу LiDAR мерења,
- K_r коефицијент враћања на оригиналну путању,
- θ_{target} оријентација задата алгоритмом праћења путање,
- θ_{set} коригована оријентација која се задаје контролном систему.

Да би се избегле превелике корекције при веома малим растојањима до препреке, вредност F_{avoid} ограничена је максималном дозвољеном вредношћу.

5. Симулације

5.1 Параметри модела

Параметри модела укључују коефицијенте система, временски корак и геометрију робота.

У симулацији су коришћени следећи параметри:

Параметар	Вредност
Δt	0.01s
U_{bat}	6.0V
K_{obs}	5.0
K_{θ}	75.0
K_L	$\frac{53.8 \cdot res}{u_{bat}}$
K_R	$\frac{53.8 \cdot res}{u_{bat}}$
C_L	0.95
C_R	0.95
N	40
d	100.0 mm
r	66.4 mm

Табела 5.1: Параметри система

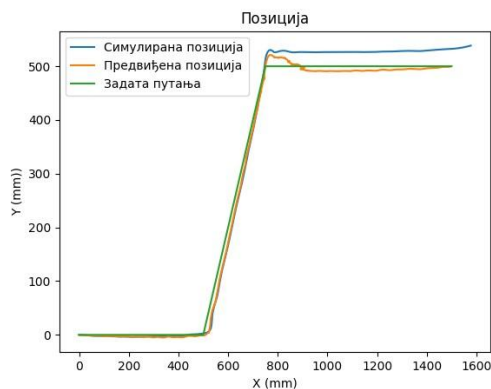
Временски корак Δt представља период ажурирања симулације. У симулацији се користи константни напон батерије, јер се напон неће значајно променити током рада робота.

5.2 Симулација путање

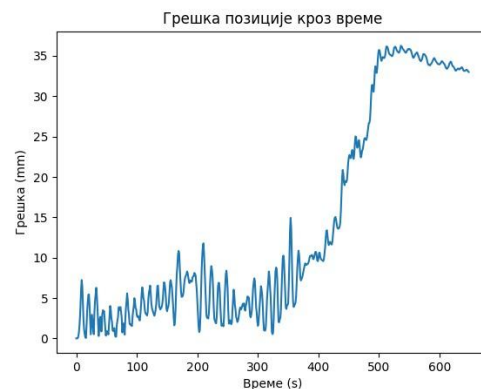
5.2.1 Прва претпорставка

$$W = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 750 & 500 \\ 1500 & 500 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

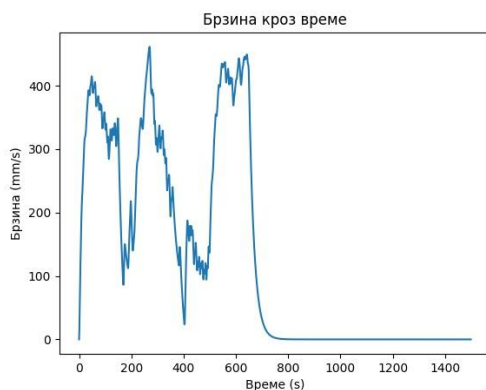
Ова симулација показује да тренутни алгоритам има минималну грешку у правим линијама, али губи прецизност при скретању. Током симулације грешка расте сразмерно са бројем скретања, док иницијална промена оријентације није утицала на прецизност. Долазимо до закључка да алгоритам може да се унапреди кад би се путања поделила на ротације у месту и праве путање. Претпоставка је да до грешке долази због осетљивости редоследа корака левог и десног мотора при скретању. Уколико је то случај, повећање броја импулса по обртају точка би смањило грешку.



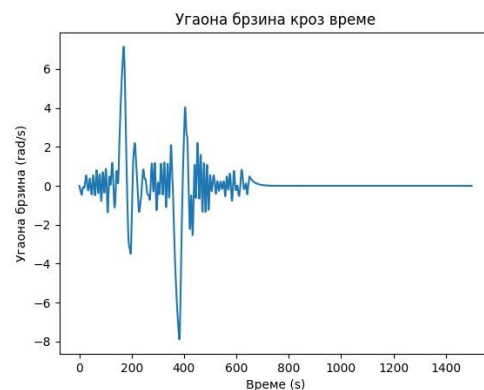
Слика 5.1: Позиција робота



Слика 5.2: Грешка



Слика 5.3: Брзина



Слика 5.4: Угаона брзина

5.2.2 Прецизнији сензор на моторима

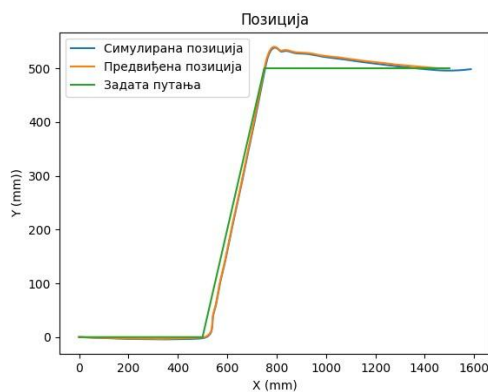
$$N = 400, \quad W = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 750 & 500 \\ 1500 & 500 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Посматрањем грешке положаја у овој симулацији уочава се да је максимална грешка мања и да се грешка током праволинијске путање смањује. Закључак је да алгоритам функционише, али да га број импулса енкодера ограничава прецизност система.

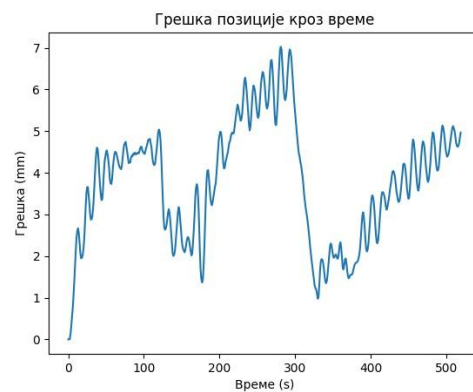
Поређењем графикана 5.3 и 5.7 може се уочити да је промена брзине на другом графикону значајно глађа. Континуалнија промена брзине смањује нагла убрзања и осцилације система.

Такође, поређењем графикана 5.4 и 5.8 примећује се да је корекција угла бржа, уз мањи број промена смера скретања. Нагле промене смера у реалном систему могу изазвати проклизавање тачкова и додатно одступање положаја робота.

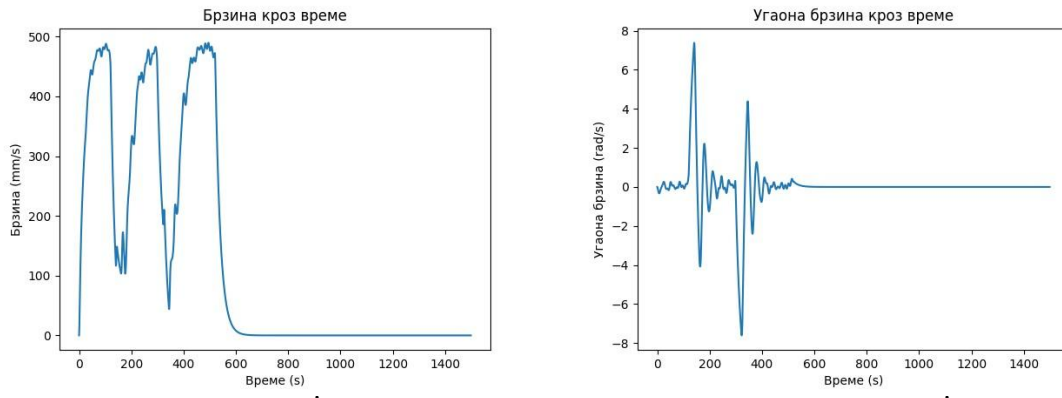
Закључак је да повећање резолуције енкодера доводи до стабилнијег и прецизнијег кретања робота.



Слика 5.5: Позиција робота



Слика 5.6: Грешка



5.2.3 Симулација са LiDAR сензором

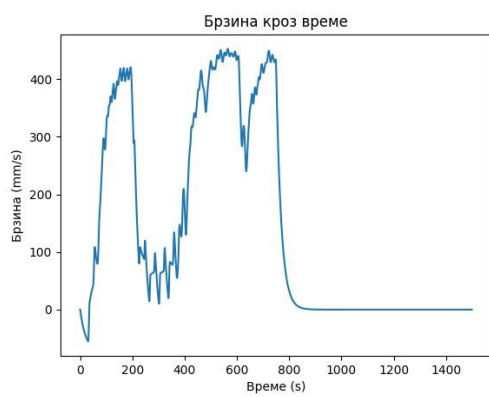
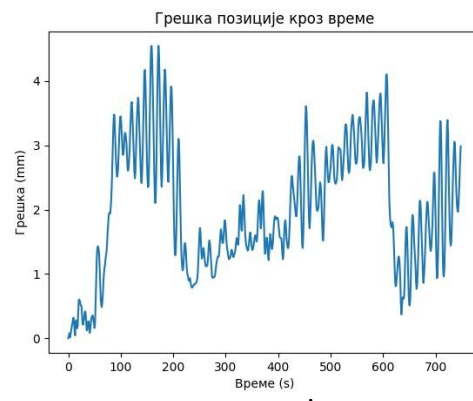
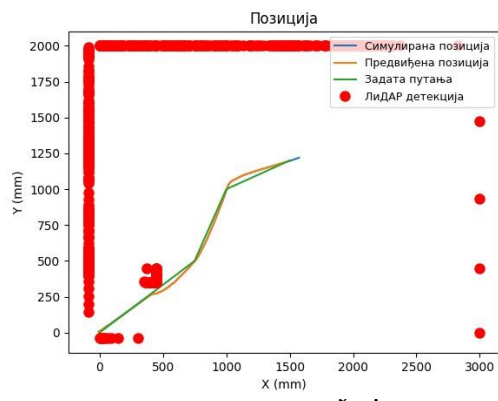
$$K_r = -5, \quad N = 400, \quad W = \begin{bmatrix} 750 & 500 \\ 1000 & 1000 \\ 1500 & 1200 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Може се уочити на графикону 5.9 да робот успешно избегава препреку моделовану правоугаоником чији се центар налази на координатама (400, 400), при чему се након завршеног избегавања враћа на задату путању.

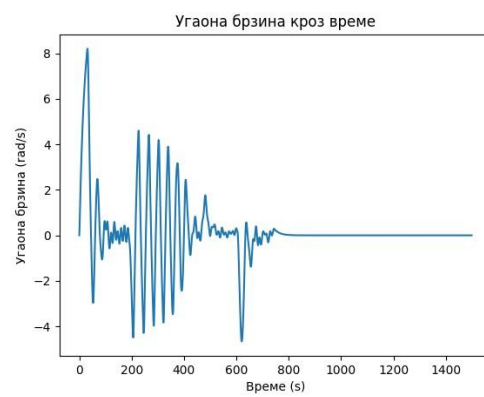
На графикону 5.12 уочава се осцилационо понашање угаоне брзине током фазе избегавања препреке. Посматрањем графика 5.11 у истом временском интервалу примећују се краткотрајне осцилације линеарне брзине, што у реалном систему може довести до привременог губитка контакта предњег дела робота са подлогом услед смањене динамичке стабилности.

Проблем се може адресирати како на хардверском, тако и на софтверском нивоу. Са хардверске стране, померање центра масе ка предњем делу робота и његово спуштање ближе подлози доприноси стабилности система. Са софтверске стране, прецизна калибрација параметара K_r и F_{avoid} је кључна за смањење осцилација и стабилизацију управљања.

Калибрација се у пракси спроводи експериментално на реалном систему. У симулацији је процена динамичке нестабилности ограничена и захтевна, компаративно значајно је лакше тестирати реални систем.



Слика 5.11: Брзина



Слика 5.12: Угаона брзина

6. Закључак

У раду је развијен и имплементиран модел мобилног робота са диференцијалним погоном, који омогућава симулацију кретања у равни и анализу алгоритама управљања.

Дискретни кинематички и динамички модели омогућили су праћење положаја, брзине и оријентације робота, док је примена енкодера и обсерверског приступа омогућила процену стања система у условима ограничене доступности мерења.

Резултати симулација показују да резолуција енкодера значајно утиче на тачност одометрије и стабилност праћења путање. Повећање броја импулса по обртају доводи до смањења грешке положаја и глађег управљачког одзива.

Увођење LiDAR сензора омогућило је реактивно избегавање препрека у реалном времену, али је истовремено довело до локалних одступања од задате путање и појаве осцилаторног понашања у угаоној и линеарној брзини. Ови ефекти су последица компромиса између праћења путање и реакције на сметње.

Симулациони резултати указују да се стабилност и прецизност система могу даље унапредити комбинацијом побољшане резолуције мерења, fine калибрације управљачких параметара и оптимизације механичке стабилности платформе.