

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД ИЗ ФИЗИКЕ

Казимиров ефекат – сила ни из чега

Ученик

Андреј ДРОВЊАКОВИЋ,
IVд

Ментори

др Дејан ЂОКИЋ,
др Владан ПАВЛОВИЋ

Београд, 28. мај 2026.

Садржај

1	Увод	1
1.1	Историјски преглед	1
1.2	Светлост као хармонијски осцилатор	2
2	Решавање стандардног система	6
2.1	Електромагнетна интерпретација Казимирове интеракције . . .	6
2.2	Микроскопска интерпретација Казимирове интеракције	9
3	Уопштење на ненулту температуру	13
3.1	Извођење слободне енергије	13
3.2	Асимптотско понашање на ниским температурама	19
3.3	Асимптотско понашање на високим температурама	21
3.4	Нумерички прорачуни	23
4	Експериментална потврда Казимировог ефекта	27
4.1	Мерење Казимирове силе	27
4.2	Апроксимација блиских површина	28
5	Додатак	30
5.1	Ојлер-Маклоренова формула	30
	Литература	32

1

Увод

1.1 Историјски преглед

Савремено разумевање сила изазваних флуктуацијама, које кулминира у Казимир-Лифшицевој теорији, настало је постепеним уједињавањем молекуларних, електромагнетних и квантних концепата. Ране теорије кохезије започеле су радом Јоханеса Дидерика ван дер Валса (1873), који је феноменолошки увео међумолекуларну привлачност кроз своју једначину стања. Иако успешан у опису реалних гасова, овај приступ није пружао микроскопско објашњење порекла кохезионих сила.

Дубље разумевање постало је могуће развојем класичне електродинимике. Максвелова формулација електромагнетне теорије (1864–1873), праћена Херцовом експерименталном потврдом (1888), установила је да је светлост електромагнетни талас. Надовезујући се на овај оквир, Лебедев (1894) је предложио да молекуларне силе могу настати услед електромагнетних интеракција између осцилујућих наелектрисања, сугеришући да је кохезија фундаментално повезана са радијационим процесима. Ова идеја је наговестила касније разумевање сила изазваних флуктуацијама, иако још увек није могла бити квантитативно формулисана.

Појава квантне механике обезбедила је неопходне алате за такав опис. Лондон (1930) је показао да привлачне силе између неутралних атома потичу од квантних флуктуација њихових расподела наелектрисања, што доводи до дисперзионе интеракције облика $1/r^6$. Ово је представљало прво микроскопско објашњење ван дер Валсових сила, касније проширено радовима Дебаја и Кезома како би се укључили термални и оријентациони ефекти. Међутим, ове теорије су се ослањале на парну адитивност и занемаривале су ретардацију.

Ефекте ретардације увели су Казимир и Полдер (1948), који су показали да коначна брзина светлости мења интеракцију на великим растојањима, што доводи до зависности $1/r^7$. Исте године, Казимир је разматрао интеракцију

између две савршено проводне плоче и показао да она настаје услед промене нулте енергије електромагнетног поља. Наметањем граничних услова међају се дозвољени вакуумски модови, што доводи до нето силе услед неравнотеже електромагнетних флуктуација унутар и изван шупљине. Ова интерпретација је установила Казимиров ефекат као директну манифестацију вакуумских флуктуација.

Упркос концептуалној елеганцији, оригинална Казимирова формулација била је ограничена на идеализоване проводнике. Значајно уопштење постигао је Лифшиц (1954), који је развио теорију дисперзионих сила између реалних диелектричних тела. Уместо директног сабирања енергија нулте тачке, Лифшиц је израчунавао средњу вредност Максвеловог тензора напона, укључујући својства материјала кроз фреквентно зависну диелектричну функцију $\varepsilon(\omega)$. Користећи теорему флуктуација-дисипација, повезао је флуктуације електромагнетног поља са одзивом средине, добијајући формулацију важећу на коначним температурама и за произвољне диелектричне материјале. Добијени израз садржи суму по дискретним Мацубариним фреквенцијама и своди се на Казимиров резултат у граници савршених проводника.

Теорију су даље проширили Цалошински, Лифшиц и Питајевски (1961), који су дали потпун квантоелектродинамички третман ван дер Валсових сила у континуалним срединама. Њихов рад је показао да су ове интеракције суштински неадитивне и да могу испољавати нетривијално понашање, укључујући и одбијање под погодним диелектричним условима.

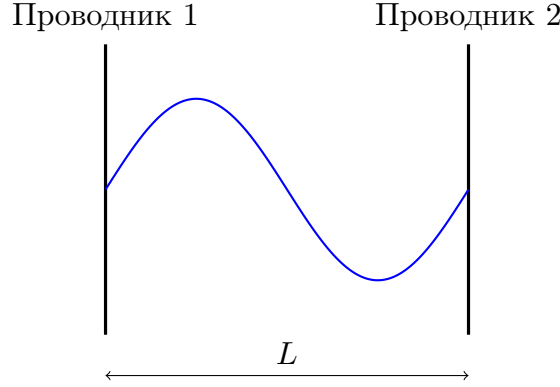
На тај начин, Казимир-Лифшицева теорија обједињује широк спектар појава — од атомских дисперзионих сила до макроскопских интеракција између тела — унутар јединственог оквира. Све такве силе могу се разумети као последица флуктуација електромагнетног поља, обликованих геометријом, својствима материјала и температуром. Ова перспектива представља кулминацију дугог развоја, који је концепт кохезије трансформисао из феноменолошког описа у фундаменталну последицу квантне и статистичке теорије поља.

1.2 Светлост као хармонијски осцилатор

Започињемо постављањем две савршено проводне плоче, свака површине S , паралелно једну другој на растојању L , при чему важи $L \ll \sqrt{S}$. Циљ нам је да одредимо дозвољена стања унутар шупљине. Наметањем Дирихлеових граничних услова добијамо решења у облику стојећих таласа:

$$E_x = E_0 \sin kz \sin \omega t, \quad (1.1)$$

где важи



Слика 1.1. Горе описани систем

$$\sin kL = 0. \quad (1.2)$$

B -поље добијамо решавањем последње Максвелове једначине у вакууму:

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad (1.3)$$

одакле следи:

$$B_y = B_0 \cos kz \cos \omega t, \quad (1.4)$$

при чему је

$$B_0 = E_0/c. \quad (1.5)$$

Сада можемо израчунати густину енергије поља унутар шупљине:

$$u(z, t) = \left(\frac{1}{2\mu_0} B^2(z, t) + \frac{\epsilon_0}{2} E^2(z, t) \right). \quad (1.6)$$

Уврштавањем и интеграцијом добијамо:

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\epsilon_0 E_0^2 \sin^2 kz \sin^2 \omega t + \frac{1}{\mu_0} B_0^2 \cos^2 kz \cos^2 \omega t \right) S dz. \quad (1.7)$$

Израчунавање овог интеграла је једноставно и даје:

$$U(t) = \frac{V}{4} \left(\epsilon_0 E_0^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{\mu_0} B_0^2 \cos^2 \omega t \right). \quad (1.8)$$

Константе можемо апсорбовати увођењем две нове координате:

$$q(t) = \left(\frac{\epsilon_0 V}{2\omega^2} \right)^{1/2} E_0 \sin \omega t, \quad (1.9)$$

$$p(t) = \left(\frac{V}{2\mu_0} \right)^{1/2} B_0 \cos \omega t. \quad (1.10)$$

Примећујемо да важи

$$p = \dot{q}, \quad (1.11)$$

и

$$\dot{p} = -\omega^2 q. \quad (1.12)$$

Поновним записивањем добијеног израза за унутрашњу енергију, аналогија са класичним хармонијским осцилатором постаје очигледна:

$$U = \frac{1}{2}(p^2(t) + \omega^2 q^2(t)). \quad (1.13)$$

при чему важи

$$q(t) = \sqrt{m} x(t), \quad (1.14)$$

и

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} p_x(t). \quad (1.15)$$

Вођени енергетским нивоима стандардног квантног хармонијског осцилатора, записујемо:

$$E = \omega \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.16)$$

где n тумачимо као број фотона унутар шупљине са одређеном фреквенцијом ω .

Наизглед смо дошли до контрадикције, јер смо добили стање које не садржи фотоне, а ипак поседује ненулту енергију. Проблем у нашем моделу постаје још дубљи када приметимо да две плоче, сабирањем доприноса свих фреквенција

$$\omega_m = \frac{m\pi c}{L}, \quad (1.17)$$

наизглед стварају бесконачну енергију између себе.

Разрешење овог проблема, које ће бити главни фокус наредног поглавља, лежи у чињеници да је и сам простор између две плоче већ поседовао бесконачну енергију.¹

¹Ова претпоставка доводи до прилично забрињавајућих последица у вези са ширењем универзума. Чак и ако ренормализујемо енергију вакуума на нулу — пошто смо слободни да Хамилтонијану додамо константу и меримо само разлике у енергији — проблем не нестаје. Према Општој теорији релативности, густина енергије закривљује простор-време, па би привидно бесконачна густина енергије вакуума морала имати драматичне последице. Нажалост, ово представља једно од нерешених питања на раскрсници квантне механике и опште релативности.

2

Решавање стандардног система

2.1 Електромагнетна интерпретација Казими-рове интеракције

Надовежимо се сада на систем из претходног поглавља. Настављамо записивањем енергије поља унутар шупљине:

$$U_f = \frac{1}{2}c\hbar \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \quad (2.1)$$

Овде користимо $k_x, k_y = \frac{m_{x,y}\pi}{l}$, што формално одговара постављању фиктивних проводних плоча на отворене стране шупљине, након чега узимамо гранични прелаз $l \rightarrow \infty$.¹

Претварањем прве две суме у интеграле добијамо:

$$U_f = \frac{1}{2}c\hbar \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \sum_{TE, TM} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \sum_{n=0}^\infty \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}. \quad (2.2)$$

Са друге стране, унутрашња енергија вакуума без плоча била би:

$$U_0 = \frac{l^2 L c \hbar}{4\pi^2} \sum_{TE, TM} \int_0^\infty dk_\perp \int_0^\infty dk_z k_\perp \sqrt{k_\perp^2 + k_z^2}. \quad (2.3)$$

¹Ово може изазвати одређену забринутост код читаоца који се први пут сусреће са оваквим поступком. Наиме, ограничавањем на стојеће таласе уместо путујућих, касније интегрирамо по $(0, \infty)$ уместо по $(-\infty, \infty)$, па изгледа као да смо изгубили половину стања. Међутим, након увођења интеграције по k_x и k_y , густина стања за стојеће таласе испоставља се двоструко већом, што тачно компензује проблематични фактор $\frac{1}{2}$. Стога, увођење фиктивних граница ни на који начин не мења физику система.

Овде TE и TM представљају два електромагнетна мода. При њиховом пребројавању морамо бити опрезни, пошто TE мод изостаје² у присуству шупљине.

Након смене

$$x = \frac{k_{\perp} L}{\pi}, \quad (2.4)$$

и множења свих модова фактором 2, осим $n = 0$ мода, који означавамо са $\sum_{(0)1}$, добијамо:

$$U_f = \frac{c\hbar l^2 \pi^2}{4L^3} \int_0^\infty dx \sum_{n=(0)1}^\infty x \sqrt{x^2 + n^2}, \quad (2.5)$$

и

$$U_0 = \frac{l^2 c \hbar \pi^2}{2L^3} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dn x \sqrt{x^2 + n^2}. \quad (2.6)$$

Уводећи нову смену

$$w = x^2 + n^2, \quad (2.7)$$

уз пажљиво постављање граница интеграције, добијамо:

$$\Delta U = \frac{c\hbar l^2 \pi^2}{4L^3} \left(\sum_{n=(0)1}^\infty f(n) - \int_0^\infty f(n) dn \right), \quad (2.8)$$

где је

$$f(n) = \int_{n^2}^\infty \sqrt{w} dw. \quad (2.9)$$

Очигледно је да овај интеграл дивергира, па бисмо, уколико бисмо сада директно применили математичке резултате из Додатка 1, добили наизглед бесконачан резултат. Због тога ћемо регуларизовати функцију $f(n)$, што значи да ћемо језгро интеграла помножити функцијом која је практично једнака 1 за довољно мале вредности w , док тежи нули за велике вредности w . Као регулаторску функцију бирамо

$$g(w) = e^{-\eta w^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.10)$$

како бисмо поједноставили коначан интеграл, при чему ћемо узети лимес $\eta \rightarrow 0^+$ након израчунавања разлике.

²Третман ТЕ нулте моде код реалних проводника представља суптилно питање које зависи од избора модела проводности.

$$F(n) = \int_{n^2}^{\infty} \sqrt{w} e^{-\eta w^{3/2}} dw = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\eta} e^{-\eta w^{3/2}} \Big|_{n^2}^{\infty} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\eta} e^{-\eta n^3}. \quad (2.11)$$

Сада, користећи резултате из Додатка 1, и водећи рачуна о додатном члану $\frac{1}{2}F(0)$ који потиче од $n = 0$ мода, добијамо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn = \frac{1}{12} F'(n) \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{720} F'''(n) \Big|_0^{\infty} + \dots \quad (2.12)$$

Захваљујући избору регулаторске функције, израчунавање извода је једноставно:

$$F'(n) = -2n^2 e^{-\eta n^3}, \quad (2.13)$$

$$F'''(n) = -4e^{-\eta n^3} + 36\eta n^3 e^{-\eta n^3} - 18\eta^2 n^6 e^{-\eta n^3}. \quad (2.14)$$

Јасно је да важи

$$F'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} F'(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F'''(n) = 0, \quad (2.15)$$

као и

$$F'''(0) = -4. \quad (2.16)$$

Такође, виши изводи ишчезавају у границама интеграције услед експоненцијалног опадања за велике вредности n , као и због водећих фактора η који се јављају код виших извода функције. Уврштавањем ових резултата у почетни израз добијамо:

$$\Delta U = \frac{c\hbar l^2 \pi^2}{4L^3} \left(-\frac{1}{720} \cdot 4 \right) = -\frac{c\hbar l^2 \pi^2}{720L^3}. \quad (2.17)$$

Постављањем $l^2 = A$ и израчунавањем промене енергије по јединици површине добијамо:

$$\boxed{\frac{\Delta U}{A} = -\frac{c\hbar \pi^2}{720L^3}}. \quad (2.18)$$

Стога је Казимирова сила по јединици површине:

$$\frac{F}{A} = -\frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{\Delta U}{A} \right), \quad (2.19)$$

$$\boxed{\frac{F}{A} = -\frac{c\hbar \pi^2}{240L^4}}. \quad (2.20)$$

2.2 Микроскопска интерпретација Казимирове интеракције

Иако се Казимиров ефекат најприродније изводи квантизацијом електромагнетног поља, интеракцији је могуће приступити и из потпуно другачије перспективе, засноване на микроскопским међумолекуларним силама.

Започињемо разматрањем два неутрална атома раздвојена растојањем r . Иако атоми немају сталне електричне диполне моменте, квантне флуктуације непрестано померају електронске расподеле наелектрисања из равнотежног положаја. У сваком тренутку атом се зато може посматрати као мали флукутирајући електрични дипол.

Да бисмо описали овакво понашање, апроксимираћемо електронски облак унутар сваког атома као осцилатор са природном фреквенцијом ω_0 . Ако координату помераја електрона означимо са z , диполни момент постаје

$$p = ez, \quad (2.21)$$

где је e наелектрисање електрона. У одсуству интеракције, Хамилтонијан два независна осцилатора има облик

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 z_1^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 z_2^2. \quad (2.22)$$

Диполи међусобно интерагују електростатички. Под претпоставком да су помераји много мањи од међусобног растојања ($z_1, z_2 \ll r$), развијамо Кулонову интеракцију до најнижег нетривијалног реда. Линеарни чланови се поништавају услед симетрије, а водећи допринос интеракције постаје

$$V = -\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 r^3} z_1 z_2. \quad (2.23)$$

Укупни Хамилтонијан сада има облик

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 z_1^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 z_2^2 - \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 r^3} z_1 z_2. \quad (2.24)$$

На први поглед, овај систем делује тешко решив, пошто су два осцилатора спрегнута. Међутим, увођењем колективних координата

$$x = z_1 + z_2, \quad y = z_1 - z_2, \quad (2.25)$$

Хамилтонијан се раздваја на два независна хармонијска осцилатора са модификованим фреквенцијама:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{e^2}{2m\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (2.26)$$

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{e^2}{2m\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (2.27)$$

Спрегнути систем се, дакле, понаша као две независне нормалне моде. Укупна енергија основног стања постаје

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_1 + \frac{1}{2}\hbar\omega_2. \quad (2.28)$$

Пошто је интеракциони члан слаб у поређењу са сопственом фреквенцијом осцилатора, развијамо квадратне корене за велика растојања. Испоставља се да се чланови првог реда тачно поништавају, тако да водећи допринос постаје

$$E_0(r) = \hbar\omega_0 - C\frac{1}{r^6}, \quad (2.29)$$

где је C позитивна константа која зависи од параметара осцилатора.

На тај начин добијамо привлачну интеракцију облика

$$V(r) \propto -\frac{1}{r^6}, \quad (2.30)$$

што је управо Лондонова дисперзиона интеракција између два неутрална атома.

Овај резултат пружа изузетно занимљиву микроскопску интерпретацију сила изазваних флуктуацијама. Иако атоми немају сталне диполне моменте, квантне флуктуације корелишу њихове тренутне расподеле наелектрисања, снижавајући укупну енергију основног стања система.

Међутим, на већим растојањима више није могуће занемарити коначну брзину простирања електромагнетне интеракције. Диполи више не реагују тренутно један на други, већ ретардациони ефекти мењају интеракцију. Потпун електродинамички третман тада мења зависност интеракције са r^{-6} на r^{-7} , чиме се добија Казимир-Полдеров режим.

Сада користимо ову микроскопску слику како бисмо добили зависност силе између две плоче од растојања између њих. Претпоставимо да су плоче сачињене од молекула бројне густине n , као и да ретардована интеракција између два молекула раздвојена растојањем r има облик

$$V(r) = -\frac{B}{r^7}, \quad (2.31)$$

где је B позитивна константа.

Једну плочу постављамо у област $z < 0$, а другу у област $z > a$. Укупна интеракциона енергија по јединици површине добија се сабирањем интеракција сваког молекула прве плоче са сваким молекулом друге плоче:

$$\frac{U}{A} = -n^2 B \int_{-\infty}^0 dz \int_a^{\infty} dz' \int d^2 \rho \frac{1}{(\rho^2 + (z' - z)^2)^{7/2}}. \quad (2.32)$$

Овде ρ представља попречно растојање између молекула, мерено паралелно плочама. Најпре рачунамо попречни интеграл:

$$\int d^2 \rho \frac{1}{(\rho^2 + h^2)^{7/2}} = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{7/2}}, \quad (2.33)$$

где је

$$h = z' - z. \quad (2.34)$$

Одатле следи

$$2\pi \int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{7/2}} = \frac{2\pi}{5h^5}. \quad (2.35)$$

Према томе,

$$\frac{U}{A} = -\frac{2\pi n^2 B}{5} \int_{-\infty}^0 dz \int_a^{\infty} dz' \frac{1}{(z' - z)^5}. \quad (2.36)$$

Дефинишимо интеграл

$$I = \int_{-\infty}^0 dz \int_a^{\infty} dz' \frac{1}{(z' - z)^5}. \quad (2.37)$$

Најпре интегралимо по z' , док је z фиксирано. Уводимо смену

$$s = z' - z, \quad ds = dz'. \quad (2.38)$$

Када је $z' = a$, добијамо $s = a - z$, док за $z' \rightarrow \infty$ важи $s \rightarrow \infty$. Стога:

$$\int_a^{\infty} \frac{dz'}{(z' - z)^5} = \int_{a-z}^{\infty} \frac{ds}{s^5}. \quad (2.39)$$

Интеграцијом добијамо

$$\int_{a-z}^{\infty} s^{-5} ds = \left[-\frac{1}{4s^4} \right]_{a-z}^{\infty} = \frac{1}{4(a-z)^4}. \quad (2.40)$$

Зато је

$$I = \int_{-\infty}^0 \frac{dz}{4(a-z)^4}. \quad (2.41)$$

Преостали интеграл рачунамо сменом

$$q = a - z, \quad dq = -dz. \quad (2.42)$$

Када $z = -\infty$, важи $q = \infty$, док за $z = 0$ добијамо $q = a$. Према томе,

$$I = \frac{1}{4} \int_{\infty}^a \frac{-dq}{q^4} = \frac{1}{4} \int_a^{\infty} q^{-4} dq. \quad (2.43)$$

Одатле следи

$$I = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{3q^3} \right]_a^{\infty} = \frac{1}{12a^3}. \quad (2.44)$$

Уврштавањем овог резултата назад у израз за енергију добијамо

$$\frac{U}{A} = -\frac{2\pi n^2 B}{5} \cdot \frac{1}{12a^3}, \quad (2.45)$$

па коначно добијамо

$$\boxed{\frac{U}{A} = -\frac{\pi n^2 B}{30a^3}}. \quad (2.46)$$

Стога је притисак

$$\boxed{P = -\frac{\pi n^2 B}{10a^4}}. \quad (2.47)$$

Овај резултат има исту зависност од растојања као и Казимиров притисак између две идеално проводне плоче на нултој температури. Микроскопски приступ, дакле, репродукује карактеристичну зависност силе a^{-4} . Ипак, не треба очекивати да се нумерички коефицијент потпуно поклапа са идеалним Казимировим резултатом, пошто овај прорачун претпоставља адитивност интеракција, док је прави Казимиров ефекат суштински колективне и електромагнетне природе.

3

Уопштење на ненулту температуру

До сада смо разматрали Казимиров ефекат између две савршено проводне, паралелне плоче на нултој температури, занемарујући термалне флуктуације. У овом поглављу уопштавамо добијени резултат укључивањем утицаја температуре на сам феномен.¹

3.1 Извођење слободне енергије

Најпре примећујемо да на ненултој температури релевантна физичка величина више није унутрашња енергија U , већ Хелмхолцова слободна енергија, дефинисана као

$$F = U - TS. \quad (3.1)$$

Да бисмо разумели зашто је то случај, израчунајмо њен диференцијал:

$$dF = dU - TdS - SdT = -PdV - SdT. \quad (3.2)$$

Одржавајући температуру константном, добијамо:

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = - \frac{1}{A} \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right)_T, \quad (3.3)$$

где a представља растојање између плоча. У случају $T = 0$ могли смо користити унутрашњу енергију, пошто је ентропија тада била идентички једнака нули.

¹Могуће је разматрати и случај реалних диелектричних материјала, али такво уопштење превазилази оквир овог рада.

У статистичкој механици слободна енергија повезана је са партиционом функцијом Z релацијом

$$F = -k_B T \ln Z. \quad (3.4)$$

Настављамо записивањем Хелмхолцове енергије по моди:

$$F_m = -k_B T \ln Z_m, \quad (3.5)$$

где је

$$Z_m = \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\omega_m\hbar}}{1 - e^{-\beta\omega_m\hbar}}. \quad (3.6)$$

Одатле следи

$$F_m = \frac{1}{2}\omega_m\hbar + k_B T \ln(1 - e^{-\beta\omega_m\hbar}). \quad (3.7)$$

Пратећи извођење из случаја $T = 0$, добијамо укупну нерегуларизовану слободну енергију по јединици површине интеграцијом по непрекидном попречном импулсу $\mathbf{k}_\perp$ и сумирањем по дискретним уздужним модовима m . Важно је нагласити да свака мода садржи и допринос енергије нулте тачке и термални логаритамски члан:

$$\frac{F(a, T)}{A} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty k_\perp dk_\perp \sum_{m=0(1)}^\infty \left[\frac{1}{2}\hbar\omega_m(k_\perp) + k_B T \ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega_m(k_\perp)}{k_B T}} \right) \right]. \quad (3.8)$$

Дозвољене фреквенције задовољавају дисперзиону релацију

$$\omega_m(k_\perp) = c\sqrt{k_\perp^2 + (m\pi/a)^2}. \quad (3.9)$$

Да бисмо издвојили физички мерљиву силу, морамо одузети слободну енергију неограниченог вакуума ван плоча:

$$\frac{F_0}{A} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty k_\perp dk_\perp \int_0^\infty dm \left[\frac{1}{2}\hbar\omega_m(k_\perp) + k_B T \ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega_m(k_\perp)}{k_B T}} \right) \right]. \quad (3.10)$$

Мерљива физичка величина је регуларизована разлика слободних енергија

$$\Delta F = F(a, T) - F_0. \quad (3.11)$$

Док је Ојлер-Маклоренова формула из Додатка 1 била погодна за регуларизацију случаја $T = 0$, овде је неопходан прелаз у комплексну раван.

Применом Абел-Планине формуле директно на разлику између суме и интеграла:

$$\sum_{m=0(1)}^{\infty} f(m) - \int_0^{\infty} f(x) dx = i \int_0^{\infty} \frac{f(iy) - f(-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy. \quad (3.12)$$

Ова формула пресликава разлику између суме и интеграла у контурни интеграл дуж осе имагинарних фреквенција. Пошто је термални логаритамски члан периодичан у комплексној равни, дуж ове осе јављају се једноставни полови.

Израчунавање резидуума ових полова доводи до дискретизације спектра у суму по имагинарним бозонским Мацубара фреквенцијама:

$$\zeta_n = \frac{2n\pi k_B T}{\hbar}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (3.13)$$

Полови потичу од нула имениоца Бозе-Ајнштајновог фактора, што условљава дискретне имагинарне фреквенције.

Да бисмо израчунали десну страну Абел-Планине формуле, уводимо функцију

$$f(z) = \frac{1}{2} \hbar \omega(z) + k_B T \ln \left(1 - e^{-\frac{\hbar \omega(z)}{k_B T}} \right), \quad (3.14)$$

где је дисперзиона релација аналитички продужена у комплексну раван:

$$\omega(z) = c \sqrt{k_{\perp}^2 + \frac{\pi^2 z^2}{a^2}}. \quad (3.15)$$

Сада морамо израчунати разлику $f(iy) - f(-iy)$ дуж имагинарне осе:

$$\omega(\pm iy) = c \sqrt{k_{\perp}^2 - \frac{\pi^2 y^2}{a^2}}. \quad (3.16)$$

Аналитичка структура ове функције открива два различита режима, раздвојена граничном вредношћу

$$y_0 = \frac{ak_{\perp}}{\pi}. \quad (3.17)$$

1. Режим реалних фреквенција ($y < \frac{ak_{\perp}}{\pi}$)

У овом случају израз под кореном остаје позитиван, па је $\omega(iy) = \omega(-iy)$ реална величина. Због тога важи

$$f(iy) - f(-iy) = 0, \quad \forall y \in \left[0, \frac{ak_{\perp}}{\pi} \right). \quad (3.18)$$

Ова област не даје никакав допринос интегралу, па се доња граница Абел-Планиног интеграла може померити до тачке гранања y_0 .

2. Режим имагинарних фреквенција ($y > \frac{ak_{\perp}}{\pi}$)

Изнад граничне вредности израз под кореном мења знак. Уводимо нову реалну променљиву u , димензије фреквенције, дефинисану условом

$$\frac{\pi^2 y^2}{a^2} - k_{\perp}^2 = \frac{u^2}{c^2} \implies \omega(\pm iy) = \pm iu. \quad (3.19)$$

Израчунавањем функције $f(z)$ на овим гранама добијамо

$$f(iy) = \frac{1}{2}i\hbar u + k_B T \ln \left(1 - e^{-i\frac{\hbar u}{k_B T}} \right), \quad (3.20)$$

$$f(-iy) = -\frac{1}{2}i\hbar u + k_B T \ln \left(1 - e^{i\frac{\hbar u}{k_B T}} \right). \quad (3.21)$$

Одузимањем ова два израза добијамо

$$f(iy) - f(-iy) = i\hbar u + k_B T \ln \left(\frac{1 - e^{-i\frac{\hbar u}{k_B T}}}{1 - e^{i\frac{\hbar u}{k_B T}}} \right). \quad (3.22)$$

Издавањем експоненцијалног фактора следи

$$\frac{1 - e^{-i\frac{\hbar u}{k_B T}}}{1 - e^{i\frac{\hbar u}{k_B T}}} = e^{i\left(\pi - \frac{\hbar u}{k_B T}\right)}. \quad (3.23)$$

Пошто је комплексни логаритам вишезначна функција, добијамо

$$\ln \left[e^{i\left(\pi - \frac{\hbar u}{k_B T}\right)} \right] = i \left(\pi - \frac{\hbar u}{k_B T} \right) + 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(u - \zeta_n), \quad (3.24)$$

где Θ означава степеничасту функцију. Уврштавањем назад добијамо

$$f(iy) - f(-iy) = i\hbar u + k_B T \left[i\pi - i\frac{\hbar u}{k_B T} + 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(u - \zeta_n) \right] \quad (3.25)$$

$$= i\pi k_B T + 2\pi i k_B T \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(u - \zeta_n). \quad (3.26)$$

Користећи се ранијим записом, добијамо компактније:

$$f(iy) - f(-iy) = 2\pi i k_B T \sum_{n=0(1)}^{\infty} \Theta(u - \zeta_n). \quad (3.27)$$

Сада враћамо овај резултат у Абел-Планин интеграл. Трансформишући координате добијамо

$$y = \frac{a}{\pi} \sqrt{k_{\perp}^2 + \frac{u^2}{c^2}}, \quad dy = \frac{au}{\pi c^2 \sqrt{k_{\perp}^2 + \frac{u^2}{c^2}}} du. \quad (3.28)$$

Уврштавањем следи

$$I_{\text{АП}} = -\frac{2ak_B T}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{u}{\sqrt{k_{\perp}^2 + \frac{u^2}{c^2}}} \frac{\sum_{n=0(1)}^{\infty} \Theta(u - \zeta_n)}{e^{2a\sqrt{k_{\perp}^2 + \frac{u^2}{c^2}}} - 1} du. \quad (3.29)$$

Да бисмо израчунали укупну промену слободне енергије по јединици површине, убацујемо овај регуларизовани израз у интеграл по попречном импулсу:

$$\frac{\Delta F}{A} = -\frac{2ak_B T}{\pi c^2} \sum_{n=0(1)}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} u}{\sqrt{k_{\perp}^2 + \frac{u^2}{c^2}}} \frac{\Theta(u - \zeta_n)}{e^{2a\sqrt{k_{\perp}^2 + \frac{u^2}{c^2}}} - 1} du dk_{\perp}. \quad (3.30)$$

Хевисајдова функција сада ограничава доњу границу фреквентног домена на дискретне Мацубарине фреквенције, па добијамо:

$$\frac{\Delta F}{A} = -\frac{2ak_B T}{\pi c^2} \sum_{n=0(1)}^{\infty} \int_{k_{\perp}=0}^{\infty} \int_{u=\zeta_n}^{\infty} \frac{k_{\perp} u}{\sqrt{k_{\perp}^2 + \frac{u^2}{c^2}}} \frac{1}{e^{2a\sqrt{k_{\perp}^2 + \frac{u^2}{c^2}}} - 1} du dk_{\perp}. \quad (3.31)$$

Пошто су границе интеграције за ове независне променљиве константне, можемо применити Фубинијеву теорему и заменити редослед интеграције ($du dk_{\perp} \rightarrow dk_{\perp} du$). На тај начин најпре интегралимо по непрекидном просторном импулсу:

$$\frac{\Delta F}{A} = -\frac{2ak_B T}{\pi c^2} \sum_{n=0(1)}^{\infty} \int_{u=\zeta_n}^{\infty} \left[\int_{k_{\perp}=0}^{\infty} \frac{k_{\perp} u}{\sqrt{k_{\perp}^2 + \frac{u^2}{c^2}}} \frac{1}{e^{2a\sqrt{k_{\perp}^2 + \frac{u^2}{c^2}}} - 1} dk_{\perp} \right] du. \quad (3.32)$$

Да бисмо израчунали унутрашњи интеграл по $k_{\perp}$, уводимо смену

$$w = \sqrt{k_{\perp}^2 + \frac{u^2}{c^2}}, \quad (3.33)$$

Њен диференцијал износи

$$dw = \frac{k_{\perp}}{\sqrt{k_{\perp}^2 + \frac{u^2}{c^2}}} dk_{\perp}. \quad (3.34)$$

Границе интеграције сада постају

$$k_{\perp} = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{u}{c}, \quad (3.35)$$

и

$$k_{\perp} \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad w \rightarrow \infty. \quad (3.36)$$

Унутрашњи интеграл тиме добија облик

$$J = u \int_{u/c}^{\infty} \frac{e^{-2aw}}{1 - e^{-2aw}} dw. \quad (3.37)$$

Примитивна функција овог интеграла је

$$J = u \left[\frac{1}{2a} \ln (1 - e^{-2aw}) \right]_{u/c}^{\infty}. \quad (3.38)$$

Израчунавањем по границама добијамо

$$J = -\frac{u}{2a} \ln (1 - e^{-2au/c}). \quad (3.39)$$

Уврштавањем овог резултата назад у главни израз следи

$$\frac{\Delta F}{A} = \frac{k_B T}{\pi c^2} \sum_{n=0(1)}^{\infty} \int_{\zeta_n}^{\infty} u \ln (1 - e^{-2au/c}) du. \quad (3.40)$$

Апсорбовањем преосталих фактора c^2 и враћањем интеграционе променљиве у погоднији просторни облик, добијамо коначан регуларизован израз за Хелмхолцову слободну енергију:

$$\boxed{\frac{\Delta F(a, T)}{A} = \frac{k_B T}{\pi} \sum_{n=0(1)}^{\infty} \int_{\zeta_n/c}^{\infty} u \ln (1 - e^{-2au}) du}. \quad (3.41)$$

Узимањем негативног парцијалног извода овог потенцијала по растојању између плоча a , добија се укупни термодинамички Казимиров притисак на произвољној температури.

3.2 Асимптотско понашање на ниским температурама

Да бисмо проверили конзистентност регуларизованог потенцијала на коначној температури, испитаћемо његово понашање у граници када температура тежи апсолутној нули ($T \rightarrow 0$). Најпре разматрамо размак $\Delta\zeta$ између две суседне Маџубара фреквенције:

$$\Delta\zeta = \zeta_{n+1} - \zeta_n = \frac{2\pi k_B T}{\hbar} \implies k_B T = \frac{\hbar \Delta\zeta}{2\pi}. \quad (3.42)$$

Уврштавањем ове релације у регуларизован израз за слободну енергију добијамо

$$\frac{\Delta F}{A} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\hbar \Delta\zeta}{2\pi} \right) \sum_{n=0(1)}^{\infty} \int_{\zeta_n/c}^{\infty} u \ln(1 - e^{-2au}) du, \quad (3.43)$$

односно

$$\frac{\Delta F}{A} = \frac{\hbar}{2\pi^2} \sum_{n=0(1)}^{\infty} \Delta\zeta \int_{\zeta_n/c}^{\infty} u \ln(1 - e^{-2au}) du. \quad (3.44)$$

У граници $T \rightarrow 0$, размак између Маџубара фреквенција прелази у диференцијал ($\Delta\zeta \rightarrow d\zeta$), док се дискретна сума по индексу n претвара у непрекидан интеграл по ζ :

$$\lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=0(1)}^{\infty} \Delta\zeta \dots = \int_0^{\infty} d\zeta \dots \quad (3.45)$$

У граници $T \rightarrow 0$ ентропијски члан ишчезава ($TS \rightarrow 0$), па се Хелмхолцова слободна енергија ΔF своди на промену унутрашње енергије ΔU . Добијамо:

$$\frac{\Delta U}{A} = \frac{\hbar}{2\pi^2} \int_{\zeta=0}^{\infty} d\zeta \int_{u=\zeta/c}^{\infty} u \ln(1 - e^{-2au}) du. \quad (3.46)$$

Овај израз описује троугаону област у фазном простору (ζ, u) , ограничену правом $\zeta = cu$. Да бисмо аналитички израчунали интеграл, примењујемо Фубинијеву теорему и мењамо редослед интеграције:

$$\frac{\Delta U}{A} = \frac{\hbar}{2\pi^2} \int_{u=0}^{\infty} \left(\int_{\zeta=0}^{cu} d\zeta \right) u \ln(1 - e^{-2au}) du. \quad (3.47)$$

Пошто унутрашњи интеграл нема експлицитну зависност од ζ , добијамо

$$\int_{\zeta=0}^{cu} d\zeta = cu. \quad (3.48)$$

Уврштавањем назад следи

$$\frac{\Delta U}{A} = \frac{\hbar c}{2\pi^2} \int_0^\infty u^2 \ln(1 - e^{-2au}) du. \quad (3.49)$$

Да бисмо израчунали преостали интеграл, развијамо логаритам у Тејлоров ред

$$\ln(1 - x) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}. \quad (3.50)$$

За $x = e^{-2au}$ добијамо

$$\ln(1 - e^{-2au}) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-2aju}}{j}. \quad (3.51)$$

Уврштавањем у интеграл следи

$$\frac{\Delta U}{A} = - \frac{\hbar c}{2\pi^2} \int_0^\infty u^2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-2aju}}{j} \right) du. \quad (3.52)$$

Заменом редоследа суме и интеграла добијамо

$$\frac{\Delta U}{A} = - \frac{\hbar c}{2\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \int_0^\infty u^2 e^{-2aju} du. \quad (3.53)$$

Примењујемо стандардни интеграл гама-функције

$$\int_0^\infty x^n e^{-kx} dx = \frac{n!}{k^{n+1}}, \quad (3.54)$$

за $n = 2$ и $k = 2aj$, одакле следи

$$\int_0^\infty u^2 e^{-2aju} du = \frac{2!}{(2aj)^3} = \frac{1}{4a^3 j^3}. \quad (3.55)$$

Уврштавањем назад добијамо

$$\frac{\Delta U}{A} = - \frac{\hbar c}{8\pi^2 a^3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4}. \quad (3.56)$$

Преостала сума представља Риманову зета-функцију у тачки 4:

$$\zeta(4) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad (3.57)$$

Зато следи

$$\frac{\Delta U}{A} = -\frac{\hbar c}{8\pi^2 a^3} \left(\frac{\pi^4}{90} \right) = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 a^3}. \quad (3.58)$$

Коначно добијамо

$$\boxed{\frac{\Delta U}{A} = -\frac{\hbar c \pi^2}{720 a^3}}. \quad (3.59)$$

Постављањем $a = L$, добијени резултат се потпуно поклапа са Казимировом енергијом по јединици површине на нултој температури.

3.3 Асимптотско понашање на високим температурама

Након што смо показали да формализам на коначној температури исправно репродукује Казимиров резултат у граници $T \rightarrow 0$, размотримо сада супротан режим веома високих температура.

Како температура расте, размак између суседних Мацубара фреквенција расте линеарно са T :

$$\Delta\zeta = \frac{2\pi k_B T}{\hbar}. \quad (3.60)$$

Због тога све ненулта Мацубара моде ($n \geq 1$) постају експоненцијално потиснуте фактором

$$e^{-2a\zeta_n/c} = e^{-\frac{4\pi a n k_B T}{\hbar c}}. \quad (3.61)$$

Стога у асимптотској граници $T \rightarrow \infty$ преживљава само члан $n = 0$. Задржавајући само овај допринос и водећи рачуна о тежинама у суми, добијамо

$$\frac{\Delta F(a, T)}{A} \sim \frac{k_B T}{2\pi} \int_0^{\infty} u \ln(1 - e^{-2au}) du. \quad (3.62)$$

Да бисмо израчунали овај интеграл, поново развијамо логаритам у ред:

$$\ln(1 - x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}. \quad (3.63)$$

За $x = e^{-2au}$ следи

$$\ln(1 - e^{-2au}) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-2aju}}{j}. \quad (3.64)$$

Уврштавањем у интеграл добијамо

$$\frac{\Delta F(a, T)}{A} = - \frac{k_B T}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \int_0^{\infty} u e^{-2aju} du. \quad (3.65)$$

Применом стандардног гама-интеграла следи

$$\int_0^{\infty} u e^{-2aju} du = \frac{1}{(2aj)^2} = \frac{1}{4a^2 j^2}. \quad (3.66)$$

Одатле добијамо

$$\frac{\Delta F(a, T)}{A} = - \frac{k_B T}{8\pi a^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^3}. \quad (3.67)$$

Препознајући преосталу суму као Риманову зета-функцију у тачки 3,

$$\zeta(3) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^3}, \quad (3.68)$$

добијамо асимптотски облик слободне енергије:

$$\boxed{\frac{\Delta F(a, T)}{A} \sim - \frac{k_B T \zeta(3)}{8\pi a^2}} \quad (T \rightarrow \infty). \quad (3.69)$$

Одговарајући Казимиров притисак добија се диференцирањем по растојању између плоча:

$$P = - \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\Delta F}{A} \right). \quad (3.70)$$

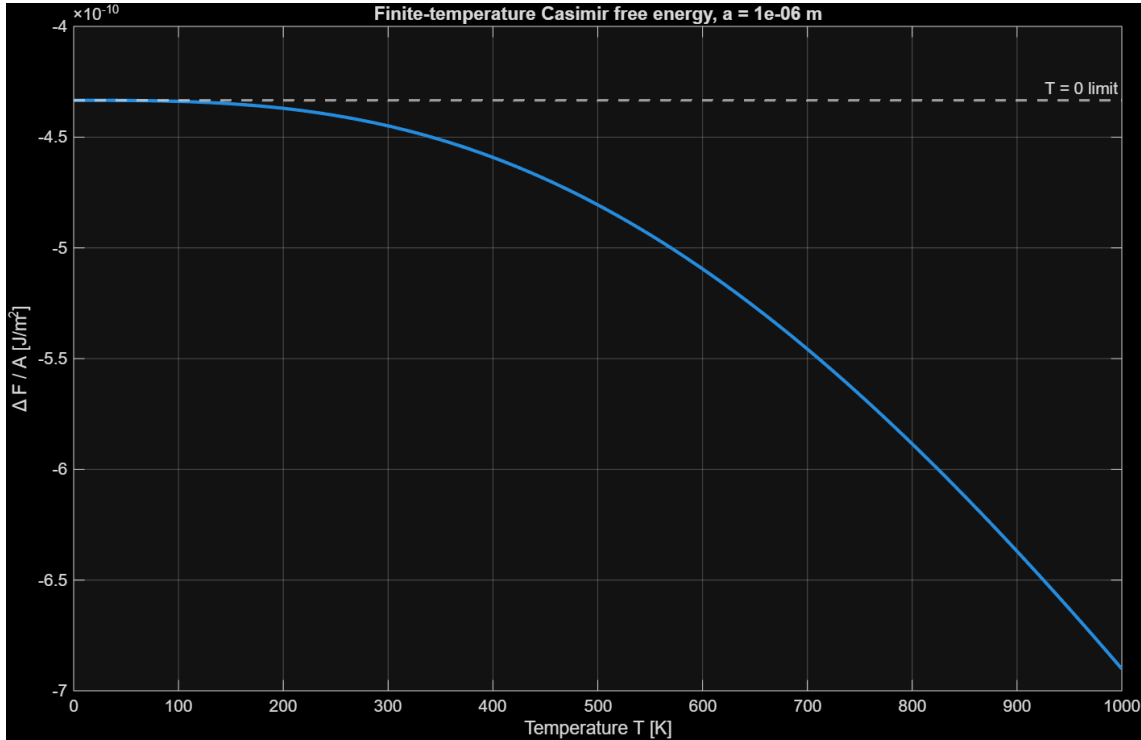
Израчунавањем извода следи

$$\boxed{P \sim - \frac{k_B T \zeta(3)}{4\pi a^3}} \quad (T \rightarrow \infty). \quad (3.71)$$

За разлику од Казимирове силе на нултој температури, која се скалира као a^{-4} и експлицитно зависи од $\hbar c$, високотемпературна граница скалира се као a^{-3} и више не зависи од Планкове константе. Ово показује да у асимптотском режиму интеракцијом доминирају класичне термалне флуктуације, а не квантне вакуумске флуктуације.

3.4 Нумерички прорачуни

Нажалост, у општем случају ненулта температуре Казимирова сила се не може израчунати у затвореном аналитичком облику, па је неопходно ослонити се на нумеричке процене. Сви графици приказани у наставку добијени су помоћу програма MATLAB.



Слика 3.1. Зависност слободне енергије од температуре

На слици 3.1 види се да је чак и на собној температури одступање од идеализованог резултата релативно мало. То показује да се у многим квалитативним разматрањима температурни ефекти могу занемарити.² Са друге стране, на вишим температурама енергија почиње значајније да одступа од резултата добијеног у апроксимацији нулта температуре.

На наредним графицима приказана је зависност силе која делује на плоче од њиховог међусобног растојања, за различите температуре. Ради поређења редова величине, на собној температури и при растојању $a = 1 \mu\text{m}$, гравитационо привлачење између плоча је занемарљиво у односу на Казимиров притисак. За две металне плоче површине $A = 1 \text{ cm}^2$ и дебљине $d = 1 \text{ mm}$,

²При разматрању реалних кохезионих интеракција, својства материјала од којих су направљене плоче имају кључну улогу.

добија се приближно

$$P_g \sim 4 \times 10^{-8} \text{ Pa}, \quad (3.72)$$

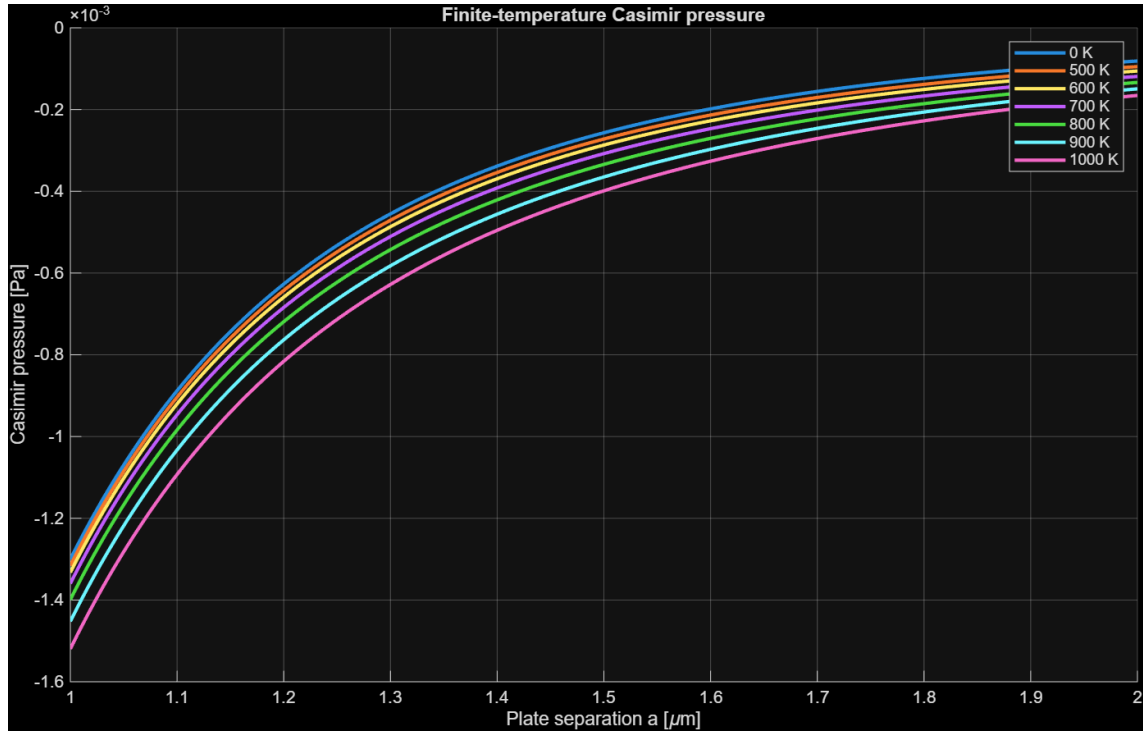
док Казимиров притисак на нултој температури износи

$$P_C = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4} \approx -1.3 \times 10^{-3} \text{ Pa}. \quad (3.73)$$

Дакле, чак и на микрометарским растојањима Казимиров притисак је приближно

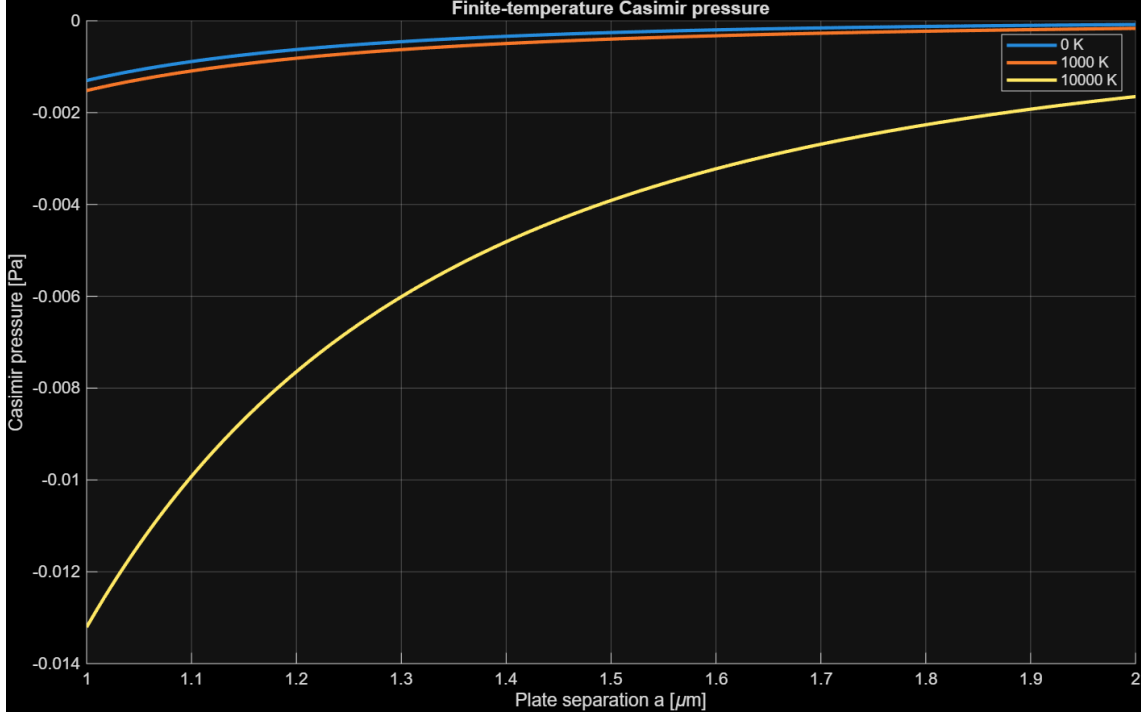
$$\frac{|P_C|}{P_g} \sim 3 \times 10^4 \quad (3.74)$$

пута већи од гравитационог привлачења између плоча.



Слика 3.2. Зависност Казимировог притиска од растојања између плоча

Још једна занимљива особина Казимировог ефекта на коначној температури јесте то што промена растојања између плоча може да произведе исти физички прелаз као и промена саме температуре. Понашање система није одређено независно растојањем и температуром, већ њиховим односом према термалној таласној дужини електромагнетног поља.

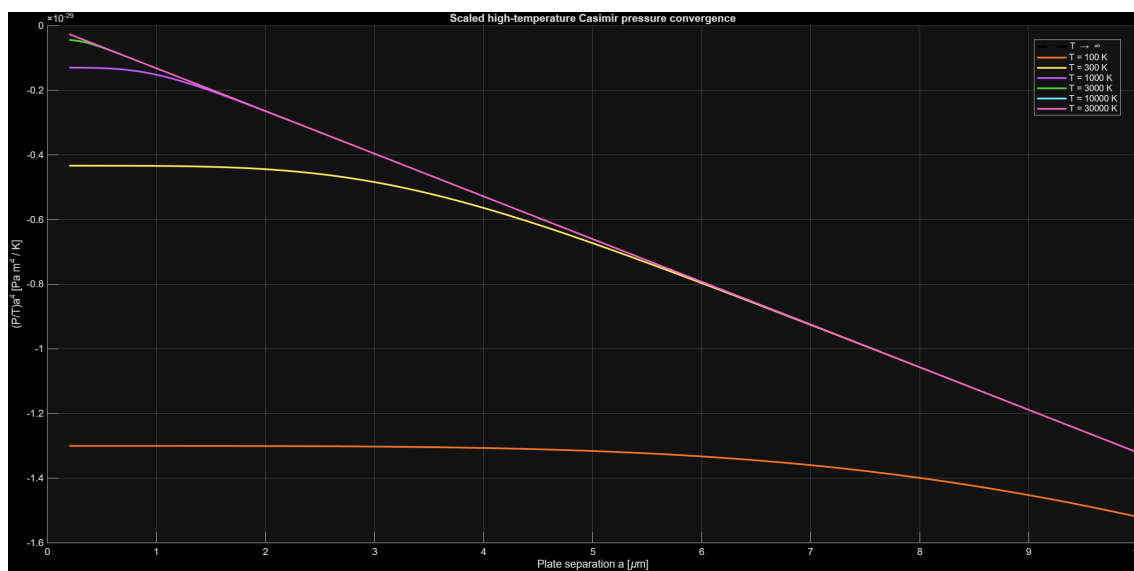


Слика 3.3. Зависност Казимировог притиска од растојања између плоча

$$\lambda_T = \frac{\hbar c}{k_B T}. \quad (3.75)$$

На малим растојањима или при довољно ниским температурама, шупљина остаје доминантно одређена квантним ефектима, па се репродукује позната Казимирова сила на нултој температури. Међутим, како се температура или растојање између плоча повећавају, више термалне моде постају све више потиснуте. Систем тада прелази у класични режим, у коме силу превасходно одређују термалне флуктуације, а не енергија вакуума. У том смислу, повећање растојања између плоча ефективно игра сличну улогу као повећање температуре: довољно велика растојања спречавају флуктуације виших фреквенција да остану кохерентне преко целе шупљине, због чега се интеракција понаша као да је систем на много вишој температури.

Овај прелаз јасно се види на слици 3.4.



Слика 3.4. Прелаз из квантног у класични термални режим при повећању растојања

4

Експериментална потврда Казимировог ефекта

4.1 Мерење Казимирове силе

Иако Казимиров ефекат природно произилази из квантизације електромагнетног поља, његова експериментална потврда далеко је од једноставне. Сила постаје мерљива тек на изузетно малим растојањима, типично реда микрометара или мањим. На тим размерама бројни конкурентни ефекти почињу да доминирају системом, укључујући резидуалне електростатичке силе, термални дрифт, храпавост површина, механичке вибрације и коначну проводност материјала. Због тога мерење Казимирове интеракције захтева изузетну контролу како геометрије система, тако и његовог електромагнетног окружења.

На први поглед делује да би идеалан експериментални систем био управо геометрија две паралелне плоче разматрана у теоријском делу рада. У пракси је, међутим, одржавање две макроскопске плоче паралелним са нанометарском прецизношћу изузетно тешко. Чак и веома мало угаоно одступање доводи до значајне промене растојања између плоча дуж њихове површине, што снажно нарушава мерење силе. Из тог разлога већина савремених експеримената користи конфигурацију сфера–раван, код које је поравнање знатно једноставније контролисати.

Када је растојање a између сфере и плоче много мање од полупречника закривљености сфере R , интеракција се локално може апроксимирати као скуп бесконачно малих паралелних плоча. Ова апроксимација је позната као апроксимација блиских површина (ПФА).

Прво савремено високопрецизно мерење Казимирове силе извео је Стив Ламоро 1997. године користећи торзионо клатно. У експерименту је метално сферно сочиво приближавано равној проводној плочи на растојања реда

микрометара. Уместо директног мерења силе, систем је регистровао веома мале моменте силе настале услед Казимировог привлачења. Добијени резултати показали су добро слагање са теоријским предвиђањима и представљали једну од првих убедљивих експерименталних потврда ефекта.

Од тада су експерименталне технике значајно напредовале. Атомски микроскопи, микроелектромеханички системи и оптичке интерферометријске методе омогућили су све прецизнија мерења на субмикрометарским растојањима. Ови експерименти показали су да реалистичан опис интеракције захтева корекције које превазилазе идеализован случај савршено проводних плоча. Коначна проводност, диелектричне особине, оксидациони слојеви, термални ефекти и микроскопска храпавост површине мењају силу и морају бити укључени у прецизне теоријске моделе. Такве корекције природно су описане општијом Лифшицевом теоријом, разматраном у уводу.

Поред свог фундаменталног значаја, Казимиров ефекат постао је важан и у савременој нанотехнологији. У микро- и наноелектромеханичким системима покретни проводни елементи могу искусити довољно јако Казимирово привлачење да трајно приону једни уз друге. Ова појава представља значајан практични проблем при пројектовању наноскопских уређаја.

4.2 Апроксимација блиских површина

Као што је раније поменуто, одржавање две савршено паралелне проводне плоче на субмикрометарским растојањима представља изузетно тежак експериментални задатак. Срећом, када је растојање a између сфере и плоче много мање од полупречника закривљености сфере R ($a \ll R$), интеракција се и даље може директно повезати са резултатом за две паралелне плоче изведеним у претходним поглављима. У овом лимесу закривљеност сфере мења се веома споро унутар области која доминантно доприноси интеракцији, тако да се сваки бесконачно мали део сфере може апроксимирати као локално равна проводна површина.

Зато сферу моделујемо као скуп бесконачно танких прстенова који се налазе на различитим локалним растојањима од равни. Нека је минимално растојање између сфере и плоче једнако a , а r радијално растојање од осе симетрије. Локално растојање тада износи

$$d(r) = a + R - \sqrt{R^2 - r^2}. \quad (4.1)$$

Пошто доминантан допринос потиче из области $r \ll R$, квадратни корен можемо развити до најнижег реда:

$$\sqrt{R^2 - r^2} = R\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \approx R - \frac{r^2}{2R}, \quad (4.2)$$

одакле следи

$$d(r) \approx a + \frac{r^2}{2R}. \quad (4.3)$$

Бесконечно мали елемент површине прстена има облик

$$dA = 2\pi r dr. \quad (4.4)$$

Користећи густину Казимирове енергије за паралелне плоче,

$$\frac{\Delta U}{A} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3}, \quad (4.5)$$

укупна интеракциона енергија постаје

$$U = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720} \int_0^\infty \frac{2\pi r dr}{\left(a + \frac{r^2}{2R}\right)^3}. \quad (4.6)$$

Уводимо смену

$$u = a + \frac{r^2}{2R}, \quad du = \frac{r}{R} dr, \quad (4.7)$$

чиме интеграл прелази у облик

$$U = -\frac{\pi^3 \hbar c R}{360} \int_a^\infty \frac{du}{u^3}. \quad (4.8)$$

Израчунавањем интеграла добијамо

$$U = -\frac{\pi^3 \hbar c R}{720 a^2}. \quad (4.9)$$

Коначно, диференцирањем по минималном растојању добијамо силу између сфере и равни:

$$F = -\frac{dU}{da} = -\frac{\pi^3 \hbar c R}{360 a^3}. \quad (4.10)$$

Овај резултат познат је као апроксимација блиских површина.

5

Додатак

5.1 Ојлер-Маклоренова формула

Да бисмо израчунавали разлике између сума и интеграла исте функције, користићемо Ојлер-Маклоренову формулу, коју ћемо извести у наставку. Започињемо дељењем интеграла

$$\int_a^b f(x) dx \quad (5.1)$$

на суму интеграла по јединичним интервалима:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} f(x) dx. \quad (5.2)$$

Уводимо „тестерасту“ функцију

$$P(x) = x - [x] - \frac{1}{2} = \{x\} - \frac{1}{2}, \quad (5.3)$$

чији је извод једнак 1 свуда осим у целобројним тачкама. Тада можемо записати интеграл применом интеграције по деловима:

$$\sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} f(x) P'(x) dx = \sum_{k=a}^{b-1} \left(f(x) P(x) \Big|_{k^+}^{k+1^-} - \int_k^{k+1} f'(x) P(x) dx \right). \quad (5.4)$$

Сређивањем добијеног израза следи

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=a}^{b-1} f(k) - \frac{f(a) + f(b)}{2} - \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} f'(x) P(x) dx. \quad (5.5)$$

Да бисмо наставили са основном идејом — развијањем интеграла у низ извода функције — потребно је пронаћи класу функција које задовољавају релацију

$$P_{n-1}(x) = c \cdot \frac{d}{dx} P_n(x). \quad (5.6)$$

Периодичне Бернулијеве функције имају управо ово својство:

$$\frac{1}{n} \frac{d}{dx} P_n(x) = P_{n-1}(x), \quad (5.7)$$

где је

$$P_n(x) = B_n(\{x\}), \quad (5.8)$$

а $B_n(t)$, n -ти Бернулијев полином, дефинисан је као n -ти коефицијент Тејлоровог развоја:

$$\frac{ze^{tz}}{e^z - 1} = \sum_0^{\infty} B_n(t) \frac{z^n}{n!}. \quad (5.9)$$

Бернулијеви бројеви дефинисани су као

$$B_n = B_n(0). \quad (5.10)$$

Уврштавањем и поновном применом интеграције по деловима добијамо следећи члан развоја:

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^{b-1} f(k) &= \int_a^b f(x) dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} \\ &\quad + \frac{1}{12} (f'(b) - f'(a)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} f''(x) P_2(x) dx. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Понављањем поступка долазимо до коначне формуле:

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^b f(k) &= \int_a^b f(x) dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} \\ &\quad + \sum_{r=1}^m \frac{B_{2r}}{(2r)!} (f^{(2r-1)}(b) - f^{(2r-1)}(a)) + R_m, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где је остатак једнак

$$R_m = -\frac{1}{(2m)!} \int_a^b P_{2m}(x) f^{(2m)}(x) dx. \quad (5.13)$$

Развијањем првих неколико чланова добијамо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^b f(k) &= \int_a^b f(x) dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} \\ &\quad + \frac{1}{12} (f'(b) - f'(a)) \\ &\quad - \frac{1}{720} (f'''(b) - f'''(a)) \\ &\quad + \frac{1}{30240} (f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)) + \dots \end{aligned} \quad (5.14)$$

Литература

- [1] M. Fox, *Quantum Optics: An Introduction*, Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [2] A. Zhuk and H. Kleinert, *Casimir Effect at Nonzero Temperatures in a Closed Friedman Universe*, Theoretical and Mathematical Physics, Vol. 109, No. 2, pp. 1484–1495 (1996).
- [3] H. B. G. Casimir, “On the attraction between two perfectly conducting plates”, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. 51, 793–795 (1948).
- [4] E. M. Lifshitz, “The theory of molecular attractive forces between solids”, Soviet Physics JETP 2, 73–83 (1956).
- [5] K. A. Milton, *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, World Scientific, 2001.