

Математичка гимназија

Матурски рад
из математике

Теорија скупова

Ученик
Андреј Пешић, IVд

Ментор
др. Лука Милићевић

Београд, 28.5.2026.

Садржај

1	Увод	4
2	Формална метода	6
3	ЦФ теорија	9
3.1	Аксиоме и схеме	9
3.2	Транзитиван скуп	11
3.3	Функције	13
3.4	Релације и добро уређени скупови	14
3.5	Индукција, рекурзија и индуктивни скуп	19
3.6	Класе	23
4	Ординали	24
5	Аксиома избора	29
6	Кардинали	34
6.1	Обична и генералисана континуум хипотеза	39

1 Увод

Теорија скупова је грана математике која се бави проучавањем скупова, који се најлакше схватају као колекције објеката. Модерно изучавање теорије скупова започели су немачки математичари још 1870-их, наиме Рихард Дедекинд и Георг Кантор. Кантор се сматра оцем модерне теорије скупова, а њихов рани рад често се назива *наивна теорија скупова*, услед недостатка формалних логичких метода и правог система аксиома и правила. Први математички рад објавио је управо Кантор 1874. године где је увео појам кардинала и показао да је скуп реалних бројева *непребројиво* бесконачан. Он је у теорију скупова увео појам партитивног скупа и разне друге. Поред њега у исто време Дедекинд је конструисао скуп реалних бројева користећи тзв. Дедекиндове пресеке. Математичар Фреге је још тад покушао да направи систем аксиома ослањајући се на Канторову кардиналност скупова. У њему је проблем пронашао Берtrand Расел, својим познатим парадоксом који каже да не постоји скуп X дефинисан са $X = \{x | x \notin x\}$ који је срушио тадашњу *схему компрехенције* која се разликује од данашње.

Најпознатије формализације аксиоматске теорије скупова долазе у два облика: теорије у којима постоје само скупови, и оне у којима постоје скупови и *праве* класе. Стандардна форма, и она којом ћемо се ми бавити у овом раду припада првој групи и то је Цермело-Френкелова теорија скупова са аксиомом избора. Ернст Цермело је оригинално предложио прву аксиоматску теорију скупова 1908. године. Тринаест година касније Абрахам Френкел му ставља до знања да његова теорија не може да докаже постојање неких кардинала који су тада били познати математичарима, наиме $\aleph_\omega$. Цермело-Френкелова теорија скупова са аксиомом избора састоји се од седам аксиома и две схеме. Најпознатију, аксиому избора, формулисао је Цермело 1904. године како би довршио свој доказ да се сваки скуп може добро уредити. Она наизглед каже нешто интуитивно, наиме из породице подскупова било ког скупа, из сваког подскупа можемо изабрати произвољан елемент. Ипак, она је контраверзна из више разлога. Познат Банах-Тарски парадокс који каже: ако важи аксиома избора онда из произвољне лопте у тродимензионалном простору можемо конструисати две лопте идентичне њој, тако што прву поделимо на коначно много дисјунктих делова и користимо само ротацију и транслацију. Разни математички појмови могу се дефинисати користећи теорију скупова. Само неки од њих су графови, прстени, векторски простори и сл. Сва својства природних и реалних бројева такође можемо извести користећи се само теоријом скупова. Кроз време развиле су се многе категорије теорије скупова: дескриптивна која се бави подскуповима реалних бројева, теорија расплинутих скупова, где елемент не мора само да припада или не припада неком скупу већ има одређену меру припадности и многе друге.

У овом матурском раду бавићемо се основама Цермело-Френкел теорије скупова. Видећемо које су то аксиоме и схеме које чине овај систем и дефинисати основне појмове у њему као што су функција, релација и парцијална уређења. Причаћемо о транзитивним и индуктивним скуповима и њиховим особинама. Велики део рада посвећен је ординалима и кардиналима. Шта су то ординали и кардинали и која су њихова основна својства. Како функционишу ординална и кардинална аритметика? Када су исте, а када различите? Такође, шта је то заправо аксиома

избора и које су неке од њених еквивалентних форми? На самом крају поменућемо *континуум хипотезу*, шта она значи и шта имплицира.

Цео овај рад служи као један мали увод у ову фасцинантну грану математике у којој још увек постоји велики број отворених питања и нерешених проблема.

2 Формална метода

Пре него што званично кренемо да се бавимо нашом темом морамо видети које алате и технике можемо да користимо.

Када уводимо нове појмове користимо се знањем претходно уведених појмова, па самим тим неки појмови морају бити недефинисани. Такве појмове зовемо *примитивним* појмовима.

Слично у доказу неког тврђења увек се позивамо на нека претходно доказана тврђења. Полазна тврђења која не доказујемо зовемо *аксиомама*.

Дефиниција 2.1. *Формална теорија* се састоји од следећих компоненти:

- Непразног скупа симбола, који називамо и језиком формалне теорије;
- Скупа свих коначних низова симбола језика формалне теорије, који називамо и скупом речи формалне теорије;
- Скупа формула, који је подскуп свих речи;
- Скупа аксиома, који је подскуп скупа формула;
- Правила извођења, која су неке релације међу формулама. Ако је R $n + 1$ -арно правило извођења, онда се за формулу φ каже да се добија из формула $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ по правилу R уколико је

$$R(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi).$$

Оваква правила извођења уобичајно записујемо на следећи начин:

$$\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n}{\varphi} R.$$

Рекли смо шта је формална теорија и од чега се тачно она састоји. Кроз даљи рад често ћемо се служити исказним рачуном, те ће нам бити врло корисно да видимо како дефинишемо њега као формалну теорију.

Пример 2.1. Исказни рачун као формалну теорију дефинишемо на следећи начин:

- Језик се састоји из два дела:
 - логичког дела, који чине знак за негацију $\neg$, знак за импликацију $\Rightarrow$, као и десна и лева заграда;
 - непразног скупа P , који називамо скупом исказних слова.
- Скупа исказних формула $ForP$ који се дефинише на следећи начин:
 - исказна слова су исказне формуле;

- ако су φ и ψ исказне формуле, онда су и $\neg\varphi$ и $(\varphi \Rightarrow \psi)$ исказне формуле;

- исказне формуле се добијају искључиво коначном применом претходне две ставке.

- Аксиоме се добијају применом следеће три схеме:

$$S1 \quad \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi);$$

$$S2 \quad (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta)) :$$

$$S3 \quad (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi).$$

Притом су φ, ψ, θ произвољне исказне формуле.

- Једино правило извођења јесте модус поненс:

$$MP \quad \frac{\varphi \quad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}.$$

Језик $\mathcal{L}$ првог реда је скуп симбола који поред логичких симбола, интерпункцијских знакова и пребројивог скупа променљивих евентуално садржи и симболе константи, релацијске симболе и функцијске симболе. Даље, уз сваки релацијски и функцијски знак који се налази у језику $\mathcal{L}$ дата је и његова арност, тј. број аргументних места.

За нас је једино битан језик теорије скупова, тачније језик ЦФЦ теорије скупова, који ћемо сада дефинисати.

Дефиниција 2.2. Језик теорије скупова $\mathcal{L}_{ZFC}$ састоји се од једног бинарног релацијског симбола $\in$.

Терме, тј. изразе језика $\mathcal{L}$ рекурзивно дефинишемо на следећи начин:

- Променљиве и симболи константи су терми језика $\mathcal{L}$.
- За произвољан функцијски знак F језика $\mathcal{L}$ и произвољне терме $t_1, \dots, t_n$ језика $\mathcal{L}$ запис

$$F(t_1, \dots, t_n)$$

такође је терм језика $\mathcal{L}$;

- Сваки терм језика $\mathcal{L}$ се може добити искључиво коначном применом претходне две ставке.

Сложеност терма је број (рачунајући вишеструкост) функцијских знакова који се јављају у њему.

Формуле језика $\mathcal{L}$ рекурзивно уводимо на следећи начин:

- За произвољна два терма t_1 и t_2 језика $\mathcal{L}$ запис

$$(t_1 = t_2)$$

је формула језика $\mathcal{L}$;

- За произвољни релацијски знак R арности n и ма које терме $t_1, \dots, t_n$ језика $\mathcal{L}$ запис

$$(R(t_1, \dots, t_n))$$

је формула језика $\mathcal{L}$;

- Нека су φ и ψ произвољне формуле језика $\mathcal{L}$ и нека је x произвољна променљива. Тада је сваки од записа

$$\neg\varphi \quad (\varphi \Rightarrow \psi) \quad \forall x\varphi$$

формула језика $\mathcal{L}$;

- Формуле језика $\mathcal{L}$ се могу добити искључиво коначном применом претходних ставки.

За променљиву x која се јавља у формули φ кажемо да је *везана* уколико се јавља под дејством квантификатора. У супротном кажемо да је променљива x *слободна* у формули φ .

Овиме бисмо завршили кратко и јасно дефинисање формалне методе, барем део који је нама даље битан, у теорији скупова.

3 ЦФ теорија

3.1 Аксиоме и схеме

Цермело-Френкелова аксиоматизација теорије скупова, са аксиомом избора, чини основе модерне теорије скупова. ЦФ изоставља аксиому избора и састоји се из **шест** аксиома, наиме: *екстензионалности, празног скупа, пара, партитивног скупа, бесконачности и регуларности*. Сем њих постоје и **две** схеме: *сепарације и замене*.

Разлика између аксиома и схема је појављивање произвољне формуле. Те, ако у схему убацимо једну формулу добијамо једну аксиому, ако убацимо другу формулу добијамо другу аксиому итд.

Аксиома 1. (Аксиома екстензионалности)

$$\forall x_0 \forall x_1 (x_0 = x_1 \Leftrightarrow \forall x_2 (x_2 \in x_0 \Leftrightarrow x_2 \in x_1)).$$

Речима, два скупа су једнака ако и само ако је сваки елемент првог скупа такође и елемент другог скупа.

Сада одмах можемо увести једну основну теорему која нам је битна за касније увођење нових појмова.

Теорема 3.1. *Нека је $\varphi(x)$ произвољна формула теорије скупова. Ако постоји скуп такав да су сви његови елементи сви скупови X за које важи $\varphi(X)$ онда је такав скуп јединствен.*

Доказ. Претпоставимо супротно, скупови A и B се састоје из свих скупова X за које важи $\varphi(X)$, и они су различити. Онда следи

$$\forall a (a \in A \Leftrightarrow \varphi(a) \Leftrightarrow a \in B).$$

Управо за сваки елемент скупа A важи и да је елемент скупа B , те су по аксиоми екстензионалности ова два скупа једнака.

Следи, сваки овакав скуп је јединствен. $\square$

Аксиома 2. (Аксиома празног скупа)

$$\exists x_0 \forall x_1 \neg (x_1 \in x_0).$$

Постоји скуп коме не припада ниједан елемент. Овом аксиомом такође могу да се избегну неки тривијални парадокси, као на пример постојање скупа чији сви елементи нису једнаки себи, јер такви елементи управо припадају празном скупу.

Аксиома 3. (Аксиома пара)

$$\forall x_0 \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 (x_3 \in x_2 \Leftrightarrow x_3 = x_0 \vee x_3 = x_1).$$

У преводу, за свака два скупа, постоји скуп чији су елементи само та два скупа. Овакав скуп је јединствен.

Аксиома 4. (Аксиома уније)

$$\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 (x_2 \in x_1 \Leftrightarrow \exists x_3 (x_2 \in x_3 \wedge x_3 \in x_0)).$$

Сваки скуп има своју унију елемената, тј. за сваки скуп A постоји скуп који садржи елементе свих скупова који су чланови скупа A .

Овај скуп означавамо са $\bigcup A$ и он је јединствен.

Такође,

$$A \bigcup B \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{A, B\};$$

$$\{A, B, C\} \stackrel{\text{def}}{=} \{A\} \bigcup \{B\} \bigcup \{C\}$$

где је скуп $\{A\}$ управо скуп чији је једини елемент скуп A .

Аксиома 5. (Аксиома партитивног скупа)

$$\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 (x_2 \in x_1 \Leftrightarrow \forall x_3 (x_3 \in x_2 \Rightarrow x_3 \in x_0)).$$

Речима, за сваки скуп постоји његов партитивни скуп, тј. скуп свих његових подскупова. Он је јединствен и означавамо га са $P(A)$.

Постоји и одвојена грана теорије скупова **ЦФ - П** која из **ЦФ** изоставља ову аксиому. Она је настала ради онемогућавања лаког прављења бесконачних скупова, управо овом аксиомом. Како сваки скуп има свој партитивни скуп, онда и сваки партитивни скуп има свој партитивни скуп. Овако лако можемо добити бесконачан низ скупова.

Аксиоме бесконачности и регуларности ћемо увести мало касније, а сад нам је остало да прођемо кроз схеме **ЦФ** теорије.

Схема 1. (Схема сепарације) Нека је φ формула у којој се променљива x_2 јавља слободно, а x_1 нема слободних јављања. Тада је универзално затворење формуле

$$\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 (x_2 \in x_1 \Leftrightarrow x_2 \in x_0 \wedge \varphi).$$

инстанца схеме сепарације.

Преведено, за сваки скуп A постоји подскуп B , чији елементи испуњавају формулу φ . Означаваћемо га са

$$\{x \in A \mid \varphi(x)\}$$

Сада укратко и лако можемо да уведемо основне операције над скуповима познате свима:

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x \in B\}$$

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x \notin B\}$$

$$A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Уз знање схеме сепарације, можемо доказати ову лаку, али битну теорему.

Теорема 3.2. *За сваки скуп A постоји скуп B који не припада скупу A .*

Доказ. Дефинишимо скуп X са

$$X = \{x \in A \mid x \notin x\}.$$

Сада, када би скуп X припадао скупу A било би

$$X \in X \Leftrightarrow X \in A \wedge X \notin X \Leftrightarrow X \notin X$$

што је контрадикција, те је скуп X баш онај који смо тражили.

□

Схема 2. (Схема замене) Нека је φ формула језика $\mathcal{L}_{ZFC}$ у којој се променљиве x_2 и x_3 јављају слободно, а у којој променљива x_1 нема слободних јављања. Тада је универзално затворење формуле

$$\forall x_0 (\forall x_2 (x_2 \in x_0 \Rightarrow \exists_1 x_3 \varphi) \Rightarrow \exists x_1 \forall x_3 (x_3 \in x_1 \Leftrightarrow \exists x_2 (x_2 \in x_0 \wedge \varphi)))$$

инстанца схеме замене.

У горњој формули је $\exists_1$ квантификатор који означава јединствено постојање.

Ова схема нам каже да из скупа A можемо да направимо нови скуп B заменом сваког елемента a са b тако да важи $\varphi(a, b)$.

Он је јединствен и означимо га са $\{b_a \mid a \in A\}$

Овине смо завршили са увођењем основних аксиома и схема. Аксиоме бесконачности и регуларности ћемо увести мало касније, када се будемо бавили појмовима на које се оне односе, а за сада су нам остале довољне.

3.2 Транзитиван скуп

Сада када имамо основну знање о аксиомама и схемама уводимо један нови појам који ће нам бити битан када будемо причали о природним бројевима и ординалима.

Дефиниција 3.1. За скуп кажемо да је *транзитиван* ако је сваки његов елемент уједино и његов подскуп.

У овим скуповима припадање је стварно транзитивно, тј. ако неки скуп припада неком другом скупу, онда и сваки његов елемент припада том скупу.

Теорема 3.3. Скуп A је транзитиван ако и само ако је

$$\bigcup A \subseteq A.$$

Доказ. **1.** Нека је скуп A транзитиван. Докажимо да важи $\bigcup A \subseteq A$.

$$\forall x(x \in \bigcup A \Rightarrow \exists A'(x \in A' \wedge A' \in A))$$

Како је A транзитиван скуп и $A' \in A$ следи и да је $A' \subseteq A$, па је

$$\forall x(x \in A' \Rightarrow x \in A)$$

те је овај смер доказан.

2. Нека за произвољан скуп A важи $\bigcup A \subseteq A$. Следи:

$$\forall A \forall A'(A' \in A \Rightarrow \forall x(x \in A' \Rightarrow x \in A))$$

Непосредно следи да је сваки елемент A такође и његов подскуп, те је A транзитиван скуп.

□

Теорема 3.4. Нека је A произвољан скуп. Важи:

1. Ако је A транзитиван, онда је и скуп $A \cup \{A\}$ транзитиван;
2. Ако је A транзитиван, онда је и његов партитивни скуп $P(A)$ транзитиван;
3. Ако су сви елементи скупа A транзитивни, онда је и скуп $\bigcup A$ транзитиван.

Доказ. **1.** Претпоставимо да је скуп A транзитиван. Следи:

$$\forall x(x \in A \cup \{A\} \Rightarrow x \in A \vee x = A)$$

Сада ако је $x \in A$ онда је и $x \subseteq A$, а ако је $x = A$ важи исто, те је сваки елемент $A \cup \{A\}$ такође и његов подскуп чиме је доказана транзитивност.

2. Претпоставимо да је скуп A транзитиван.

Сада за било који скуп X из $P(A)$, за сваки његов елемент x важи $x \in A$, па је и $x \subseteq A$, те је и $x \in P(A)$, што је и требало доказати.

3. Претпоставимо да су сви елементи скупа A транзитивни.

Тада за свако $x \in \bigcup A$ постоји $X \in A$ такав да је $x \in X$. Како је X транзитиван, онда је и $x \subseteq X$, а и $X \subseteq \bigcup A$, па је и $x \subseteq \bigcup A$, те смо доказали тврђење.

□

Са ове две теореме бисмо завршили овај кратак одељак о транзитивним скуповима, о којима ћемо касније причати дуже и детаљније.

3.3 Функције

За разлику од нормалног схватања функције, у теорији скупова функција није трансформација неког скупа, већ је битно да **функцију посматрамо као скуп**, тј. скуп уређених парова. Тако да прво морамо да кажемо шта су уређени парови.

Дефиниција 3.2. Нека су A и B произвољни скупови. Њихов одговарајући уређен пар дефинисан је са:

$$\langle A, B \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{\{A\}, \{A, B\}\}$$

Даље *Декартов производ* два скупа $A \times B$ је скуп уређених парова чија је прва координата из скупа A , а друга из скупа B .

Задатак 3.1. Показати да Декартов производ два скупа постоји и да је јединствен.

Доказ. Нека су A и B два произвољна скупа и $a \in A$ и $b \in B$ произвољни елементи ових скупова.

Знамо да скупови $\{a\}$, $\{a, b\}$ партитивном скупу уније скупова A и B , $P(A \cup B)$. Самим тим следи и да

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} \in P(P(A \cup B)).$$

Онда по схеми сепарације постоји скуп свих уређених парова скупова A и B , скуп $C = A \times B$.

По теореме 3.1 овакав скуп је јединствен. $\square$

Дефиниција 3.3. Нека је A произвољан скуп. *Домен* и *кодомен* дефинишемо на следећи начин:

$$\text{dom}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in \bigcup \bigcup A \wedge \exists y (\langle x, y \rangle \in A)\}$$

$$\text{rng}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \in \bigcup \bigcup A \wedge \exists y (\langle y, x \rangle \in A)\}$$

Сада можемо да кежемо и шта је функција.

Као што видимо домен и кодомен нису својства јединствена функцијама. И други скупови, као што су рецимо релације, имају свој домен и кодомен.

Дефиниција 3.4. За скуп $f \subseteq A \times B$ кажемо да је *функција* ако важи:

1. $(\forall a \in A)(\exists b \in B)(\langle a, b \rangle \in f)$;
2. $(\forall a \in A)(\forall b, b' \in B)(\langle a, b \rangle \in f \wedge \langle a, b' \rangle \in f \Rightarrow b = b')$.

Уместо $\langle a, b \rangle \in f$ пишемо $f(a) = b$.

Такође, записом

$$f : A \rightarrow B$$

подразумевамо $\text{dom}(f) = A$ и $\text{rng}(f) \subseteq B$.

Дефиниција 3.5. Нека је $f : A \rightarrow B$. За f кажемо да је:

- **Ињекција (1-1)** ако важи:

$$\forall a_1 \forall a_2 (a_1 \in A \wedge a_2 \in A \wedge a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$$

- **Сурјекција (на)** ако важи:

$$\forall b \exists a (b \in B \wedge a \in A \wedge f(a) = b)$$

- **Бијекција** ако је и **1-1** и **на**.

Дефиниција 3.6. Нека је $f : A \rightarrow B$ произвољна функција. Онда је:

- **Директна слика** скупа $X \subseteq A$ скуп

$$f[X] = \{x \in B | \exists y (y \in X \wedge x = f(y))\}$$

- **Инверзна слика** скупа $X \subseteq B$ скуп

$$f^{-1}[X] = \{x \in A | \exists y (y \in X \wedge y = f(x))\}$$

Из дефиниција закључујемо да су директна и инверзна слика функције скупова који садрже по једну координату из уређеног пара који је елемент дате функције. Даље видимо да је

$$f[X] \subseteq \text{rng}(f) \quad \wedge \quad f^{-1}[X] \subseteq \text{dom}(f).$$

Ако је функција f бијекција, постоји јединствена функција f^{-1} , таква да важи

$$\forall a \forall b (a \in A \wedge b \in B \Rightarrow (f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a)).$$

Ову функцију зовемо *инверзном функцијом* функције f .

Дефиниција 3.7. За произвољну функцију $f : A \rightarrow B$ и непразан скуп X такав да је $X \subseteq A$ *рестрикција* функције f на скуп X дефинишемо са:

$$(f|X)(x) = f(x), \quad x \in X$$

Рестрикцијом функције смањујемо домен који гледамо, тј. мењамо домен и кодомен са неким њиховим одговарајућим подскуповима.

Овине смо завршили дефинисање функција.

3.4 Релације и добро уређени скупови

Дефиниција 3.8. Скуп R је бинарна релација на скупу A ако је $R \subseteq A \times A$. Уместо $\langle a, b \rangle \in R$, пишемо aRb .

Бинарна релација и функција су слични појмови у теорији скупова. Као што видимо за бинарну релацију немамо исте услове као за функцију, један елемент домена релације може бити у релацији са више елемената кодомена. Такође није неопходно да цео домен "учествује".

Дефиниција 3.9. Бинарна релација R је:

- *Рефлексивна* ако је $(\forall a \in A) aRa$;
- *Ирефлексивна* ако је $(\forall a \in A) \neg aRa$;
- *Симетрична* ако је $(\forall a \in A)(\forall b \in A) aRb \Rightarrow bRa$;
- *Антисиметрична* ако је $(\forall a \in A)(\forall b \in A) aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$;
- *Транзитивна* ако је $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A) aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$;
- *Релација еквиваленције* ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна;
- *Релација поретка* ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна;
- *Релација строгог поретка* ако је ирефлексивна и транзитивна.

Релацију поретка на скупу A означавамо са $\leq_A$, а строгог поретка са $<_A$.

Дефиниција 3.10. Пар $(\langle A, <_A \rangle)(\langle A, \leq_A \rangle)$ је *(строго)парцијално уређење* ако је $(<_A) \leq_A$ релација (строгог) поретка на скупу A .

Дефиниција 3.11. Парцијално уређење $\langle A, \leq_a \rangle$ је *линеарно* ако су свака два елемента упоредива, тј.

$$\forall a, b \in A (a \leq_A b \vee b \leq_A a)$$

Основни примери познатих линеарних парцијалних уређења (са својим строгим алтернативама) су $\langle \mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}} \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}} \rangle$, $\langle \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}} \rangle$.

Дефиниција 3.12. Нека је $\langle A, \leq_A \rangle$ парцијално уређење, $X \subseteq A$ непразан под-скуп и $a \in A$. Тада је:

- a *мајоранта* скупа X ако важи: $\forall x \in X (x \leq_A a)$;
 a је *миноранта* скупа X ако је: $\forall x \in X (a \leq_A x)$.
- Јединствена мајоранта скупа X , уколико постоји, *супремум* скупа X , у ознаци $\sup X$;
Уколико $\sup X \in X$, тада је то *максимум* скупа X .
- Јединствена миноранта скупа X , уколико постоји, *инфинум* скупа X , у ознаци $\inf X$;
Уколико $\inf X \in X$, тада је то *минимум* скупа X .
- a *минималан елемент* уколико је: $\forall b (a \leq_A b)$;
 a *максималан елемент* уколико је: $\forall b (b \leq_A a)$.

Све дефиниције о релацијама које смо до сада навели ту су да бисмо се могли бавити једним битним и јаким појмом, **добро уређеним скупом**. Даље ћемо да видимо шта је то.

Дефиниција 3.13. Парцијално уређен скуп $\langle A, \leq_A \rangle$ је *добро уређен* ако сваки непразан подскуп скупа A има минимум.

Разни нама врло познати скупови имају своја парцијална уређења као што су природни, рационални, реални (управо релација мање-једнако). Сви наведени скупови такође су и линеарни, али нису сви добро уређени.

Рецимо, скуп реалних бројева није добро уређен јер $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ нема свој минимум.

Теорема 3.5. *Свако добро уређење уједино је и линеарно.*

Доказ. Посматрајмо неки добро уређен скуп A . Ако је скуп A једночлан исказ је тривијалан.

Нека скуп A има више од једног члана. Сада за сваки двочлани подскуп X скупа A важи

$$\forall a, b \in X (a \leq_A b \vee b \leq_A a)$$

јер овакав подскуп има минимум. Како то важи за сваки двочлани подскуп A , важи и за свака два елемента, те је скуп A и линеарно уређење. $\square$

Дефиниција 3.14. Нека су $\langle A, \leq_A \rangle$ и $\langle B, \leq_B \rangle$ произвољна уређења. Бијекција $f : A \rightarrow B$ је *изоморфизам* ако је

$$\forall a, a' \in A (a \leq_A a' \Leftrightarrow f(a) \leq_B f(a')).$$

Постојање изоморфизма између два уређења означавамо са $\langle A, \leq_A \rangle \cong \langle B, \leq_B \rangle$.

Изоморфизми и добро уређени скупови су уско повезани. Можемо извести пар битних и корисних теорема сада.

Теорема 3.6. *Нека су $\langle A, \leq_A \rangle$ и $\langle B, \leq_B \rangle$ парцијална уређења, а функција $f : A \rightarrow B$ изоморфизам. Онда је и њена инверзна функција $f^{-1} : B \rightarrow A$ изоморфизам.*

Доказ. Како је функција f бијекција онда је $\forall b_1, b_2 \in B \exists a_1, a_2 \in A (f^{-1}(b_1) = a_1 \wedge f^{-1}(b_2) = a_2)$.

Узмимо произвољне $a_1, a_2 \in A$, за које је $f(a_1) = b_1 \wedge f(a_2) = b_2$. Из изоморфизма функције f знамо

$$f^{-1}(b_1) \leq_A f^{-1}(b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq_A a_2 \Leftrightarrow f(a_1) \leq_B f(a_2) \Leftrightarrow b_1 \leq_B b_2$$

што је управо требало и доказати. $\square$

Дефиниција 3.15. Нека је $\langle A, \leq_A \rangle$ парцијално уређење. Интервал $(\cdot, a)$ дефинисан је са

$$(\cdot, a) = \{x \in A \mid x \leq_A a\}.$$

Остале интервале дефинишемо на сличан начин.

Теорема 3.7. Нека је $\langle A, \leq_A \rangle$ добро уређење и нека је a произвољан елемент скупа A . Тада су $\langle A, \leq_A \rangle$ и $\langle (\cdot, a), \leq_A \rangle$ међусобно неизоморфна уређења.

Доказ. Претпоставимо супротно, да постоји функција $f : A \rightarrow (\cdot, a)$ која је изоморфизам. Постоји скуп

$$X = \{x \in A \mid f(x) \neq x\},$$

а како је $f(x)$ бијекција, а $(\cdot, a) \subset A$, онда X не може бити празан.

Како је скуп X подскуп скупа A који је добро уређен, он мора имати минимум, нека то буде m_x . Важи:

$$\forall b \in A (b <_A m_x \Rightarrow b = f(b))$$

и

$$m_x <_A f(m_x) \vee f(m_x) <_A m_x.$$

1. Нека је $m_x <_A f(m_x) <_A a$.

Како је f^{-1} изоморфизам мора важити и

$$f^{-1}(m_x) <_A f^{-1}(f(m_x)) = m_x,$$

па како је $f^{-1}(m_x) <_A m_x$, онда $f^{-1}(m_x) \notin X$, те је $f^{-1}(m_x) = f(f^{-1}(m_x)) = m_x$.

Даље, због изоморфизма следи $f(m_x) = m_x$, што је контрадикција.

2. Сада нека важи $f(m_x) <_A m_x$.

Како је функција f изоморфизам мора бити

$$f(f(m_x)) <_A f(m_x).$$

Са друге стране како је $f(m_x) <_A m_x$ имамо да је

$$f(f(m_x)) = f(m_x),$$

те је и овај случај контрадикција. □

Дакле, не можемо направити изоморфизам између скупа и његовог иницијалног сегмента, што интуитивно има смисла, јер морамо да "одсечемо" неке елементе са краја, па нам је функција непотпуна.

Теорема 3.8. Нека су $\langle A, \leq_A \rangle$ и $\langle B, \leq_B \rangle$ добра уређења и функције $f, g : A \rightarrow B$ изоморфизми. Тада је $f = g$.

Доказ. Дефинишимо скуп X са $X = \{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\}$. Ако је X празан скуп тврђење важи.

Претпоставимо супротно X није празан те има минимум m_x у скупу A . Сада важи

$$\forall a \in A (a <_A m_x \Rightarrow f(a) = g(a))$$

и

$$f(m_x) <_A g(m_x) \vee g(m_x) <_A f(m_x).$$

Нека је $f(m_x) <_A g(m_x)$,

Како је и g^{-1} такође изоморфизам, следи

$$g^{-1}(f(m_x)) <_A g^{-1}(g(m_x)) = m_x,$$

па како је то мање од m_x то је

$$f(g^{-1}(f(m_x))) = g(g^{-1}(f(m_x))) = f(m_x).$$

Из чега даље

$$g^{-1}(f(m_x)) = m_x \Leftrightarrow f(m_x) = g(m_x)$$

што је контрадикција са поставком скупа X .

Други смер се доказује на сличан начин. $\square$

Закључујемо, изоморфизам између два добра уређења је јединствен.

Теорема 3.9. *Нека су $\langle A, \leq_A \rangle$ и $\langle B, \leq_B \rangle$ произвољна добра уређења. Тада важи тачно једно од три могућности:*

1. $\langle A, \leq_A \rangle \cong \langle B, \leq_B \rangle$
2. $\exists a \in A (\langle (\cdot, a), \leq_A \rangle \cong \langle B, \leq_B \rangle)$
3. $\exists b \in B (\langle A, \leq_A \rangle \cong \langle (\cdot, b), \leq_B \rangle)$

Доказ. Дефинишимо скуп X као скуп свих елемената скупа A за које постоје јединствени елемент скупа B тако да су интервали са њиховом горњом границом изоморфни.

$$X = \{a \in A \mid \exists! b_a \in B (\langle (\cdot, a), \leq_A \rangle \cong \langle (\cdot, b_a), \leq_B \rangle)\}$$

Сваки овакав изоморфизам $f_a : (\cdot, a) \rightarrow (\cdot, b)$ је, по теорему 3.8 јединствен.

Дефинишимо скуп Y на сличан начин:

$$Y = \{b \in B \mid \exists! a_b \in A (\langle (\cdot, a_b), \leq_A \rangle \cong \langle (\cdot, b), \leq_B \rangle)\}.$$

Знамо да је:

$$\forall a_1, a_2 \in A (a_1 <_A a_2 \Rightarrow f_{a_1} = f_{a_2}|(\cdot, a_1)).$$

Сада изоморфизам f између уређења $\langle X, \leq_A \rangle$ и $\langle Y, \leq_B \rangle$ је коректно дефинисан са

$$f = \bigcup \{f_a \mid a \in X\}.$$

Ако је $X = A$ или $Y = B$ теорема је доказана.

Претпоставимо супротно $X \neq A$ и $Y \neq B$. Тада, како су A и B добра уређења постоје минимуми скупова $A \setminus X$ и $B \setminus Y$, нека су то m_1 и m_2 .

Из овога непосредно следи $X = (\cdot, m_1)$ и $Y = (\cdot, m_2)$ па је $f : (\cdot, m_1) \rightarrow (\cdot, m_2)$ изоморфизам, из чега следи $m_1 \in X$ и $m_2 \in Y$. То је контрадикција, чиме је теорема доказана. $\square$

Све теореме везане за изоморфизме и добро уређене скупе, интуитивно се могу схватити узимајући у обзир величину скупа. Како је кардиналност нама још непознат појам, овај део ће нам касније помоћи да га боље разумемо.

3.5 Индукција, рекурзија и индуктивни скуп

Индукција и рекурзија су неке од најпознатијих метода решавања разних проблема у математици, па тако и у теорији скупова. Индукција и рекурзија се појављују у више облика, које ћемо ми доказати, а у овом одељку се односе на добро уређене скупове.

Теорема 3.10. *Нека је $\langle A, \leq_A \rangle$ произвољно добро уређење и скуп X подскуп скупа A такав да важи*

$$\forall a \in A((\cdot, a) \subseteq X \Rightarrow a \in X).$$

Тада је $X = A$.

Доказ. Претпоставимо супротно $A \neq X$. Онда је скуп $A \setminus X$ непразан, те постоји минимум тог скупа, нека је то a .

Па како је сада a најмањи елемент који није у X знамо да је $(\cdot, a) \subseteq X$ из чега следи $a \in X$, што је контрадикција. $\square$

Ово је била **индукција** и она се врло поклапа са нашим досадашњим схватањем.

Насупрот индукцији, формулација **рекурзије** се разликује од нашег интуитивног схватања, као што ћемо сада видети.

Теорема 3.11. *Нека је $\langle A, \leq_A \rangle$ произвољно добро уређење. Нека је f произвољна функција са доменом $P(A \times A)$. Тада постоји јединствена функција g са доменом A таква да за свако $a \in A$ важи:*

$$g(a) = f(g|(\cdot, a)).$$

Доказ. Прво ћемо доказати јединственост овакве функције. Претпоставимо супротно да постоје две овакве функције g_1, g_2 . Нека је $a \in A$ произвољно тако да је $g_1|(\cdot, a) = g_2|(\cdot, a)$. Овакво a сигурно постоји (минимум скупа A). Следи:

$$g_1(a) = f(g_1|(\cdot, a)) = f(g_2|(\cdot, a)) = g_2(a).$$

Онда из теореме индукције следи да је $g_1 = g_2$.

Још треба да докажемо егзистенцију овакве функције.

Нека је X подскуп скупа A који се састоји из свих елемената a за које постоји функција g_a таква да је за свако $x <_A a$

$$g_a(x) = f(g_a|(\cdot, a)).$$

Тј. важи:

$$\forall a, b \in A(b <_A a \Rightarrow g_b = g_a|(\cdot, b)).$$

Сада ако постоји $M_a = \max_{\leq_A}(\cdot, a)$ онда је

$$g_a = (\bigcup \{g_b | b <_A a\}) \cup \{ \langle M_a, g_{M_a} \rangle \}.$$

У супротном изостављамо члан $\langle M_a, g_{M_a} \rangle$.

Управо смо овиме доказали да из $(\cdot, a) \subseteq X$ следи да $a \in X$ те је по теорему индукције $X = A$.

Тражену функцију g дефинишемо са:

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (\bigcup \{g_b | b \in A\}) \cup \{a, g_a\} & A = (\cdot, a] \\ \bigcup \{g_a | a \in A\} & \nexists \max_{\leq A} A \end{cases}$$

□

Сада када смо завршили доказивање индукције и рекурзије можемо рећи шта је индуктиван скуп. Ипак, пре тога ћемо се кратко позабавити појмом природних бројева у теорији скупова.

Дефиниција 3.16. Природни бројеви, рачунајући и нулу, у теорији скупова дефинисани су на следећи начин:

- $0 \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$
- $n + 1 \stackrel{\text{def}}{=} n \cup \{n\}$

Пример 3.1. Хајде да испишемо првих неколико природних бројева:

1. $1 = \{0\} = \{\emptyset\};$
2. $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\};$
3. $3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\};$
4. $4 = \{0, 1, 2, 3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}...$

Дефиниција 3.17. За скуп A кажемо да је индуктиван ако важи:

- $0 \in A$
- $\forall a (a \in A \Rightarrow a \cup \{a\} \in A)$

Задатак 3.2. Показати да је својство *бити индуктиван* затворено за пресек, тј. да је пресек два индуктивна скупа такође индуктиван скуп.

Решење. Нека су A и B произвољни индуктивни скупови.

Знамо да $0 \in A$ и $0 \in B$, па мора бити и $0 \in A \cap B$.

Даље за сваки елемент x који припада и скупу A и скупу B важи:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \cup \{x\} \in A \wedge x \cup \{x\} \in B \Leftrightarrow x \cup \{x\} \in A \cap B.$$

Због ова два својства је и пресек свака два индуктивна скупа управо индуктиван скуп. □

Лако је приметити да је сваки индуктиван скуп бесконачан јер садржи све природне бројеве. Са првих пет аксиома и две схеме које смо увели не може се показати постојање оваквог скупа. Зато за ово постоји аксиома.

Аксиома 6. (Бесконечности)

$$\exists x_0(0 \in x_0 \wedge (\forall x_1 \in x_0)(x_1 \cup \{x_1\} \in x_0)).$$

Речима, најједноставније, индуктиван скуп постоји.

Теорема 3.12. *Постоји најмањи индуктиван скуп.*

Доказ. Нека је A произвољан индуктиван скуп. Дефинишимо скуп ω такав да:

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid \forall y(y \subseteq A \wedge y\text{-индуктиван} \Rightarrow x \in y)\}.$$

одавде следи да је ω подскуп сваког индуктивног подскупа скупа A . Сада нека је B ма који други индуктиван подскуп. Како је $A \cap B$ такође подскуп од A следи:

$$\omega \subseteq A \cap B \subseteq B.$$

Те је овим показано да је ω најмањи индуктиван скуп по инклузији. $\square$

Задатак 3.3. Показати да је скуп ω транзитиван.

Решење. Дефинишимо скуп X са:

$$X = \{x \in \omega \mid x \subseteq \omega\}.$$

Ако докажемо да је скуп X индуктиван, самим тим ће важити $\omega \subseteq X$, као и, по дефиницији X , $X \subseteq \omega$, тј. $X = \omega$.

Кренимо од тога да је $0 \subseteq \omega$ те $0 \in X$.

Сада за свако x из X важи $x \cup \{x\} \in \omega$. Још треба да докажемо да је $x + 1 \subseteq \omega$.

Важи:

$$\forall y \in (x \cup \{x\})(y = x \vee y \in x).$$

Ако је $y \in x$ онда како је $x \subseteq \omega$ је и $y \in \omega$.

С друге стране ако је $y = x$ већ знамо да $x \in \omega$, па је $(x \cup \{x\}) \subseteq \omega$.

Овиме смо доказали да је X индуктиван скуп, а самим тиме и да је ω транзитиван. $\square$

Задатак 3.4. Показати да за свако $x \in \omega$ важи $x \notin x$.

Решење. Решићемо задатак сличним приступом као у прошлом. Дефинишимо скуп X са:

$$X = \{x \in \omega \mid x \notin x\}.$$

Доказујемо да је X индуктиван скуп.

Како $0 \in \omega$ и $0 \notin 0$ следи да је $0 \in X$.

Сада, за свако $x \in X$ важи да $x \cup \{x\} \in \omega$. Јасно је да $x \cup \{x\} \notin x \cup \{x\}$, па и $x + 1 \in X$.

Сада је скуп X индуктиван, те је тврђење доказано. $\square$

У ова два задатка смо заправо показали да релација $\in$ у скупу ω ирефлексивна и транзитивна. Самим тим следи да је $\langle \omega, \in \rangle$ строго парцијално уређење. Ово тврђење ћемо даље проширити следећом теоремом.

Теорема 3.13. *Уређен пар $\langle \omega, \in \rangle$ је строго добро уређење.*

Доказ. Из саме дефиниције нумерала,

$$n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\},$$

закључујемо да је $\langle \omega, \in \rangle$ линеарно уређење.

Нека је $X \subseteq \omega$ непразан подскуп и $x \in X$.

Сада следи да је $\min_{\in} X = \min_{\in} x$ па је теорема доказана. $\square$

Дефиниција 3.18. Скуп A је *коначан* ако постоје $n \in \omega$ и бијекција $f : A \rightarrow n$. У супротном је скуп A *бесконачан*.

Завршићемо овај одељак са још једним задатком.

Задатак 3.5. Показати да за свако $n \in \omega$ ниједна функција

$$f : n+1 \rightarrow n$$

није 1-1.

Решење. Нека је X скуп свих природних бројева за које ово тврђење важи. Доказаћемо да је X индуктиван скуп.

За $n = 0$ тврђење је тривијално.

Претпоставимо супротно, постоји функција

$$f : (n+1) + 1 \rightarrow n+1.$$

Ако је $f(n+1) = n$, онда је функција

$$f|(n+1) : n+1 \rightarrow n$$

1-1 што је контрадикција са претпоставком ($n \in X$). Значи $f(n+1) < n$.

Ако $n \notin f[(n+1) + 1]$ онда функција $g : (n+1) + 1 \rightarrow n+1$, дефинисана са

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq n+1 \\ n, & x = n+1 \end{cases}$$

1-1, па је и $g|(n+1) : n+1 \rightarrow n$ такође 1-1, што је контрадикција.

Остаје нам случај где је $f(b) = n$, где је $b < n+1$ и $f(n+1) = a$. И тада је функција $h : (n+1) + 1 \rightarrow n+1$ дефинисана са

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq n+1 \wedge x \neq b \\ n, & x = n+1 \\ a, & x = b \end{cases}$$

1-1, па је поново њено ограничење $h|(n+1) : (n+1) \rightarrow n$ такође 1-1 што је још једном контрадикција, те је теорема доказана. $\square$

3.6 Класе

Класе су нови битан појам који уводимо, зато што имају одређена својства која би код скупова правила проблеме. Зато такође треба да уведемо појам *формуле скуповног типа*.

Формула теорије скупова $\varphi(x)$ је скуповног типа ако постоји скуп чији су сви елементи управо скупови који испуњавају формулу $\varphi(x)$.

Сада ћемо да наведемо неке примере формула које нису скуповног типа и зашто су нам у тим случајевима класе битне.

Теорема 3.14. *Формула $x \notin x$ није скуповног типа.*

Доказ. Претпоставимо супротно нека је скуп A такав да

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin x.$$

Сада важи:

$$A \in A \Leftrightarrow A \notin A$$

што је контрадикција, те је теорема доказана. $\square$

У ранијим покушајима формализације теорије скупова постојала је *схема ком-прехензије* која је казала: "Свако својство је скуповног типа."

Контра пример нашао је **Берtrand Расел** по коме теорема изнад носи име.

Последица 3.15. *Формула $x = x$ није скуповног типа.*

Доказ. Претпоставимо супротно нека постоји скуп A за који важи

$$x \in A \Leftrightarrow x = x.$$

Тада постоји скуп X такав да

$$x \in X \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin x.$$

Међутим како је $x = x$ увек тачно, то свако x припада A , па је ово еквивалентно са

$$x \in X \Leftrightarrow x \notin X.$$

То је контрадикција те је доказана тврдња. $\square$

Због оваквих парадокса уводимо појам *Класе*. Ако је K класа пишемо $x \in K$.

Дефиниција 3.19. Класу свих скупова V дефинишемо са

$$V = \{x | x = x\}.$$

Теорема 3.16. *Нека је $\{x | \varphi(x)\}$ непразна класа. Тада је*

$$\bigcap \{x | \varphi(x)\} \stackrel{def}{=} \{x | \forall y (\varphi(y) \Rightarrow x \in y)\}$$

скуп.

Доказ. Нека је произвољан скуп A такав да важи $\varphi(A)$. Претпоставимо да скуп X припада класи $\bigcap \{x | \varphi(x)\}$. Тада за сваки скуп B такав да важи $\varphi(B)$ важи и $X \in B$, па и $X \in A$. Значи да је

$$\bigcap \{x | \varphi(x)\} \subseteq A$$

па је и то скуп. □

Пример 3.2. Нека са K_1 означимо класу свих скупова који имају елемент 1, тј.

$$K_1 = \{x | 1 \in x\}.$$

Сада је пресек свих тих скупова управо

$$\bigcap K_1 = \bigcap \{x | 1 \in x\} = \{1\}$$

што је скуп.

Пример 3.3. Ако сада са Ind означимо класу свих индуктивних скупова онда непосредно следи да је

$$\bigcap \text{Ind} = \omega.$$

4 Ординали

Ординали су наши "бројеви" у теорији скупова. Као што ћемо даље видети, сви природни бројеви су ординали. И цео скуп природних бројева ω је ординал, али имамо и веће ординале од тога, као на пример $\omega + 1$. Ординале ћемо бележити малим грчким словима $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, а са Ord означавамо класу ординала.

Дефиниција 4.1. Скуп је ординал ако је:

- Транзитиван;
- Строго добро уређен релацијом припадања $\in$.

Пример 4.1. Празан скуп 0 је ординал. Такође сваки природан број је ординал, јер је за сваки ординал α и скуп $\alpha \cup \{\alpha\}$ такође ординал. Лако се докаже и да је сваки елемент ординала такође ординал.

Задатак 4.1. Нека су α и β ординали такви да је $\alpha \subseteq \beta$. Доказати да је или $\alpha = \beta$ или $\alpha \in \beta$.

Решење. Погледајмо скуп $\beta \setminus \alpha$. Ако је овај скуп празан онда је $\alpha = \beta$.

Погледајмо сад случај $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$. Тада овај скуп има свој $\in$ -минимум, нека је то a . Нека је сада x произвољан елемент скупа a . Ако би било $x \notin \alpha$ онда би важило $x \in \beta \setminus \alpha$ што је контрадикција јер $x \in a$, минимуму $\beta \setminus \alpha$ по релацији припадања. Значи $a \subseteq \alpha$.

Докажимо сад да је $\alpha \subseteq a$. Претпоставимо супротно, да није, па постоји неко $y \in \alpha$ такво да $y \notin a$. Наравно $y \in \beta, y \subseteq \beta$. Па како је $\langle \beta, \in \rangle$ добро уређење, тиме и линеарно, онда $a \in y$. Али како је скуп α транзитиван, онда и $a \in \alpha$ што је у контрадикцији са $a \in \beta \setminus \alpha$, па је и $\alpha \subseteq a$.

Сада је $\alpha = a$, па и $\alpha \in \beta$. □

Задатак 4.2. Нека су α и β произвољни ординали. Тада је $\alpha \subseteq \beta$ или $\beta \subseteq \alpha$.

Решење. Узмимо $\beta \subseteq \alpha$, случајеви су симетрични. Ако је $\alpha = \beta$ доказ је тривијалан, па нека је $\beta \subset \alpha$.

Поново, скуп $\alpha \setminus \beta$ има $\in$ -минимум a . Исто као у претходном задатку доказујемо да је $a = \beta$, па је $\beta \in \alpha$, па из транзитивности ординала следи $\beta \subset \alpha$. $\square$

Видимо да су ординали врло добро уређени скупови, сваки ординал је у некој релацији са сваким другим ординалом, што ћемо формулисати у следеће две последице.

Последица 4.1. За произвољне ординале α и β важи тачно једно од следећег:

1. $\alpha = \beta$.
2. $\beta \in \alpha$.
3. $\alpha \in \beta$.

Последица 4.2. Било који строго опадајући низ ординала није бесконачан.

Доказ. Претпоставимо супротно, да овакав низ ординала постоји.

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 \dots$$

тј. да важи

$$\alpha_1 \ni \alpha_2 \ni \alpha_3 \ni \dots$$

Сада нека је $\beta = \alpha + 1$, па за сваки ординал из овог низа је

$$\alpha_i \in \beta.$$

Самим тиме је овај низ подскуп ординала β те мора имати $\in$ -минимум, те је ово контрадикција $\square$

Задатак 4.3. Нека је A скуп чији су сви елементи ординали. Тада је и скуп $\bigcup A$ ординал.

Решење. На основу претходних задатака сви елементи скупа $\bigcup A$ су ординали и $\langle \bigcup A, \in \rangle$ је линеарно уређење. Нека је X непразан подскуп скупа $\bigcup A$. Тада за произвољно $x \in X$ постоји $\alpha \in A$ такво да је $x \in \alpha$, па је и $x \subseteq \alpha$. Ако је

$$X \cap x \cap \alpha = X \cap x = 0$$

онда је $\min_{\in} X = x$.

У супротном је $\min_{\in} X = \min_{\in} (X \cap x)$.

По теореме транзитивних скупова следи и транзитивност скупа $\bigcup A$, па он мора бити ординал. $\square$

Како се сваки ординал састоји из других ординала, онда ће и унија свих тих ординала бити скуп ординала. Како су сви они добро уређени, сигурно ће и унија бити добро уређена, те логички можемо да закључимо да ће и њихова унија бити ординал.

Теорема 4.3. *Нека је на класи Ord дефинисана бинарна релација $\leq$ са*

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$$

и нека је $\alpha < \beta$ ако је $\alpha \in \beta$. Тада је:

- $\leq$ добро уређење класе Ord;
- Ако је x скуп чији су сви елементи ординали, онда је ординал $\bigcup x$ $\leq$ -супремум скупа x у класи Ord;
- За сваки ординал α је или $\alpha = \bigcup \alpha$ или $\alpha = \bigcup \alpha + 1$;
- За сваки ординал α је $\alpha < \alpha + 1$ и између ова два ординала нема других ординала;
- За сваки скуп x постоји ординал α такав да $\alpha \notin x$.

Ову теорему дајемо без доказа, јер је показана кроз прошле задатке. Ако је за неки ординал $\bigcup \alpha = \alpha$, њега зовемо *граничним* ординалом. У супротном зовемо га ординалом *следбеником*.

Последица 4.4. *Сваки добро уређен скуп изоморфан је тачно једном ординалу.*

У поглављу о функцијама рекли смо да је изоморфизам између два скупа, ако постоји, јединствен. Такође смо рекли да између било која два скупа постоји или изоморфизам или изоморфизам постоји када једног од њих смањимо. Те како на сваки ординал додајемо по један елемент (самог себе) да би добили следећег ово тврђење интуитивно стоји.

Теорема 4.5. (Трансфинитна индукција) *Нека је класа A произвољна подкласа класе Ord. Онда ако важи*

$$\forall \alpha \in \text{Ord} (\alpha \subseteq A \Rightarrow \alpha \in A)$$

је $A = \text{Ord}$.

Теорема 4.6. (Трансфинитна рекурзија) *Нека је $F : V \rightarrow V$ функција на универзуму V. Тада постоји јединствена функција $G : \text{Ord} \rightarrow V$ таква да важи*

$$\forall \alpha \in \text{Ord} (G(\alpha) = F(G|_{\alpha})).$$

Доказ трансфинитне индукције и рекурзије не разликује се много од обичних које смо већ доказали тако да ћемо сада доказ изоставити.

Дефиниција 4.2. (Ординална аритметика) Операције сабирања, множења и степеновања ординала дефинишемо на следећи начин (рекурзивно):

- $\alpha + 0 = \alpha$;
- $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$;
- $\alpha + \beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} \alpha + \gamma$, ако је β гранични ординал;
- $\alpha \cdot 0 = 0$;
- $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + 1$;
- $\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} \alpha \cdot \gamma$, ако је β гранични ординал;
- $\alpha^0 = 1$;
- $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$;
- $\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} \alpha \cdot \gamma$, ако је β гранични ординал.

Пример 4.2. Треба нагласити да операције сабирања и множења ординала нису комуникативне у ординалној аритметици. Рецимо

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$$

или

$$2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2 = \omega + \omega.$$

Дефиниција 4.3. Нека је $\delta > 0$ произвољан гранични ординал. Тада је δ -низ било која функција a са доменом δ .

Низове обично означавамо са $\langle a_\xi | \xi < \delta \rangle$, и подразумевамо $a_\xi = a(\xi)$.

За низ ординала кажемо да је *непрекидан* ако за сваки граничан ординал $\beta < \delta$ важи

$$\alpha_\beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} \alpha_\gamma.$$

Теорема 4.7. Нека су A и B скупови и нека су функције $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ 1-1, Тада постоји бијекција између ова два скупа.

Доказ. Ако је једна од f, g бијекција онда је тврђење тривијално.

Претпоставимо супротно ни f ни g нису сурјекције.

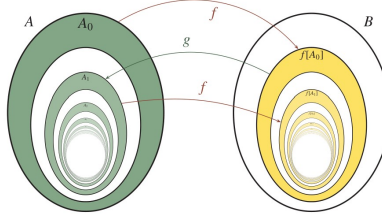
Рекурзивно дефинишемо низове $\langle A_n | n < \omega \rangle$ и $\langle B_n | n < \omega \rangle$ на следећи начин:

- $A_0 = A$;
- $B = g[B]$;
- $A_{n+1} = g[f[A_n]]$;
- $B_{n+1} = g[f[B_n]]$.

Даље из конструкције следи за свако $n \in \omega$

$$A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n.$$

Такође важи да је функција $(g \circ f)|_{A_n} : A_n \rightarrow A_{n+1}$ бијекција, како је композиција две 1-1 функције такође 1-1, а скуп A_{n+1} је дефинисан као слика скупа A_n те је



Слика 1: Слика уз теорему 4.7.

на.

Даље дефинишемо функцију $F : A \rightarrow B_0$ као

$$F(x) = \begin{cases} g(f(x)), & \exists n \in \omega (x \in A_n \setminus B_n) \\ x, & \nexists n \in \omega (x \in A_n \setminus B_n). \end{cases}$$

Функција F је бијекција, па је тражена функција $h : A \rightarrow B$ дефинисана са $h = g^{-1} \circ F$. $\square$

Ова теорема зове се Кантор-Бернштајнова. Она је позната и другом облику ($|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$), где прича о кардиналности скупова, али су ове две теореме у суштини исте.

На крају овог поглавља наводимо задњу аксиому ЦФ теорије, аксиому регуларности.

Аксиома 7. (Аксиома регуларности)

$$\forall x_0 (x_0 \neq 0 \Rightarrow (\exists_1 x_1 \in x_0) (x_1 \cap x_0 = 0)).$$

У преводу сваки скуп има свој $\in$ -минимални елемент, тј. сваки скуп има елемент који не садржи ниједан други елемент тог скупа.

Овакве скупове називамо *добро заснованим*.

Овиме завшавамо поглавље о ординалима. Након овога бавићемо се и *кардиналима*, за које ћемо видети да су само подкласа ординала.

5 Aksioma izbora

Aksioma izbora је једна од најпознатијих и контраверзнијих тема у историји теорије скупова. Њу је 1904. године формулисао математичар Ернст Цермело. Она нам каже да ако имамо скуп подељен у безброј непразних подскупова (коначно или бесконачно), можемо из сваког узети по тачно један елемент. Или формалније да постоји функција избора.

Дефиниција 5.1. Нека је A произвољан скуп. Функција $f : P(A) \rightarrow A$ је *функција избора* скупа A ако важи

$$\forall X \subseteq A (X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) \in X).$$

За неке скупове знамо да функција избора постоји и без да је постулирамо аксиомом.

Задатак 5.1. Нека је $\langle A, \leq_A \rangle$ добро уређење. Показати да тада скуп A има функцију избора.

Решење. За свако добро уређење A знамо да сваки његов подскуп има минимум. Конструисаћемо функцију избора управо користећи ту чињеницу. Нека је функција $f : P(A) \rightarrow A$ дефинисана са

$$f(X) = \min_{\leq_A} X.$$

Сада за сваки непразан подскуп X важи $f(X) \in X$, па је f функција избора скупа A . $\square$

Могуће је да више подскупова скупа има једнаке минимуме, али функција избора скупа не мора бити бијекција. Шта више она никада не може бити 1-1 јер је кардиналност партитивног скупа увек већа од кардиналности самог скупа, што ћемо касније и доказати.

Задатак 5.2. Нека је A непразан скуп, а α ординал такав да постоји бијекција $f : A \rightarrow \alpha$. Показати да се скуп A може добро уредити.

Решење. Знамо да нам је на сваком ординалу добро дефинисана бинарна релација $\leq$ са

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta.$$

Даље ћемо на скупу A дефинисати бинарну релацију $\leq_A$ са

$$\forall x, y \in A (x \leq_A y \Leftrightarrow f(x) \subseteq f(y)).$$

Сада из доброг уређења ординала следи и да је $\langle A, \leq_A \rangle$ коректно дефинисано добро уређење. $\square$

Теорема 5.1. (Хартогсов ординал) За сваки скуп A постоји најмањи ординал α_A такав да ни једна функција $f : \alpha_A \rightarrow A$ није 1-1.

Доказ. Ако је скуп A коначан онда је тражено $o_A = n + 1$ где је n јединствен број за који постоји бијекција $f : n \rightarrow A$, по задатку 3.4. из поглавља о природним бројевима.

Нека је скуп A бесконачан. Дефинишимо скуп H са

$$h \in H \Leftrightarrow \exists X \subseteq A \exists R \subseteq X^2 (h = \langle X, R \rangle)$$

где је $\langle X, R \rangle$ добро уређење. Даље нека је за сваки елемент $h \in H$ ординал α_h такав да је $h \cong \langle \alpha_h, \leq \rangle$. На основу схеме замене постоји скуп

$$O = \{\alpha_h | h \in H\}$$

и нека је

$$o_a = \sup_{\text{Ord}} O.$$

Како је скуп A бесконачан, следи да је $o_A \geq \omega$. Сада нам је довољно да покажемо да $o_a \notin O$.

Претпоставимо супротно, $o_a \in O$. Тада по дефиницији скупа O постоји непразан подскуп $X \subseteq A$ такав да постоји бијекција $f : o_a \rightarrow X$.

Како је $o_a \geq \omega$ можемо конструисати функцију $g : o_a + 1 \rightarrow o_a$ са

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = o_a \\ x + 1, & x < \omega \\ x, & \omega \leq x < o_a \end{cases}$$

такву да је g бијекција.

Али, тада је и функција

$$f \circ g : o_a + 1 \rightarrow X$$

такође бијекција, што је контрадикција јер је o_a супремум скупа O . $\square$

Последица 5.2. *Ако је скуп A бесконачан скуп, онда је његов Хартогсов број o_A граничан ординал.*

Ову последицу дајемо без доказа, јер смо је доказали у претходној теореми. Ако је $o_A = \alpha + 1$ за неко α онда постоји бијекција између o_A и α чиме долазимо до контрадикције.

Аксиома 8. Аксиома избора

$$\forall x_0 (\exists f : P(x_0) \rightarrow x_0) (\forall x_1 \in P(x_0)) (x_1 \neq \emptyset \Rightarrow f(x_1) \in x_1).$$

Речима, за сваки скуп постоји функција избора тог скупа.

Теорема 5.3. *Следећа тврђења су еквивалентна:*

1. **Аксиома избора** Сваки скуп има функцију избора;
2. **Хаусдорфов став максималности** Сваки ланац у произвољном парцијалном уређењу се може продужити до максималног ланца;

3. **Зорнова лема** Ако у неком уређењу сваки ланац има мајоранту, онда то уређење има максималан елемент;

4. **Цермелова теорема** Сваки скуп се може добро уредити.

Ову теорему ћемо доказати корак по корак у остатку овог поглавља.

Теорема 5.4. Нека произвољан скуп A има функцију избора. Тада се скуп A може добро уредити.

Доказ. Нека су $f : P(A) \rightarrow A$ и o_A редом функција избора и Хартогсов број скупа A . Рекурзијом дефинишемо функцију

$$g : o_A \rightarrow A \cup \{A\}$$

на следећи начин:

$$g(\alpha) = \begin{cases} f(A \setminus \{g(\xi) \mid \xi < \alpha\}), & A \setminus \{g(\xi) \mid \xi < \alpha\} \neq \emptyset \\ A, & A \setminus \{g(\xi) \mid \xi < \alpha\} = \emptyset. \end{cases}$$

Сада, ако би за свако $\alpha < o_A$ било $g(\alpha) \neq A$ онда би функција g била 1-1 што је немогуће по дефиницији o_A . Следи, постоји најмањи ординал $\alpha_A < o_A$ такав да је $g(\alpha_A) = A$.

Сада је функција $g|_{\alpha_A} : \alpha_A \rightarrow A$ бијекција, из чега по задатку 5.2. следи да се скуп A може добро уредити. $\square$

Други смер еквиваленције (Цермелова теорема $\Rightarrow$ Aksioma избора) доказали смо у задатку 5.1.

У следеће две теореме појављује се појам ланца који још нисмо дефинисали, па ћемо то урадити сада.

Дефиниција 5.2. Нека је $\langle A, \leq_A \rangle$ парцијално уређење. За скуп $X \subseteq A$ кажемо да је ланац ако је уређење $\langle X, \leq_A \rangle$ линеарно.

Теорема 5.5. Претпоставимо да непразан скуп A има функцију избора. Тада за произвољну релацију поретка $\leq_A$ на скупу A и произвољан ланац X у парцијалном уређењу $\langle A, \leq_A \rangle$ постоји максималан ланац M такав да $X \subseteq M$.

Доказ. Нека је $f : P(A) \rightarrow A$ функција избора, а o_A Хартогсов број скупа A . Дефинишемо предикат $\varphi_R(S)$ као " S је ланац у скупу R ". Сада ћемо дефинисати функцију $h : P(A) \rightarrow P(A)$ на следећи начин:

$$h(Y) = \{x \in A \setminus Y \mid \varphi_A(Y \cup \{x\})\}$$

где је Y произвољан ланац уређења $\langle A, \leq_A \rangle$.

Примећујемо да је Y максималан ланац ако $h(Y) = \emptyset$.

Сада ћемо рекурзивно дефинисати функцију $g : o_A \rightarrow A \cup \{A\}$ са

$$g(\alpha) = \begin{cases} f(h(X)), & \alpha = 0 \\ f(h(X \cup g[\alpha])), & \alpha > 0 \wedge h(X \cup g[\alpha]) \neq \emptyset \\ A, & \alpha > 0 \wedge h(X \cup g[\alpha]) = \emptyset. \end{cases}$$

Слично као у претходном доказу, ако би за свако $\alpha < o_A$ важило $g(\alpha) \neq A$ онда би ова функција била 1-1 што је немогуће.

Одавде следи да постоји најмањи ординал $\alpha_A < o_A$ такав да је $g(\alpha_A) = A$, па је тражени максималан ланац коректно дефинисан са

$$M = X \bigcup g[\alpha_A].$$

□

Теорема 5.6. *Претпоставимо да скуп A има функцију избора и нека је $\leq_A$ релација поретка на скупу A таква да сваки ланац у A има мајоранту. Тада уређење $\langle A, \leq_A \rangle$ има максимални елемент.*

Доказ. Поново, нека је функција $f : P(A) \rightarrow A$ функција избора, а φ_A Хартогсов број скупа A . Дефинишимо функцију $h : P(A) \rightarrow P(A)$ са

$$h(X) = \{y \in A \mid \forall x \in X (x \leq_A y)\}$$

где је X произвољан ланац скупа A . Скуп $h(X)$ је по дефиницији скуп свих мајоранти скупа X .

Приметићемо да је по дефиницији мајоранте скупа она упоредива са сваким елементом тог скупа, па важи

$$\forall x \in h(X) (\varphi_A(X \bigcup \{x\}))$$

где је φ предикат исто дефинисан као у доказу претходне теореме.

Ако скуп A нема ниједан ланац тврђење је тривијално.

Претпоставимо да скуп A има барем један ланац, нека је то X ,

Сада дефинишимо функцију $g : o_A \rightarrow A \bigcup \{A\}$ на следећи начин:

$$g(\alpha) = \begin{cases} f(h(X)), & \alpha = 0 \\ f(h(X \bigcup g[\alpha])), & \alpha > 0 \wedge X \bigcup g[\alpha] \neq A \\ A, & \alpha > 0 \wedge X \bigcup g[\alpha] = A. \end{cases}$$

Сада ако би за свако $\alpha < o_A$ важило $g(\alpha) \neq A$ онда би функција била 1-1 што је противречно Хартогсовом броју.

Одавде следи да постоји најмање α_A такво да је $g(\alpha_A) = A$, па како и тај ланац има мајоранту, која припада скупу A , теорема је доказана. □

Вратимо се сад на теорему 5.3. Видимо да смо доказали следеће: $1 \Leftrightarrow 4$, $1 \Rightarrow 2$, $1 \Rightarrow 3$. Остаје нам, што ћемо сада доказати, случајеви $2 \Rightarrow 3$ и $3 \Rightarrow 4$.

Теорема 5.7. *Из Хаусдорфовог става максималности следи Зорнова лема.*

Доказ. Нека је A произвољан скуп и $\leq_A$ релација поретка на скупу A .

Знамо да сваки ланац $X \subseteq A$ можемо продужити до максималног ланца M . Сада је мајоранта ланца M очигледно и максималан елемент уређења $\langle A, \leq_A \rangle$ (у супротном би могли да продужимо ланац M). □

Теорема 5.8. *Ако важи Зорнова лема сваки скуп се може добро уредити.*

Доказ. Нека је A произвољан непразан скуп. Дефинишимо скуп W као скуп свих уређених парова $\langle X, R \rangle$ таквих да $X \subseteq A$ и да је $R \subseteq X^2$ добро уређење скупа X .

На скупу W дефинишемо релацију $\leq_W$ са

$$\langle X, R \rangle \leq_W \langle X', R' \rangle \Leftrightarrow X \subseteq X' \wedge R \subseteq R'.$$

Лако се проверава да је $\leq_W$ релација поретка на скупу W као и да за сваки ланац $M \subseteq W$ пар $\langle \bigcup \text{dom}(M), \bigcup \text{rng}(R) \rangle$ његова мајоранта у W .

Сада скуп W има максималан елемент, назовимо га $\langle X, R \rangle$. Треба да покажемо да важи $X = A$.

Претпоставимо супротно $A \setminus X \neq \emptyset$. Онда за неко $a \in A \setminus X$ важи

$$\langle X, R \rangle <_W \langle X \bigcup \{a\}, R \bigcup (X \times \{a\}) \rangle.$$

што је контрадикција. □

Дефиниција 5.3. Нека је $f : I \rightarrow X$ произвољна функција и нека за свако $i \in I$ важи $X_i = f(i)$. Тада је:

- $\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup f[I];$
- $\prod_{i \in I} X_i = \{g : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid \forall i \in I (g(i) \in X_i)\}.$

Посебно пројекције, у ознаци $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ дефинишемо са $\pi_j(g) = g(j)$.

6 Кардинали

Кардинали су један од најпознатијих појмова теорије скупова, са којим је цела ова грана математике и започета.

Они су, као што смо пре навели, подкласа ординала.

Интуитивно кардиналност скупа је његова величина или број елемената тог скупа.

Дефиниција 6.1. За произвољан скуп X кажемо да је *добро уређен* ординалом α ако постоји бијекција $f : \alpha \rightarrow X$.

Дефиниција 6.2. Нека је X произвољан скуп. *Кардинални број* скупа X , у ознаци $|X|$, је најмањи ординал којим се скуп X може добро уредити.

Ординал α је *кардинал* ако важи $\alpha = |\alpha|$.

По самој дефиницији кардинала видимо да су сви природни бројеви, односно нумерали, кардинали. Такође је ω кардинал.

Али, рецимо, ординал $\omega + 1$ није кардинал јер постоји бијекција $f : \omega + 1 \rightarrow \omega$

$$f(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha = \omega \\ \alpha + 1, & \alpha \in \omega. \end{cases}$$

Слично можемо да покажемо да за сваки бесконачни ординал α важи $|\alpha + 1| = |\alpha|$.

Сада ћемо доказати Канторову теорему коју смо споменули у прошлом поглављу.

Теорема 6.1. *За сваки скуп x важи $|x| < |P(x)|$.*

Доказ. Нека је X произвољан скуп. Функција $f : X \rightarrow P(X)$ дефинисана са

$$f(x) = \{x\}$$

је 1-1, па закључујемо да је $|X| < |P(X)|$.

Покажимо сада да $|X| \neq |P(X)|$.

Претпоставимо супротно. Онда постоји бијекција $g : X \rightarrow P(X)$. Тада би постојао скуп

$$A = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}.$$

Како је функција g на онда постоји $x \in X$ такво да је $g(x) = A$.

Сада је ово контрадикција јер,

$$x \in A \Leftrightarrow x \in g(x) \Leftrightarrow x \notin A.$$

□

Као и ординали и кардинали могу бити коначни и бесконачни, а класу кардинала означавамо са Card .

Како важи Канторова теорема и ординали су добро уређени закључујемо да важи да за сваки кардинал κ постоји најмањи кардинал већи од њега, у ознаци κ^+ .

Дефиниција 6.3. Ако за произвољан кардинал κ постоји кардинал λ такав да је $\kappa = \lambda^+$, онда κ зовемо кардиналом *следбеником*. У супротном је κ *гранични* кардинал.

Сваки кардинал има свог кардинала следбеника и између та два кардинала нема других кардинала.

Дефиниција 6.4. Трансфинитни низ *алефа* бесконачних кардинала дефинишемо на следећи начин:

- $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$;
- $\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$;
- $\aleph_\alpha = \omega_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \aleph_\beta$, у случају граничног ординала α .

Сада ћемо дефинисати појам кофиналности кардинала, коју можемо сматрати као подскуп који одржава кардиналност, што ћемо сада и видети.

Дефиниција 6.5. Нека је $\langle A, \leq_A \rangle$ произвољно парцијално уређење. Скуп $X \subseteq A$ је *кофиналан* у $\langle A, \leq_A \rangle$ ако важи:

$$\forall a \in A (\exists x \in X) (a \leq_A x).$$

Под кофиналношћу парцијалног уређења $\langle A, \leq_A \rangle$, у ознаци $cf \langle A, \leq_A \rangle$ или само $cf A$, подразумевамо најмањи кардинал од свих кофиналних скупова у $\langle A, \leq_A \rangle$.

Из дефиниције кофиналности скупа можемо да закључимо да за сваки бесконачни кардинал κ важи:

- $cf cf \kappa = cf \kappa$;
- $\omega \leq cf \kappa \leq \kappa$.

Дефиниција 6.6. Бесконачни кардинал κ је *регуларан* ако је $cf \kappa = \kappa$. У супротном он је *сингуларан* кардинал.

Задатак 6.1. Показати да за сваки ординал α важи

$$\alpha \leq \aleph_\alpha.$$

Доказ. Нека је $\mathcal{A}$ класа свих ординала за које ово важи, а α произвољан ординал такав да $\alpha \in \mathcal{A}$.

Тада важи

$$\forall \beta < \alpha (\beta \leq \aleph_\beta)$$

као и

$$\bigcup_{\beta < \alpha} \beta \leq \alpha \wedge \bigcup_{\beta < \alpha} \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha.$$

Из овога управо следи $\alpha \in \mathcal{A}$, па је по трансфинитној индукцији $\mathcal{A} = \text{Ord}$. $\square$

Задатак 6.2. Показати да низ алефа има произвољно велике фиксне тачке.

Доказ. Нека је α произвољан ординал. Показаћемо да за свако α постоји кардинал κ који је фиксна тачка низа алефа, тјт. за који важи

$$\kappa = \aleph_\kappa.$$

Дефинишимо рекурзивно низ кардинала $\langle \kappa_n | n \in \omega \rangle$ на следећи начин

- $\kappa_0 = \aleph_\alpha$;
- $\kappa_{n+1} = \aleph_{\kappa_n}$.

Нека је $\kappa = \bigcup_{n \in \omega} \kappa_n$. Очигледно је $\alpha \leq \aleph_\alpha < \kappa$ и важи

$$\kappa = \bigcup_{n \in \omega} \kappa_n = \bigcup_{n \in \omega} \aleph_{\kappa_n} = \aleph_{\bigcup_{n \in \omega} \kappa_n} = \aleph_\kappa$$

те је задатак завршен. □

Дефиниција 6.7. За произвољне скупове X и Y скуп ${}^X Y$ дефинишемо као скуп свих функција чији је домен X , а кодомен Y , тјт.

$${}^X Y = \{x \in P(X \times Y) | x : X \rightarrow Y\}.$$

Дефиниција 6.8. Нека су κ и λ произвољни кардинали. Кардинале $\kappa + \lambda$, $\kappa \cdot \lambda$ и κ^λ дефинишемо на следећи начин:

- $\kappa + \lambda = |(\kappa \times \{\kappa\}) \cup (\lambda \times \{\lambda\})|$;
- $\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$;
- $\kappa^\lambda = |{}^\lambda \kappa|$.

Иако су кардинали уједино и ординали, кардинална и ординална аритметика се разликују када радимо на бесконачним скуповима.

Пример 6.1. Када радимо са ординалном аритметиком важи

$$2^\omega = \bigcup_{n \in \omega} 2^n = \omega,$$

док је у кардиналној аритметици $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

Теорема 6.2. Нека је α произвољан ординал. Тада је

$$\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$

За доказ следеће теореме потребан нам је нови појам, канонска бијекција ординала.

Дефиниција 6.9. Трансфинитном рекурзијом дефинишемо канонско пресликавање Γ класе свих парова ординала у класу свих ординала на следећи начин:

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \begin{cases} \sum_{\xi \in \beta} (\xi + \xi + 1) + \alpha & , \quad \alpha < \beta \\ \sum_{\xi \in \alpha} (\xi + \xi + 1) + \alpha + \beta & , \quad \alpha \geq \beta > 0. \end{cases}$$

Доказ. Нека је $\Gamma : \text{Ord} \times \text{Ord} \rightarrow \text{Ord}$ канонска бијекција. Уочимо класу $\mathcal{A}$ свих ординала α за које је

$$\Gamma[\omega_\alpha \times \omega_\alpha] = \omega_\alpha.$$

Нека је $\alpha \subseteq \mathcal{A}$.

На основу конструкције Γ следи да је

$$\omega_\alpha \subseteq \Gamma[\omega_\alpha \times \omega_\alpha].$$

Даље претпоставимо да постоје ординали $\xi, \eta < \omega_\alpha$ такви да је

$$\omega_\alpha = \Gamma(\xi \times \eta).$$

Сада је сигурно

$$|\max\{\xi, \eta\}| < \aleph_\alpha,$$

те постоји ординал $\beta < \alpha$ такав да је

$$|\max\{\xi, \eta\}| = \aleph_\beta.$$

Ипак тада је $|\max\{\xi, \eta\} \times \max\{\xi, \eta\}| = \aleph_\beta$, па због $\omega_\alpha \subseteq \Gamma[\max\{\xi, \eta\} \times \max\{\xi, \eta\}]$ следи $\aleph_\beta \geq \aleph_\alpha$ што је контрадикција.

Дакле $\alpha \in \mathcal{A}$, па је по принципу трансфинитне индукције $\mathcal{A} = \text{Ord}$. $\square$

Последица 6.3. Нека су κ и λ произвољни кардинали од којих је барем један бесконачан. Тада је

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

Доказ. Без умањења општости нека је $\lambda \leq \kappa$. Тада је

$$\kappa \leq \kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$$

чиме смо доказали тврђење. $\square$

Дефиниција 6.10. За произвољне скупове X и I и произвољне кардинале κ и $\kappa_i, i \in I$ следеће кардинале и скупове дефинишемо са:

- $[X]^\kappa = \{x \in X \mid |x| = \kappa\};$
- $[X]^{<\kappa} = \{x \in X \mid |x| < \kappa\};$
- $\sum_{i \in I} \kappa_i = |\bigcup_{i \in I} (\kappa_i \times \{i\})|;$
- $\prod_{i \in I} \kappa_i = |\{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} \kappa_i \mid \forall i \in I (f(i) \in \kappa_i)\}|.$

Навешћемо неке примере израза кардиналне аритметике које сада знамо

Пример 6.2. 1. Нека је $f : I \rightarrow I$ бијекција. Тада важи:

- $\sum_{i \in I} \kappa_i = \sum_{i \in I} \kappa_{f(i)}$
- $\prod_{i \in I} \kappa_i = \prod_{i \in I} \kappa_{f(i)}$;

2. Нека је $A_j, j \in J$ произвољна партиција скупа I . Тада је

$$\prod_{i \in I} \kappa_i = \prod_{j \in J} \prod_{i \in A_j} \kappa_i;$$

$$3. \prod_{i \in I} \kappa^{\lambda_i} = \kappa^{\sum_{i \in I} \lambda_i};$$

4. Нека важи $\kappa_i > 1, i \in I$. Тада је

$$\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \prod_{i \in I} \kappa_i;$$

5. За сваки бесконачни кардинал κ је

$$2^\kappa = \kappa^\kappa.$$

У вези са кардиналном аритметиком навешћемо још једну битну теорему, Кунигову лему.

Теорема 6.4. Нека је $\kappa_i < \lambda_i, i \in I$. Тада је

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i.$$

Доказ. Нека је $\lambda = \bigcup_{i \in I} \lambda_i$ и нека је $P = \{f : I \rightarrow \lambda \mid \forall i \in I (f(i) \in \lambda_i)\}$.

Уочимо произвољну функцију $F : \bigcup_{i \in I} (\kappa_i \times \{i\}) \rightarrow P$. Довољно нам је да покажемо

да функција F није *на*.

Нека је за свако $i \in I$ $F_i = \pi_j \circ F$. Из чињенице да за свако $i \in I$ важи $\kappa_i < \lambda_i$ онда важи

$$\forall i \in I (\exists a_i \in \lambda_i \setminus F_i[\kappa_i \times \{i\}]).$$

Сада лако провером видимо да функција $\langle a_i \mid i \in I \rangle$ не припада P , самим тим F није *на* и доказ је завршен. $\square$

Последица 6.5. Из Кунигове леме можемо да изведемо следећа својства кардинала:

$$1. \forall x (|x| < |P(x)|)$$

Иако смо ово тврђење доказали алтернативни доказ гласио би:

$$|x| = \sum_{i \in x} 1 < \prod_{i \in x} 2 = 2^{|x|} = |P(x)|.$$

$$2. \forall \alpha (\text{cf} 2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha)$$

Нека је $\kappa_i, i \in \aleph_\alpha$ низ кардинала мањих од $2^{\aleph_\alpha}$. Тада је

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} 2^{\aleph_\alpha} = (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

$$3. \forall \alpha \forall \beta (\text{cf} \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} > \aleph_\beta).$$

$$4. \forall \alpha (\aleph_\alpha^{\text{cf} \aleph_\alpha} > \aleph_\alpha).$$

Што се тиче рада са кардиналима и кардиналном аритметиком овде за сада стајемо. Остао је још један битан појам са којим завршавамо овај рад.

6.1 Обична и генералисана континуум хипотеза

Дефиниција 6.11. За кардинал κ кажемо да је *јако граничан* ако за свако $\lambda < \kappa$ важи $2^\lambda < \kappa$.

Да бисмо на лакши начин увели континуум хипотезу увешћемо нови низ кардинала за који ће се можда испоставити и да није нови.

Дефиниција 6.12. Низ кардинала *бети* рекурзивно дефинишемо на следећи начин:

- $\beth_0 = \aleph_0$;
- $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$;
- $\beth_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \beth_\beta$, у случају граничног ординала α .

Из дефиниције видимо да је за сваки гранични ординал α кардинал $\beth_\alpha$ управо јако гранични.

Кардинал

$$\mathfrak{c} = \beth_1 = |P(\omega)|$$

зовемо и *континуум*.

Континуум хипотеза

$$\beth_1 = \aleph_1.$$

Генералисана континуум хипотеза

$$\forall \alpha (\beth_{\alpha} = \aleph_{\alpha}).$$

Низ алефа је наш стандардни низ бесконачних кардинала где је сваки члан кардинал следбеник претходног.

Први члан низа бети је заправо $2^{\aleph_0}$, што је управо кардиналност скупа реалних бројева.

Континуум хипотеза налаже да је кардинал скупа реалних бројева заправо кардинал следбеник скупа природних бројева, тј. да нема бесконачног скупа кардиналности између ове две.

Генералисана континуум хипотеза проширује ово, каже да се сваки кардинал следбеник добија тако што узмемо степен двојике претходног, $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_{\alpha}}$, и да између нема других кардинала.

Литература

- [1] Александар Перовић, Александар Јовановић, Бобан Величковић, *Теорија Скупова*, Математички факултет, Београд, 2010.
- [2] Карел Хрбачек, Томас Јех, *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker Inc., 1999.
- [3] Вилијам А. Р. Вајс, *An Introduction to Set Theory*, Универзитет у Торонту, 2008.