

Математичка гимназија

Матурски рад
из области анализе са алгебром
Неједнакости

Ученик:
Данило Миленковић

Ментор:
Милица Мисојчић
Огњановић

Београд, 2026.

Садржај

1	Увод	2
2	Јенсенова неједнакост	3
3	Караматина неједнакост	5
4	Јунгова неједнакости	8
5	Хелдерова неједнакост	9
6	Неједнакост Минковског	11
6.1	Уопштени доказ Минковског	11
6.2	Коши-Шварцова неједнакост као специјалан случај неједнакости Минковског	13
7	Неједнакости између бројевних средина	15
7.1	Доказ неједнакости	15
7.2	Проширење неједнакости између бројевних средина	18
8	Задаци	21

1 Увод

Неједнакости су један од важних појмова у математици, посебно у области анализе и алгебре. Омогућавају нам поређење бројевних израза и функција без њиховог израчунавања и имају широку примену и различитим гранама математике. У оквиру средњошколске математике оне се често јављају у разним задацима и олакшавају њихово решавање. Поред тога тренирају брзо уочавање структура у алгебарским проблемима и побољшавају логичко размишљање. Посебан значај имају у такмичарској математици, где често послуже као алат за лакше решавање проблема. Циљ овог матурског рада је да представи основне врсте неједнакости, њихове доказе и примене у задацима олимпијског нивоа. Кроз рад ће такође бити приказане занимљиве идеје које се користе у доказима ових неједнакости, као и у задацима који их користе.

2 Јенсенова неједнакост

Јенсенова неједнакост се односи на конвексност функције и даје ограничење неких вредности функције у односу на остале.

Теорема 1. Нека је $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је $f(x)$ конвексна на интервалу $x \in [a, b]$ и нека су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ненегативни реални бројеви такви да је $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, њада за све $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ важи

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

За овај доказ ћемо се ослањати на индукцију. База индукције је $n = 2$ што је управо дефиниција конвексности:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Индукциони корак је да помоћу n докажемо $n + 1$. Посматрајмо

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) = \\ &= f\left((1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \end{aligned}$$

Применом дефиниције конвексности добијамо

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq (1 - \lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \quad (1)$$

Знамо да је

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1}$$

односно

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} = 1$$

из чега можемо увести смену $\lambda'_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}}$, односно $\lambda'_i(1 - \lambda_{n+1}) = \lambda_i$.

Враћањем на неједнакост (1) и применом Јенсенове неједнакости на n елемената добијамо

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \lambda'_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$$

што је крај индукције. Аналогно се доказује у случају да је f конкавна функција и добија се обрнута неједнакост.

3 Караматина неједнакост

Дефиниција 1. Нека су низови $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ одајући и важи да је $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$. Низ a мајорира ($\succ$) низ b ако за свако $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ важи $\sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k b_i$.

Теорема 2. Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна на интервалу $[a, b]$, и нека су $x_1 < x_2 < x_3$ три реална броја који припадају том интервалу. Са k_1, k_2, k_3 ћемо редом дефинисати коефицијенте праваца сечица које пролазе кроз одговарајуће парове тачака. Тада важи распоред $k_1 > k_2 > k_3$.

Доказ.

$$k_3 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$k_2 = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

Довољно је доказати да је $k_1 > k_2$ јер се $k_2 > k_3$ доказује аналогно. Пошто је $x_1 < x_2 < x_3$ тада постоји $0 < \lambda < 1$ тако да је $x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3$. Одузимањем x_1 од обе стране добијамо $x_2 - x_1 = (1 - \lambda)(x_3 - x_1)$. Битно је да напоменемо да су обе стране позитивне, што ће нам касније користити. Пошто је f конвексна функција важи да је $f(x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_3)$, слично као у претходној једнакости одузмемо $f(x_1)$ од обе стране и добијамо $f(x_2) - f(x_1) \leq (1 - \lambda)(f(x_3) - f(x_1))$. Дељењем ове неједнакости једнакошћу коју смо претходно добили, добијамо

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{(1 - \lambda)(f(x_3) - f(x_1))}{(1 - \lambda)(x_3 - x_1)}$$

односно

$$k_3 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{(f(x_3) - f(x_1))}{(x_3 - x_1)} = k_2$$

што управо тврди теорема. □

Теорема 3. *Карамати́на неједнакост:* Нека је $f : [a_n, a_1] \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна на свом домену и нека су $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ произвољни нерастући низови такви да $a \succ b$ тада важи

$$\sum_{i=1}^n f(a_i) \geq \sum_{i=1}^n f(b_i).$$

Доказ. За свако i за које је $a_i = b_i$ њих можемо занемарити јер је $f(a_i) = f(b_i)$, и не мењају услов мајорирања. Сада су сви парови a_i и b_i различити и можемо увести c_i који ће бити коефицијент нагиба сечице која пролази кроз тачке $(a_i, f(a_i))$ и $(b_i, f(b_i))$ тада је $c_i = \frac{f(a_i) - f(b_i)}{a_i - b_i}$, односно

$$f(a_i) - f(b_i) = c_i(a_i - b_i). \quad (2)$$

Посматрајмо c_i и c_{i+1} за $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

$$c_i = \frac{f(a_i) - f(b_i)}{a_i - b_i}$$

Коришћењем теореме 1. на бројеве a_i, b_i, b_{i+1} добијамо

$$c_i = \frac{f(a_i) - f(b_i)}{a_i - b_i} \geq \frac{f(a_i) - f(b_{i+1})}{a_i - b_{i+1}}$$

јер је $b_i \geq b_{i+1}$, поново примењивањем теореме 1. на a_i, a_{i+1}, b_{i+1} добијамо

$$\frac{f(a_i) - f(b_{i+1})}{a_i - b_{i+1}} \geq \frac{f(a_{i+1}) - f(b_{i+1})}{a_{i+1} - b_{i+1}}$$

што значи да је $c_i \geq c_{i+1}$, тако да је низ $c_1, c_2, \dots, c_n$ нерастући. Такође ћемо дефинисати $S_k = \sum_{i=1}^k (a_i - b_i)$ за $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Услов мајорирања нам даје да је свако $S_k \geq 0$ и додатно $S_n = 0$, и примећујемо да важи $a_i - b_i = S_i - S_{i-1}$.

Сада се враћамо на израз који је потребно доказати:

$$\sum_{i=1}^n f(a_i) \geq \sum_{i=1}^n f(b_i)$$

ОДНОСНО

$$\sum_{i=1}^n f(a_i) - f(b_i) \geq 0$$

Користећи једначину (2) ово можемо записати на следећи начин

$$\sum_{i=1}^n c_i(a_i - b_i) \geq 0$$

ово смо показали да можемо написати као

$$\sum_{i=1}^n c_i(a_i - b_i) = c_1 S_1 + c_2(S_2 - S_1) + \dots + c_n(S_n - S_{n-1})$$

ОДНОСНО

$$\sum_{i=1}^n c_i(a_i - b_i) = (c_1 - c_2)S_1 + (c_2 - c_3)S_2 + \dots + (c_{n-1} - c_n)S_{n-1}$$

$$\sum_{i=1}^n c_i(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_{i+1})S_i$$

одавде можемо приметити да је сума са десне стране ненегативна јер за свако $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ важи $c_i - c_{i+1} \geq 0$ и $S_i \geq 0$. Самим тим добијамо враћањем уназад

$$\sum_{i=1}^n f(a_i) - f(b_i) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^n f(a_i) \geq \sum_{i=1}^n f(b_i)$$

□

4 Јунгова неједнакости

Дефиниција 2. Ако за реалне бројеве p и q важи

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

тада се бројеви p и q називају конјуговани коефицијенти.

Теорема 4. Јунгова неједнакост: Ако су p и q конјуговани коефицијенти тада за произвољне позитивне реалне бројеве a и b важи

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Доказ. Посматрајмо функцију $f(x) = e^x$. Други извод ове функције је $f''(x) = e^x$, из чега видимо да је $f''(x) > 0$ за сваки реалан број x , што значи да је функција конвексна. Увешћемо смену

$$x = \ln a^p, \quad y = \ln b^q.$$

Примећујемо да са десне стране неједнакости имамо $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ где је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ што нас наводи да применимо Јенсенову неједнакост. Функција $f(x) = e^x$ је конвексна као што смо показали, те коришћењем Јенсенове неједнакости добијемо

$$e^{\frac{\ln(a^p)}{p}} + e^{\frac{\ln(b^q)}{q}} \leq \frac{1}{p}e^{\ln(a^p)} + \frac{1}{q}e^{\ln(b^q)}$$

сређивањем добијемо

$$e^{\ln(a)+\ln(b)} \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

односно

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

□

5 Хелдерова неједнакост

Теорема 5. *Хелдерова неједнакост:* Нека су p и q конјуговани коефицијенти, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, тада за произвољне реалне бројеве $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ важи

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказ. Уведимо смену

$$A = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, B = \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Уколико је $AB = 0$ тада је се добија $0 \leq 0$. У супротном дефинишемо

$$x_i = \frac{|a_i|}{A}, y_i = \frac{|b_i|}{B}$$

Тада је

$$\sum_{i=1}^n x_i^p = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^p}{A^p} = 1$$

слично добијамо

$$\sum_{i=1}^n y_i^q = 1.$$

Уколико применимо Јунгову неједнакост на парове (x_i, y_i) добијамо следеће неједнакости

$$x_i y_i \leq \frac{x_i^p}{p} + \frac{y_i^q}{q}$$

чијим сумирањем добијамо

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n x_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n y_i^q$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

затим вратимо смене за x_i и y_i

$$\sum_{i=1}^n \frac{|a_i b_i|}{AB} \leq 1$$

и на крају вратимо смене за A и B

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

што је крај доказа.

□

6 Неједнакост Минковског

6.1 Уопштени доказ Минковског

Теорема 6. Нека је $p > 1$ реалан број и нека су $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ ненегативни реални бројеви тада важи:

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}$$

Доказ. Нека је

$$S = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p.$$

Тада важи

$$S = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i|.$$

Користећи неједнакост троугла

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|,$$

добивамо

$$S \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}.$$

Нека је

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

тада такође важи

$$q = \frac{p}{p-1}.$$

Применом Хелдере неједнакости на први збир добијамо

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|^{p-1})^q \right)^{1/q}.$$

Пошто је

$$(p-1)q = p,$$

слиеди

$$\left(\sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|^{p-1})^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/q} = S^{1/q}$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} S^{1/q}.$$

Аналогно,

$$\sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} S^{1/q}.$$

Зато важи

$$S \leq \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \right) S^{1/q}.$$

Како је

$$1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p},$$

Дељењем обе стране са $S^{1/q}$ добијамо

$$S^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Односно,

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}$$

што је крај доказа.

6.2 Коши-Шварцова неједнакост као специјалан случај неједнакости Минковског

Уколико убацимо $p = 2$ у неједнакост Минковског, а затим квадрирамо обе стране добијамо познату неједнакост:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

где су $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ две n -торке позитивних реалних бројева. Један од доказа ове неједнакости користи занимљиву идеју укључујући квадратне неједначине. Прво посматрамо израз

$$\sum_{i=1}^n (ta_i - b_i)^2 \geq 0$$

где је t реалан параметар. То другачије можемо записати као

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 - 2t \sum_{i=1}^n a_i b_i + t^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq 0$$

Увођењем смена

$$A = \sum_{i=1}^n b_i^2, B = \sum_{i=1}^n a_i b_i, C = \sum_{i=1}^n a_i^2$$

добијамо квадратну неједначину по t из које можемо закључити да је дискриминанта те квадратне неједначине мања или једнака са 0 што значи да је

$$(-2B)^2 - 4AC \leq 0$$

$$4B^2 \leq 4AC$$

$$B^2 \leq AC$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

Очигледно да би важила једнакост мора важити

$$\sum_{i=1}^n (ta_i - b_i)^2 = 0$$

за дати реалан број t из чега закључујемо да је $ta_i - b_i = 0$ за свако $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, односно

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

□

Ова неједнакост је важна јер омогућава увођење дужине у вишедимензионим векторским просторима у којима је дефинисан скаларни производ, као и дефинисање угла између два вектора. У векторском облику Коши-Шварцова неједнакост изгледа веома просто:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

Ово нам говори да је апсолутна вредност скаларног производа два вектора мања или једнака са производом модула та два вектора. Из овога се лако може извести неједнакост троугла за вишедимензионе просторе:

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

односно

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

7 Неједнакости између бројевних средина

Нека је $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ n –торка позитивних реалних бројева. Тада се неке основне бројевне средине дефинишу на следећи начин:

- Аритметичка средина: $A(a) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$;
- Геометријска средина: $G(a) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$;
- Квадратна средина: $K(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$;
- Хармонијска средина: $H(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$.

За произвољан избор n –торке важе неједнакости:

$$K(a) \geq A(a) \geq G(a) \geq H(a)$$

7.1 Доказ неједнакости

Сматра се да су још Питагорејци знали да неједнакост

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

важи за било која два броја a и b . Ово се тривијално доказује, када пребацимо све на десну страну неједнакости добијамо познату формулу за квадрат биома

$$0 \leq (a - b)^2$$

и примећујемо да једнакост важи искључиво за $a = b$. Ствари су мало другачије када узмемо произвољну n –торку, за овај доказ ћемо користити регресивну индукцију. База индукције је случај који смо већ проверили за $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Први индукциони корак је уколико неједнакост важи за бројеве n и 2:

$$A_{2n}(a) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}}{2n}$$

$$\begin{aligned}
A_{2n}(a) &= \frac{\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} + \frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{2n}}{n}}{2} \\
A_{2n}(a) &\geq \frac{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{2n}}}{2} \\
A_{2n}(a) &\geq \sqrt{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \sqrt[n]{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{2n}}} \\
A_{2n}(a) &\geq \sqrt[2n]{a_1 a_2 \dots a_{2n}} = G_{2n}(a).
\end{aligned}$$

Други индукциони корак је доказ да за сваки број облика $2^k - n$ важи ова неједнакост под условом да важи за сваки број облика 2^k што смо већ доказали.

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \dots + a_n &= nA \\
A &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + (2^k - n)A}{2^k} \\
\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + (2^k - n)A}{2^k} &\geq \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \dots a_n A^{2^k - n}} \\
A &\geq \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \dots a_n A^{2^k - n}} \\
A^{2^k} &\geq a_1 a_2 \dots a_n A^{2^k - n} \\
A^n &\geq a_1 a_2 \dots a_n \\
A &\geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = G.
\end{aligned}$$

Пошто се у неједнакости између аритметичке и геометријске средине за два броја неједнакост постиже само када су a и b међусобно једнаки и такође једнаки аритметичкој и геометријској средини то значи да се једнакост у добијеним неједнакостима добија искључиво када су a и b међусобно једнаки.

Неједнакост између геометријске и хармонијске неједнакости се после овога лако доказује јер је потребно само бројеве $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ заменити броје-

вима $(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n})$ и добићемо следећу неједнакост.

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2} \dots \frac{1}{a_n}}.$$

Узимањем реципрочне вредности од обе стране се обрће знак неједнакости и добијамо управо оно што смо желели.

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Последња од ове три неједнакости нам остаје неједнакост између квадратне и аритметичке, која се такође своди на неједнакост аритметичке и геометријске или другим речима на паковање на квадрате бинума, на следећи начин:

$$K = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

$$K^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}$$

$$A^2 = \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2$$

$$K^2 - A^2 = \frac{n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n^2}$$

$$K^2 - A^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2 \geq 0$$

$$K^2 \geq A^2$$

$$K \geq A.$$

7.2 Проширење неједнакости између бројевних средина

Ово се може генерализовати: ако је $p \neq 0$ произвољан реалан број тада се може дефинисати $M_p(a) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Примећујемо да је при овој дефиницији $A(a) = M_1(a)$, $K(a) = M_2(a)$, $H(a) = M_{-1}(a)$. На први поглед геометријска средина се не може приказати у овом облику, и да смо прескочили M_0 . То по дефиницији не би ни имало смисла јер у степену имамо $\frac{1}{p}$. На сву срећу можемо узети $\lim_{p \rightarrow 0} M_p$. Посматрајмо следеће:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \ln(M_p) = \ln \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \ln(M_p) = \frac{1}{p} \ln \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n} \right).$$

Можемо другачије написати сабирке a_i^p као $e^{p \ln a_i}$, а такође пошто $p \rightarrow 0$ тада и $p \ln a_i \rightarrow 0$, можемо уврстити $e^{p \ln a_i} = 1 + p \ln a_i + o(p)$. Тиме добијамо

$$\lim_{p \rightarrow 0} \ln(M_p) = \frac{1}{p} \ln \left(\frac{1 + p \ln a_1 + 1 + p \ln a_2 + \dots + 1 + p \ln a_n}{n} \right)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \ln(M_p) = \frac{1}{p} \ln \left(1 + \frac{p \ln a_1 + p \ln a_2 + \dots + p \ln a_n}{n} \right)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \ln(M_p) = \frac{1}{p} \ln \left(1 + \frac{p (\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n)}{n} + o(p) \right).$$

Истим принципом као пре пар корака закључујемо да $p \left(\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n} \right) \rightarrow 0$, те можемо применити развој функције $\ln(1 + x)$ у околини 0. Тиме се наш

израз своди на следеће:

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow 0} \ln(M_p) &= \frac{1}{p} \frac{p (\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n)}{n} \\ \lim_{p \rightarrow 0} \ln(M_p) &= \frac{\ln(a_1 a_2 \dots a_n)}{n} \\ \lim_{p \rightarrow 0} \ln(M_p) &= \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \\ \lim_{p \rightarrow 0} M_p &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = G.\end{aligned}$$

Између сваке две овакве средине постоји неједнакост и она прати правило да ако је $p < q$ онда је $M_p(a) \leq M_q(a)$ за било који избор n -торке $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Следећи доказ ове неједнакости користи Јенсенову неједнакост коју ћемо касније поменути и доказати.

Први случај је када је $0 < p < q$.

$$\begin{aligned}M_p &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^q \right)^{\frac{1}{q}} = M_q \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^p &\leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^q \right)^{\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

Сада применимо смене $r = \frac{p}{q}$ и $b_i = a_i^q$ за $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, и приметимо да је при тој смени $a_i^p = a_i^{qr} = b_i^r$.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i^r \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right)^r$$

Можемо препознати да је ово Јенсенова неједнакост за функцију $f(x) = x^r$. Знамо да је $p < q$ па је $0 < r < 1$, рачунањем другог извода функције $f(x) = x^r$ добијамо $f''(x) = r(r-1)x^{r-2}$ што је негативно за све $x \geq 0$, одатле је

функција $f(x)$ конкавна па применом Јенсенове неједнакости добијамо:

$$f\left(\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}f(b_1) + \frac{1}{n}f(b_2) + \dots + \frac{1}{n}f(b_n)$$

што је убацивањем вредности управо тражена неједнакост.

Други случај је када важи $p < 0 < q$, и нека гледамо одговарајуће бројевне средине над n -торком $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Са b_i ћемо означити a_i^q . Знамо да важи:

$$\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n}$$

$$\frac{a_1^q + a_2^q + \dots + a_n^q}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}^q.$$

С обзиром да је $q > 0$, односно $\frac{1}{q} > 0$ па се степеновањем обе стране на $\frac{1}{q}$ не мења смер неједнакости, док ће се за p обрнути, из чега следи следећи распоред неједнакости $M_p \leq M_0 \leq M_q$.

Трећи случај је када важи $p < q < 0$. Овај случај је веома сличан првом случају само је разлика у томе што када степенујемо на p привремено ће се обрнути знак неједнакости, а друго обртање знака ће проузроковати то што је $|p| > |q|$ па је $r > 1$ што значи да је $f(x) = x^r$ конвексна а не конкавна функција што мења знак у Јенсеновој неједнакости. Из ова три случаја закључујемо да за свака два реална броја $p < q$ важи $M_p \leq M_q$

8 Задаци

Задатак 1. (ЈБМО шортлиста 2024, А5) Наћи све тројке (a, b, c) реалних бројева које задовољавају следеће једнакости:

$$a + b + c = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}, \quad ab + bc + ca = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Решење: Почећемо са познатом неједнакошћу

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx, \quad (3)$$

коју ћемо користити у овом задатку. Доказ ове неједнакости је да пребацимо све на леву страну и приметимо да се може раставити на квадрате бинома, чији је збир очигледно већи или једнак са 0.

Приметимо да важи

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{3}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{3}$$

односно

$$3(a+b+c) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2$$

из задатка знамо да је ово исто што и

$$(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2$$

Применом неједнакости (3) на бројеве $x = ab, y = bc, z = ac$ добијамо

$$3(a+b+c) \geq (ab + bc + ca)^2 \geq 3a^2bc + 3ab^2c + 3abc^2 = 3abc(a+b+c)$$

Из овога добијамо $abc \leq 1$. Сада Посматрајмо

$$4 \sum_{cyc} a = \sum_{cyc} a + 3 \sum_{cyc} \frac{1}{a^3}$$

Коришћењем неједнакости између аритметичке и геометријске средине закључујемо

$$\frac{a + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^3}}{4} \geq \sqrt[4]{a \left(\frac{1}{a^3}\right)^3} = \frac{1}{a^2}$$

Сабирањем три аналогне неједнакости добијамо

$$4 \sum_{cyc} a \geq 4 \sum_{cyc} \frac{1}{a^2}$$

Ако применимо неједнакост (3) на овај израз добијамо

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2} \geq \sum_{cyc} \frac{1}{ab} = \frac{a+b+c}{abc}$$

из чега следи

$$4(a+b+c) \geq \frac{4(a+b+c)}{abc} \geq 4(a+b+c)$$

па одатле имамо да свуда између важе неједнакости, конкретно у неједнакости између аритметичке и геометријске средине одакле добијамо

$$a = \frac{1}{a^3}$$

односно $a^4 = 1$, $a = 1$, аналогно се добија $a = b = c = 1 = abc$ из чега се провере остале неједнакости као и почетне једнакости, чиме је задатак завршен.

Задатак 2. (Олимпијинско такмичење за 4. разред А категорија 2026.) Нека су a , b и c ненегативни реални бројеви такви да важи $a + b + c = 1$. Наћи највећу могућу вредност израза

$$S(a, b, c) = a \ln(1+b) + b \ln(1+c) + c \ln(1+a).$$

Решење: Примећујемо да имамо три слична сабирка где је сваки помножен коефицијентом и збир свих тих коефицијената је 1, то нас наводи да применимо Јенсенову неједнакост. Узећемо да је $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b, \lambda_3 = c$ и $f(x) = \ln(1+x)$. Можемо проверити да је функција f конкавна јер је њен други извод $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$. Када применимо Јенсенову неједнакост на ово добијамо

$$S(a, b, c) = \lambda_1 f(b) + \lambda_2 f(c) + \lambda_3 f(a) \leq f(\lambda_1 b + \lambda_2 c + \lambda_3 a) = \ln(1 + ab + bc + ca).$$

Пошто је логаритам растућа функција можемо максимизовати израз под логаритмом и добити решење. Посматрајмо сада следеће

$$1 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca + 3(ab + bc + ca)$$

Као у претходном задатку користићемо неједнакост $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$, чиме добијамо

$$1 \geq 3(ab + bc + ca)$$

односно

$$S(a, b, c) \leq \ln(1 + ab + bc + ca) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

Једнакост се достиже за $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Задатак 3. (ИМО 2000. 2. задатак) Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да важи $abc = 1$. Докажи да важи

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right).$$

Решење: С обзиром да важи $abc = 1$ знамо да постоје позитивни реални бројеви x, y, z тако да важи

$$a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}.$$

Увођењем ове смене можемо записати тражену неједнакост у следећем облику

$$\left(\frac{x+z-y}{y}\right)\left(\frac{y+x-z}{z}\right)\left(\frac{y+z-x}{x}\right) \leq 1$$

односно

$$(x+z-y)(x+z-y)(x+z-y) \leq xyz.$$

Када применимо неједнакост између аритметичке и геометријске средине на бројеве $x+z-y$ и $x+y-z$ добијамо следеће

$$\sqrt{(x+y-z)(x+z-y)} \leq \frac{x+y-z+x+z-y}{2} = x.$$

Множењем аналогних неједнакости добијамо неједнакост

$$(x+z-y)(x+z-y)(x+z-y) \leq xyz$$

чиме је доказ неједнакости завршен и остаје проверити када важи једнакост, а то је уколико су чланови геометријских средина једнаки односно $x+y-z = x+z-y$ из чега следи $y = z$. Аналогно $x = y = z$ што значи $a = b = c = 1$.

Задатак 4. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви, тада важи

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{b+a} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Решење: Ову неједнакост ћемо доказати помоћу Хелдере неједнакости, иако на први поглед тражена неједнакост није уопште сличног облика као Хелдерева неједнакост. Уколико уведемо смену

$$x_1^2 = \frac{a^2}{b+c}, \quad x_2^2 = \frac{b^2}{a+c}, \quad x_3^2 = \frac{c^2}{b+a}$$

и другу смену

$$y_1^2 = b+c, \quad y_2^2 = c+a, \quad y_3^2 = b+a,$$

где су $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ позитивни реални бројеви. Примећујемо да важи

$$x_1 y_1 = a, \quad x_2 y_2 = b, \quad x_3 y_3 = c.$$

Када запишемо Хелдерову неједнакост за ове бројеве добијамо следеће

$$\left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^3 y_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i \right)^2$$

враћањем смена добијамо

$$\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{b+a} \right) ((b+c) + (a+c) + (b+a)) \geq (a+b+c)^2$$

што је исто што и

$$\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{b+a} \right) (2(a+b+c)) \geq (a+b+c)^2$$

односно

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{b+a} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Литература

- [1] Art of Problem Solving, *AoPS*, доступно на: AoPS
- [2] Зоран Каделбург, Владимир Мићић, Срђан Огњановић, *Анализа са алгебром уџбеник за 4. разред Мајеммајичке гимназије*
- [3] Википедија, *Коши-Шварцџва неједнакости*, доступно на: Коши-Шварцова неједнакост
- [4] З. Каделбург, Д. Ђукић, М. Лукић, И. Матић, *Неједнакости*, Београд 2021.