

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД
- из физике -

Сепарација сигнала Хигсовог бозона

Ученик:
Душан Бегуш IVд

Ментор:
Горан Качаревић

Београд, јун 2022.

Садржај

0	Предговор првом делу рада	1
0.1	Захвалност	2
1	Теорија	3
1.1	Дискретан пример	3
1.2	Континуалне симетрије	5
1.3	Генерализовани случај	6
1.4	Квантно извођење Голдстонових бозона	8
1.5	Скаларни QED	14
1.6	Градијентне теорије	16
1.7	Додатак о градијентним теоријама	17
1.8	Стандардни модел и електрослабе интеракције	19
1.9	Спаривање са лептонима	23
1.10	Мион, Тау	27
1.11	Кваркови	28
1.12	Кратка прича о неутринима	30
2	Интермецо - Рачун Фајнманове амплитуде	31
2.1	Први део	31
2.2	Пропагатори	32
2.3	Фајнманова амплитуда за процес који нас интересује	34
3	Увод у други део рада	35
3.1	Компактни линеарни сударач	35
3.2	Анализа распада који ће нас занимати	37
3.3	Како ради стабло одлуке?	39
3.4	Информација и ентропија	39
4	Фаза тренинга	43
4.1	Преселекција	45
4.2	Мултиваријантна анализа	46

САДРЖАЈ

5	Фаза апликације - Резултати	51
	Литература	52
6	Апендикс А - Лијеве групе	57
6.1	Лијеве алгебре	58
7	Апендикс Б - Репрезентације	61
8	Апендикс Ц - Разно	65
8.1	Вордови идентитети	65
8.2	Хиралност	68
8.3	РСТ	71

0 Предговор првом делу рада

Матурски рад ће се бавити експерименталним методама које ће се користити на будућем компактном линеарном сударачу -"CLIC"-у.

Први део рада се бави теоријским развићем процеса који ћемо ми истраживати. Он је доста сложен, и сама математика коју ћемо користити како бисмо га описали у великој мери превазилази знање које се захтева од ученика средње школе. Стога је аутор додао и три апендикса на крају рада који се баве развићем неких основних математичких пререквизита који се константно користе у физици.

Аутор се дубоко и искрено нада да је рад читљив.

Конвенције у теоријском делу рада:

$$\sim = 1$$

$$c = 1$$

0.1 Захвалност

Овај рад умало не би био пријављен на време да није било моје сестре. Она зна зашто и хвала јој до неба.

Пре свега бих хтео да се захвалим професору др. Ивану Станићу и професору др. Дејану Ђокићу. Њих двојица су ме свакако својим предавањима и физичарским ентузијазмом подстакли да своје иницијално интересовање за физику претворим у велику количину знања из ове области. Такође бих желео да се захвалим Милошу Пурићу (IVd) на дискусији о машинском учењу по његовом повратку из CERN-а.

Захвалност дугујем целој групи за Експерименталну физику високих енергија Института за нуклеарне науке "Винча". У Винчи сам топло дочекан и тамо сам био третиран као какав академски радник, а не као неискусан средњошколац.

Коначно, посебну захвалност дугујем свом ментору, Горану Качаревићу, који ми је био на располагању свих ових месеци док сам писао матурски рад. Хтео бих да му се захвалим на издвојеном времену и пажњи, као и на гомили асистенција приликом израде матурског, почевши од торијала употребе терминала на Linux-у, па све до објашњења одабира осетљивих варијабли у програмима машинског учења. Свом ментору желим успешну одбрану доктората и много успеха на личном и академском плану у будућности.

1 Теорија

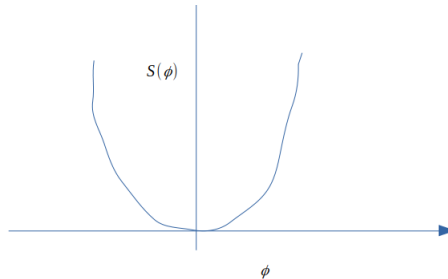
Прва три теоријска поглавља у огромној мери су позајмљена из [4]. Аутор не намерава да узме икакве заслуге за просту репродукцију ових сјајних лекција из Стандардног модела, мада је осећао потребу да на прави начин уведе Стандардни модел пре практичног дела свог рада. Да бисмо демонстрирали Хигсов механизам на одговарајући начин у Стандардном моделу, најбоље је прво одабрати један једноставнији пример скаларне QED која ће нам објаснити механизам спонтаног нарушења симетрије. Али пре свега тога ћемо имати кратак увод у Голдстонове бозоне.

1.1 Дискретан пример

Нека је наша теорија

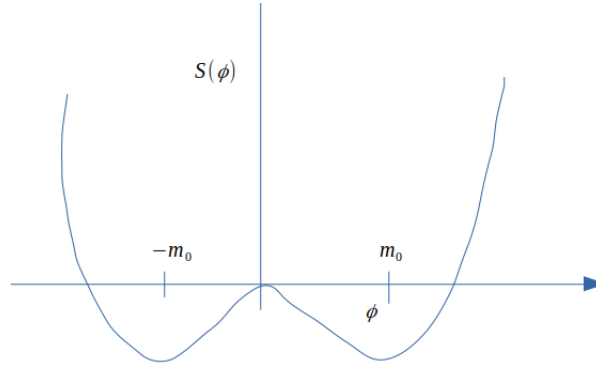
$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

За неко $\lambda > 0$. Међутим, за m^2 нећемо поставити никакву неједнакост. Најчешћи случај у физици је свакако $m^2 > 0$, где поље $\phi = 0$ представља вакуум теорије (задовољава једначину стационаризације акције).



Међути, ако је $m^2 < 0$, онда график акције од стационарног поља узима

друкчији профил



где је m_0 нови вакуум теорије.

$$V(\phi) = \frac{1}{4}(\phi^2 - v^2)^2 + \text{const}$$

Где је вакуум поља

$$v = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}$$

Поље ће у другом случају, како би екстремизовало своју акцију, морати да одабере једно од два очекивана стања вакуума (VEV-vacuum expectation value). Овај механизам у својој суштини управо и јесте спонтано нарушење симетрије: На почетку смо имали теорију чији је Лагранжијан био инваријантан у односу на трансформацију \mathbb{Z}_2 , али је поље морало да одабере један од вакуума теорије и пробије симетрију нашег Лагранжијана Z_2 тако да преостане симетрија тривијалне групе нашег вакуума.

Ова изјава је много озбиљнија него што се испрва мислило за њу. Наиме, када описујемо фазе материје преко квантне теорије поља које јој одговарају, верује се да се фаза може окарактерисати само двома симетријама, које популарно зовемо G и H . (За називе ове две групе треба кривити Лева Ландауа.) G представља групу симетрија самог Лагранжијана (густине Лагранжијана) теорије, док је H група симетрија вакуума теорије. Врло често су G и H Лијеве групе за недискретне симетрије. Голдстонова теорема ће димензију многострукости $\frac{G}{H}$ претворити у број безмасених екситација теорије. О томе више у наредним поглављима. За сада ћемо урадити следећу ствар, написаћемо поље $\phi(x)$ у околини једног свог вакуума као

$$\phi(x) = v + f(x)$$

Тада је Лагранжијан теорије

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu f \partial^\mu f - (v^2 f^2 + v f^3 + \frac{1}{4} f^4)$$

Односно поље f добија масу

$$m_f = \frac{2v}{v}$$

Овај Лагранжијан није инваријантан у односу на $f \rightarrow f + \text{const}$.

1.2 Континуалне симетрије

Размотримо генерализацију прошлог сценарија са $O(N)$ теоријом. Нека је поље $\phi(x) = (\phi_1(x); \phi_2(x); \dots; \phi_N(x))^T$ са акцијом

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^T (\partial^\mu \phi) - V(\phi)$$

и

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{v}{4!} \phi^4 = \frac{1}{4} (m^2 - v^2) \phi^2 + \text{const}$$

Где захтевамо да је $m > 0$.

$$v = \sqrt{\frac{m^2}{2}} > 0$$

Према томе, било које ϕ са $\phi^2 = v^2$ се сматра вакуумом система, и имамо континуум вакуума. Овај потенцијал се често у литератури назива *Sombrero* потенцијал.

Без губљења општости изаберимо да вакуум буде

$$\phi_0 = (0; 0; \dots; v)^T$$

Можемо онда да посматрамо флуктуације око њега

$$\phi(x) = (\phi_1(x); \phi_2(x); \phi_3(x); \dots; v + \phi_N(x))^T$$

Када напишемо Лагранжијан преко ϕ поља, добијамо:

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x))^T (\partial^\mu \phi(x)) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x))^T (\partial^\mu \phi(x)) - V(\phi(x))$$

и

$$V(\phi; \psi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + v(\phi^2 + \psi^2) + \frac{\lambda}{4} (\phi^2 + \psi^2)^2$$

Видимо да ϕ поље има масу

$$m = \frac{v}{\sqrt{2}} \sqrt{\lambda}$$

док су ψ поља безмасена!

Екситације ψ -поља се популарно зову Голдстонови бозони.



Горња слика је преузета из [10].

Геометријска интуиција иза Голдстонових бозона је јасна, јер када бисмо посматрали хесијанску матрицу потенцијала у односу на поље у околини нашег вакуума, добили бисмо једну не-нула њену својствену вредност и $(N-1)$ нула-сопствених вредности. Да ли можемо да уопштимо ове исказе на генерализовану теорију? Да!

1.3 Генерализовани случај

Нека имамо N -поље $\phi(x) = (\phi_1(x); \phi_2(x); \dots; \phi_N(x))^T$ и нека оно има Лијеу групу симетрија G .

Претпоставка.

G чува кинетичке и потенцијалне чланове густине Лагранжијана индивидуално.

У преводу, G шаље један вакуум у други вакуум. Нека је

$$\Phi_0 = f_0 : V(\phi_0) = V_{min} g$$

скуп вакуума теорије. Одаберимо произвољни вакуум $\phi_0 \in \Phi_0$, и желимо да видимо који елементи фиксирају овај вакуум. Нека је

$$H = \text{stab}(\phi_0) = \{h \in G : h \phi_0 = \phi_0\}$$

Ово је инваријантна подгрупа, или ти стабилизаторска подгрупа за ϕ_0 . У теорији група постоји једна веома корисна теорема која нам омогућава да идентификујемо елементе скупа косета $\frac{G}{H}$ са елементима орбите тачке која се прави групом G . Формулишимо је.

Теорема 1. *Neka grupa G deluje na skup X . Onda za svako $x \in X$ postoji bijekcija izme $u G / x$ i G/G_x , data sa $g \in G / x \mapsto g \cdot x \in G_x$.*

Други део ове теореме односи се на коначне групе па га нећемо записати.

Претпоставка

G делује на Φ_0 транзитивно.

Ова претпоставка осигурава потпуну еквиваленцију између вакуума, тј. произвољност у избору преферираног вакуума. Уколико имамо два вакуума у односу

$$\phi_0 = g \cdot \phi_0$$

Онда је

$$\text{stab}(\phi_0) = g \text{stab}(\phi_0) g^{-1}$$

Према томе сви избори стабилизатора за различите вакууме су изоморфни. Шта се дешава када радимо пертурбације око нашег вакуума? Нека је $\phi = \phi_0 + \delta\phi$, имамо

$$V(\phi_0 + \delta\phi) - V(\phi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial s} \right)_s \delta r + O(\delta^3)$$

Члан са дуплим парцијалним изводом по r се назива *masena matrixa* из очигледних разлога.

$$M_{rs}^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial s}$$

Желимо да пронађемо моде које постају безмасене.

Изаберимо базис \tilde{h}_a алгебре \mathfrak{h} и продужимо га до базиса \tilde{h}^a ; $\tilde{h}^a g$ од \mathfrak{g} . Посматрајмо варијацију

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi$$

око ϕ_0 , где је $\tilde{h}^a \phi_0$ акција елемента алгебре \mathfrak{g} над ϕ_0 , која може бити и нула. Ипак, знамо да \tilde{h}^a није у \mathfrak{h} , па самим тим *ne fiksira* ϕ_0 . Генерална особина G -симетрије теорије је свакако да имамо за свако $\phi(x)$,

$$\mathcal{L} + \tilde{h}^a$$

$$V(\phi + \psi) = V(\phi)$$

Према томе,

$$V(\phi + \psi) - V(\phi) = (\psi^a)^r \frac{\partial}{\partial r} V = 0$$

Узмимо извод горњег израза по ψ^a .

$$0 = \frac{\partial}{\partial \psi^a} \left((\psi^a)^r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial \psi^a} (\psi^a)^r \frac{\partial V}{\partial r} + (\psi^a)^r \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \psi^a}$$

Први члан израчунат на $\psi^a = 0$ је очигледно 0 (из разлога екстремизације акције), док је други члан оно што је нама потребно и говори нам о следећој релацији

$$(\psi^a = 0)^r M_{rs}^2 = 0$$

Према томе, пронашли смо "нулту моду" поља. Генератора ψ^a има $\dim G$ $\dim H$, и самим тим смо "покрили" све Голдстонове бозоне.

Међутим, ми бисмо и даље желели мало формалније извођење претходне релације, можда баш у духу квантне теорије ...

1.4 Квантно извођење Голдстонових бозона

Поново, претпоставимо да Лагранжијан има групу симетрија G , која се ломи на групу симетрија вакуума H при спонтаном нарушењу.

Поново, обележимо генераторе Лијевих алгебри са f^a ; g^a , где су f^a генератори \mathfrak{h} , $f^a g^a$ остатак генератора \mathfrak{g} тако да ова два скупа заједно чине базис алгебре \mathfrak{g} .

Како бисмо разумели који индекс иде где, само ћемо исписати базис:

$$f^1; f^2; \dots; f^{\dim H}; f^{\dim H+1}; f^{\dim H+2}; \dots; f^{\dim G}$$

За следећи есенцијални део рачуна морамо се позвати на резултат из Апендикса Ц, који је урађен одмах после извођења Вордових идентитета. Дакле, за сваку симетрију Лагранжијана, можемо наћи очувану струју $j^a(x)$. Ове очуване струје наравно дају очувана наелектрисања Q_a .

$$Q_a = \int d^3x j_a^0(x)$$

И наравно, имамо претходно поменути идентитет доста познат физичарима, јер подсећа на сличан израз из квантне механике

$$= [Q^a; \dots]$$

Знамо да, како a пробија симетрију вакуума $|0\rangle$, имамо следећу релацију

$$\langle 0 | [Q^a; j_0^a(x)] | 0 \rangle \neq 0$$

Избор тачке $x = 0$ је произвољан.

$$\int d^3x \langle 0 | [j_a^0(0); j_0^a(x)] | 0 \rangle \neq 0$$

Уочимо да Лоренцовим трансформацијама можемо да вртимо индекс 0 у претходној једначини са осталим индексима, и самим тим ми заправо желимо генералну релацију

$$X_a = \int d^3x \langle 0 | [j_a(0); j_0^a(x)] | 0 \rangle \neq 0$$

Третирамо два члана из комутатора посебно.

$$\langle 0 | [j_a(0); j_0^a(x)] | 0 \rangle = \sum_n \langle 0 | [j_a(0); j_n] | 0 \rangle \langle 0 | j_0^a(x) | n \rangle$$

Нека је p_n импулс стања $|n\rangle$. Имамо и операторску релацију из квантне механике

$$j^a(x) = e^{ip_n x} j^a(0) e^{-ip_n x}$$

Која долази из прости обсервације да је $e^{ip_n x}$ оператор translације. И имамо

$$\langle 0 | [j_a(x); j_n] | 0 \rangle = \langle 0 | [j_a(0); j_n] | 0 \rangle e^{-ip_n x}$$

Директном верификацијом видимо да је горњи израз заправо једнак

$$i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \tilde{a}_a(k) e^{ikx}$$

Где је

$$\tilde{a}_a(k) = (2\pi)^3 \sum_n \langle 0 | j_a(0) | n \rangle \langle 0 | j_n | k \rangle$$

Слично дефинишемо

$$\tilde{a}_a(k) = (2\pi)^3 \sum_n \langle 0 | j_n | k \rangle \langle 0 | j_a(0) | n \rangle$$

И имамо

$$\chi^a = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} (a(k)e^{ikx} - \tilde{a}(k)e^{ikx})$$

Добили смо популарно-звану Келен-Леманову спектралну репрезентацију.

А сада, три (физичарска) закључка о природи $a(k)$ и $\tilde{a}(k)$.

1. Како је $a(k)$ Лоренц-вектор, оно може бити једнако само Лоренц-скалару помноженим са k .
2. $a(k)$ мора да нестане за $k^0 < 0$, зато што не желимо да имамо негативне енергетске екситације у теорији (неприродне су, за дискусију Дираковог мора фермиона гледати у неку од референци понуђених у секцији Литература).
3. По Лоренц-инваријантности, остатак $a(k)$ може да зависи по величини само од k^2 .
4. Аналогни закључци важе и за $\tilde{a}(k)$

Под овим претпоставкама имамо и мало бољи запис наших функција

$$\begin{aligned} a(k) &= k \Theta(k^0) a(k^2) \\ \tilde{a}(k) &= k \Theta(k^0) \tilde{a}(k^2) \end{aligned}$$

И можемо написати

$$\chi^a = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} k \Theta(k^0) (a(k^2)e^{ikx} - \tilde{a}(k^2)e^{ikx})$$

Сада имамо трик, који подразумева диференцијацију под интегралом, физичарски други омиљени трик (први је, наравно, парцијална интеграција на многострукостима без границе).

$$\chi^a = \partial \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \Theta(k^0) (a(k^2)e^{ikx} + \tilde{a}(k^2)e^{ikx})$$

Сада смо већ на познатој територији. Подсетник: Ево како изгледа пропагатор за ову теорију:

$$D(x; y) = \langle 0 | j(x) (0) j(0) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \Theta(k^0) (k^2 - m^2) e^{ikx}$$

Где је $\omega = m^2$.

Имамо такође и просту релацију

$$a(k^2) = \int d^4x \langle 0 | T \phi(x) \phi^\dagger(0) | 0 \rangle$$

Добијамо

$$X^a = \int d^4x \langle 0 | T \phi(x) D(x; 0) + \phi^\dagger(x) D(0; x) | 0 \rangle$$

Такође, једна од основних особина пропагатора је да, за $x^2 < 0$, имамо да важи $D(x; 0) = D(0; x)$ (Видети [5]).

Сада следи веома битна анализа. Уколико је $x^2 < 0$, то значи да можемо да одаберемо референтни систем у коме оператори $j_a(x; 0)$ делују на вакуум оба у тренутку $t = 0$. Због основне каузалности простор-времена, очекујемо да та два оператора комутирају у том случају. Самим тим, за $x^2 < 0$, имамо

$$X^a = 0 \text{ за } x^2 < 0$$

тј.

$$a(k^2) = \tilde{a}(k^2)$$

И пишемо

$$X^a = \int d^4x \langle 0 | T \phi(x) i\Delta(x; 0) | 0 \rangle$$

и

$$i\Delta(x; 0) = D(x; 0) - D(0; x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} (k^2 - \omega) (k^0) e^{ikx}$$

и

$$(k^0) = \begin{cases} +1; & k^0 > 0 \\ -1; & k^0 < 0 \end{cases}$$

Имамо и једначиу очувања струје

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

И морамо имати

$$\partial_\mu X^\mu = \int d^4x \langle 0 | T \partial_\mu \phi(x) i\Delta(x; 0) | 0 \rangle = 0$$

Са друге стране, Δ задовољава Клајн-Гордонову једначину за наше поље (као и већина пропагатора теорије):

$$(\partial^2 + m^2)\Delta(x; y) = 0$$

И, коначно, одатле можемо тривијално да запишемо

$$\partial_\mu X_a = \int d^4x \partial_\mu(x; y) i\Delta(x; y) = 0$$

За избор сваког x , чак и за $x^2 > 0$, где Δ пропагатор не нестаје.

Самим тим, из неког чудног разлога ова једнакост мора бити испуњена:

$$\partial_\mu(x; y) = 0$$

За све y . Али $\partial_\mu(x; y)$ не може бити идентички нула, зато што X^a није, као што смо видели у уводу у секцију.

Самим тим, без улажења у математичку ригорозност, можемо да оценимо да ће $\partial_\mu(x; y)$ имати облик

$$\partial_\mu(x; y) = N^a \partial_\mu(x; y)$$

N^a је нека константа (није број).

Функција $\partial_\mu(x; y)$ ће тада очигледно бити идентитет. Испоставља се да је ово тачан израз за $\partial_\mu(x; y)$, мада нећемо улазити много дубље од овога у сам доказ.

Сада се враћамо на оригиналне дефиниције a , \tilde{a} .

$$i \partial_\mu(k) = (2\pi)^3 \sum_n \delta(k - p_n) \langle 0 | j^a(0) j^\mu(p) | 0 \rangle j_0 i$$

$$\partial_\mu(k) = k_\mu \Theta(k^0) \partial_\mu(k^2)$$

Сви ови изрази нам заправо говоре да постоје екситације поља $jB(p)i$ за које $\langle 0 | j^a(0) jB(p) | 0 \rangle \neq 0$, $\langle 0 | j^\mu(p) j_0 | 0 \rangle$, за које је $p^2 = 0$.

Једнакост $p^2 = 0$ имплицира да је екситација безмасена, тј. добили смо *Goldstone bozone* теорије!

Сада је остало још само мало естетског улепшавања теорије. Нека је

$$\langle 0 | j^a(0) jB(p) | 0 \rangle = iF_B^a p$$

$$\langle 0 | j^\mu(p) j_0 | 0 \rangle = Z_B$$

Изразе опет закључујемо из Лоренц-инваријантности теорије.

Уочавамо да F_B^a има масену димензију -1 , а Z_B има масену димензију 0 .

Такође, знамо да спин ексцитације зависи од ранка тензора поља ексцитације. Како је $\hbar B(p)$ $(0)j0ij$ скалар, а $(0)j0i$ је такође скалар, $jB(p)i$ је ексцитација спина 0.

Сада желимо да урадимо још мало рачуна. Комбинујући све формуле које смо до сада имали, добијамо

$$\hbar j [j^a(x); (0)] j0i = \int d^3x N^a(x) i \Delta(x; 0) = i N^a \Delta(x; 0)$$

Интеграцијом по простору добијамо

$$\hbar j [Q^a; (0)] j0i = \int d^3x i N^a \Delta(x; 0)$$

И онда имамо

$$\hbar j t_a (0) j0i = i \hbar j [Q_a;] j0i$$

Присетимо се да је

$$i \Delta(x;) = D(x;) \quad D(x;) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} (k^2) (k^0) e^{ikx}$$

Сада радимо следећи трик: Пошто је наелектрисање очувано, израчунаћемо га на time slice-у који одговара $t = 0$. Затим ћемо да развијемо пропагатор по $\Delta(x; 0; 0)$ и $\Delta(x; t; 0)$.

$$\Delta(x; 0; 0) = 0$$

По "каузалној структури" пропагатора.

$$i \Delta(x;) = D(x;) \quad D(x;) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} (k^2) (k^0) e^{ikx}$$

$$0 + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} (k^2) (k^0) (-ik^0 t) e^{ikx} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (-it) e^{ikx} = -it \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ikx}$$

И одатле добијамо

$$\hbar j [Q^a; (0)] j0i = \int d^3x i N^a \Delta(x; 0) = i N^a$$

После очигледно имамо

$$\hbar j t_a (0) j0i = i \hbar j [Q_a; (0)] j0i = i i N_a = -N_a$$

Такође, ако убацимо Лоренц-инваријантну меру у наше изразе, можемо и ово написати

$$ik \Theta(k^0) N_a(k^2) = \sum_B \int \frac{d^3 p}{2|p_j|} {}^{(4)}(k-p) \langle 0 | j_a(0) j_B(p) | 0 \rangle$$

А леву страну израза можемо заправо написати као интеграл

$$\int \frac{d^3 p}{2|p_j|} {}^{(4)}(k-p) ik N_a = \int \frac{d^3 p}{2|p_j|} {}^{(4)}(k-p) ip \sum_B F_a^B Z^B$$

Па одавде очигледно видимо

$$N_a = \sum_B F_a^B Z^B$$

Овај процес можемо да поновимо за свако $a \in \mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, и самим тим имамо $n = \dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h}$ Голдстонових бозона.

Овај доказ се свакако заснива на Лоренц-инваријантности теорије, али је такође заснован и на позитивној-дефинитној норми стања у Хилбертовом простору теорије (што је мање уочљиво, а заправо утиче на то да не можемо да применимо овај исти поступак за рачунање мода у gauge теоријама, јер у њима имамо идентификовање различитих ексцитација поља повезаних градијентном трансформацијом). Конкретно, услов позитивне-дефинитности се види на идентичном оператору који конструишемо на веома стандардан начин

$$1 = \sum_n |n\rangle \langle n|$$

1.5 Скаларни QED

$$L = \frac{1}{2} D^\mu \phi D_\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} j_\mu j^\mu - j \phi^4$$

и

$$D = \partial + ieA$$

Ово је скаларни QED. Уколико је $v^2 < 0$, Хигсово поље које одговара скаларном пољу у овом случају ће да добије VEV.

$$= e^i \frac{1}{\sqrt{2}} (v)$$

Где је $(x) = v$ произвољно, а $v^2 = -2 R$. Можемо и да напишемо како ће изгледати лонгитудиналне екситације тог поља (не-Голдстонове моде)

$$(x) = e^i \frac{1}{2} (v + (x))$$

Сада можемо да урадимо градијентну трансформацију теорије тако да је

$$(x) = \frac{1}{2} (v + (x))$$

Али смо тиме фиксирали избор конекције за A . // Затим можемо да заменимо овај израз назад у Лагранжијан и раширимо га по масеној екситацији (x) . Овај избор локалне тривијализације се често назива унитарни gauge.

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi - q A_\mu)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{q^2 v^2}{2} A_\mu A^\mu + L_{int}$$

Где је, наравно, L_{int} интеракциони део Лагранжијана, најзанимљивији део заправо, до ког ћемо доћи за моменат.

Добро је познато да екситације електромагнетног поља, тј. фотони, немају масу. Међутим, *Higgs boson* у скаларном QED електромагнетно поље добија масу спонтаним нарушењем симетрије. Видимо веома експлицитно да је маса поља qv .

Такође, Голдстонова мода замењена је лонгитудиналном поларизацијом фотона.

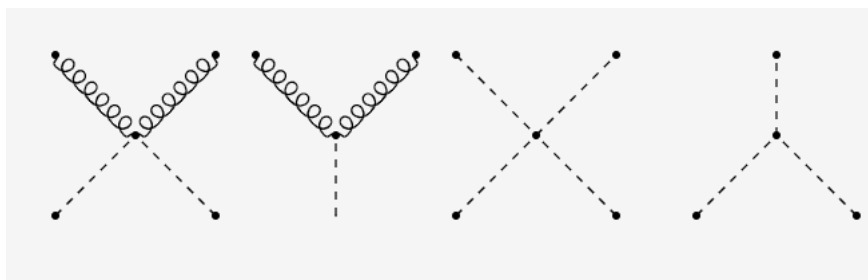
Komentar: X tavi xe, nijedna Yang-Mills teorija ne poseduje masu, x to je bio Paul ijev argument za to kako u Yang-Mills teoriji sve ekscitacije JM po a treba da budu dugog dometa. Naravno, kao x to danas znamo, Paul i je (verovatno po prvi put u svomivotu) pogrešio. Yang-Milsove teorije imaju asimptotsku slobodu, ali se dosta drugačije ponaju u infracrvenom delu toka renormalizacije grupe. Više o tome u [6].

Интеракциони део Лагранжијана је

$$\frac{q^2}{2} A_\mu A^\mu + q m_A A_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - m \sqrt{\frac{1}{2}} \phi^3$$

Одавде можемо да наслутимо шта ће нам све ново донети прави Хигсов бозон у Стандардни модел. Нацртаћемо одговарајуће Фајнманове дијаграме који одговарају овим интеракцијама (видети доле)

Видимо да имамо интеракцију између 2 Хигса, распад Хигса на два Хигса, интеракцију фотона и Хигса, и дељење Хигса на два фотона.



1.6 Градијентне теорије

Тема градијентних теорија је велика и богата. Постоји читава историја везана за њих, у коју аутор радије не би улазио. Оно што је најбитније је да је *vrlo* могуће да је Јанг-Милсова теорија, као леп пример градијентне теорије, ренормализабилна, и то нам даје довољно разлога да је проучавамо. И, такође, да не заборавимо да споменемо, постоји миленијумска награда за објашњење проблема масеног процепа теорије, али то је нека друга прича о којој ћемо причати неки други пут.

Него, генерално гледано, имамо компактну градијентну Лијеву групу G , опремљену Лијевом алгебром \mathfrak{g} . Такође имамо репрезентацију G над \mathbb{C}^n , за коју ћемо претпоставити да је унитарна. Поље $(x) \in \mathbb{C}^n$ узима вредности у овој репрезентацији. Заправо, на правом језику градијентних теорија, (x) се сматра секцијом $s: M \rightarrow E$, где је E vector bundle над M . Градијентна трансформација се добија тако што за сваку тачку многострукости M одаберемо члан $g \in G$ и извршимо следећу трансформацију секције

$$(x) \mapsto g(x) (x)$$

Можемо наравно да направимо трансформацију и преко Лијеве алгебре

$$(x) \mapsto e^{t(x)} (x)$$

где $t(x) \in \mathfrak{g}$.

За сваку градијентну теорију морамо да специфицирамо и *kovarijantni izvod*, који је кључан објекат у свакој градијентној теорији. Наиме, простори коваријантних извода над неком многострукошћу су доста занимљиви, али то је друга прича о којој ћемо причати неки други пут.

Оно што је за нас сад битно је да се *1-forma koneksije* $A(x) \in \mathfrak{g}$ трансформише као

$$A \mapsto gA g^{-1} - g^{-1} dg$$

Под градијентном трансформацијом, а коваријантни извод је

$$D = \partial + ieA$$

Где је e некаква инвертибилна матрица над C^n , а углавном је само јединична матрица помножена са $e \in \mathbb{R}$, мада не мора да буде, као што ћемо видети за различита хипернаелектрисања у следећој секцији.

Затим можемо да дефинишемо

$$\frac{1}{ie} [D ; D] = F$$

Ова величина се често (у свом пуном облику из спољашње алгебре) назива *kri v i na* конекције.

Такође су нам потребни генератори Лијеве алгебре t^a , као и структурне константе

$$[t^a ; t^b] = f^{abc} t_c$$

Одавде можемо да конструишемо Јанг-Милсов део акције

$$L_{JM} = \frac{1}{2} \text{Tr} F F$$

Где се траг узима по репрезентацији по G генератора t^a .

1.7 Додатак о градијентним теоријама

Да бисмо одредили пропагаторе градијентне теорије, морамо да знамо како да се понашамо са корелационим функцијама у градијентној теорији. Једини проблем код путног интеграла у градијентним теоријама је тај што постоји читава класа еквивалентних поља повезаних градијентом трансформацијом, бисмо волело само једном да урачунамо по могућству. Ми бисмо желели да се фокусирамо на једну градијентну орбиту нашег простора, и самим тим ћемо бити натерани да уведемо још нека поља у теорију.

Кренимо од наше стандардне Јанг-Милс теорије

$$L = \frac{1}{2} \text{Tr}(F F)$$

Желимо да напишемо функцију партиције за Јанг-Милс. Када будемо знали формализам за функцију партиције теорије, веома лако ћемо израчунати и пропагаторе теорије. Интуитивно бисмо написали некакав овакав израз

$$Z_1 = \int DA e^{-S_E(A)}$$

Проблем је што ми знамо да увек можемо да вртимо 1-форме конекције на следећи начин

$$A \nabla g A g^{-1} g^{-1} @ g$$

И самим тим имамо одређену редувантност у недефинисаној мери на бесконачном Хилбертовом простору конекција. Како решити овај проблем? Испоставља се да, ако убацимо "паметне варијабле" у путни интеграл, можемо да изаберемо тачно један градијентни slice теорије, ако радимо паметно. Нећемо доказивати валидност доле наведеног израза за избор slice-а, детаљан доказ се може погледати у [6]. Дакле, испоставља се да, ако фиксирамо gauge теорије на следећи начин

$$f^a(A(x)) = 0$$

Добијамо следећи формалан израз за функцију партиције

$$Z = \int DA [f] \Delta_f(A) e^{S_{YM}[A]}$$

Где је Δ_f ознака за следећу детерминанту

$$\Delta_f = \det \left(\frac{f^a(A(x))}{b(y)} \right)$$

Где смо већ прешли на елементе Лијеве алгебре \mathfrak{g} од \mathfrak{g} . Знамо да можемо да искористимо "трик" који важи за интеграцију Грасманових варијабли

$$\int d^n c d^n \bar{c} e^{i M^{ij} c_j} = \det M$$

И самим тим можемо да замислимо некакву додатну Грасманову варијаблу која би описала појаву горенаведене детерминанте у путном интегралу. написаћемо

$$\Delta_f = \int Dc D\bar{c} e^{\int_{M \times M} d^d x d^d y c_a(x) \frac{f^a(A(x))}{b(y)} c^b(y)}$$

Читаоцу ће вероватно требати времена да схвати овај израз, који укључује интеграле по бесконачном Хилбертовом простору, као и по генераторима Лијеве алгебре. Најбитније од свега, израз је тачан за физичаре. Математичари имају нерешив проблем са путним интегралом, јер таква мера као D не може постојати на бесконачнодимензионом Хилбертовом простору, али физичари не виде *ni kakav* проблем у горњем изразу.

Сада морамо да видимо шта ћемо да радимо са делта-функцијом у горњем интегралу. Подсетимо се

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = 2\pi \delta(x)$$

Према томе, узећемо аналогон ове формуле у бесконачном броју димензија.

$$[f] = \int Dh e^{-\int d^d x i h^a(x) f^a(A(x))}$$

Фермионска поља c, \bar{c} која смо додали се називају духови Фадеева и Попова, док се скаларно поље h које смо додали у теорију назива Наканиши-Лаутруп поље.

Такође, можемо написати и како изгледа доста позната симетрија овог пуног модела, која се назива BRST трансформација.

$$\begin{bmatrix} A = (\nabla c) & \bar{c} = i h \\ c = \frac{1}{2}[c; c] & h = 0 \end{bmatrix}$$

Где је c Грасманова варијаблa. Оваква трансформација треба да личи на трансформације суперсиметрије управо због антикомутативности c - варијабле укључене у трансформацију.

Помоћу одређене BRST трансформације можемо у потпуности да отклонимо Наканиши-Лаутруп поље из путног интеграла и да нам преостану само духови Фадеева и Попова у теорији.

Ову трансформацију нећемо описати, али се она може пронаћи у [6].

1.8 Стандардни модел и електрослабе интеракције

Стандардни модел елементарних честица је само једна од бројних квантних теорија поља у физици. За њега се верује да веома добро описује све елементарне честице у нашем универзуму.

Иако се о овом моделу прича као да је готов и потпун, постоје многа питања о њему која још нису разјашњена. На пример, која је тачно градијентна група нашег свемира? Да ли је део теорије везан за Хигсов бозон ренормализабилан? Да ли постоје мајорана фермиони? Каква је природа неутрина?

Хигсов бозон игра централну улогу у малтене сваком од ових питања, пре свега због свог важног положаја у моделу. Хигсов бозон је једина

знана честица у СМ која је описана скаларним пољем, и самим тим има лепо понашање g_3^3, g_4^4 члана у акцији при току групе ренормализације, што нам омогућава да му прецизно одредимо константе спаривања нижих степени на ниским енергијама. Такође, Хигсов бозон процесом спонтаног нарушења симетрије даје масу фермионима у СМ. Тренутно се у CERN-у врши побољшавање Large Hadron Collider-а, као и пројектна изградња CLIC-а. Један део процеса који ће се одигравати на CLIC-у описан је управо у овом раду. Ова два пројекта (као и многи други) свакако желе да нам разјасне и приближе мистерију Хигсовог бозона.

Као и сваки увод у Стандардни модел, пре свега ћемо изнети табелу свих честица које можемо да очекујемо у универзуму.

	1 ^и	2 ^и	3 ^и		
Quarks	u up	c charm	t top	γ photon	H Higgs Boson
	d down	s strange	b bottom		
Leptons	e electron	μ muon	τ tau	W^\pm W boson	Z^0 Z boson
	ν_e neutrino electron	ν_μ neutrino muon	ν_τ neutrino tau		

Слика 2.1. Елементарне честице које чине Стандардни модел, подељене на кваркове, лептоне и Гауџе бозоне.

Слика је преузета из [2].

Почећемо са развијањем теорије слабих интеракција, а затим ћемо споменути и Фермијеву слабу теорију као коначан рачунски завршетак теорије у овом раду. Ипак, за нас ће бити кључан веома специфичан процес којим ћемо се позабавити мало касније. Дакле, електрослабе интеракције се дефинишу на градијентној групи $SU(2) \times U(1)$. Згодно је одабрати базис за $su(2)$ као

$$a = \frac{a}{2}$$

Где су i Паулијеве матрице, а ми заправо радимо са комплексификацијом алгебре $su_{\mathbb{C}}(2)$, јер су заправо Паулијеве матрице помножене са i чланови реалне алгебре. У овом базису, структурне константе су $f^{abc} = abc$. Почињемо од дефинисања дејства градијентне групе на Хигсово поље: (Хигсово поље треба замишљати као секцију принципијелног G -расејања над \mathbb{R}^4 са две комплексне компоненте векторског поља које кореспондира расејању)

Дефиниција 1 (Хигсово поље). *Higsovo po e je kompleksno skalarno po e sa dve komponente, $(x) \in \mathbb{C}^2$. $SU(2)$ akcija nad po em data je fundamental nom reprezentacijom na \mathbb{C}^2 , a hi pernael eketrisa e je $Y = \frac{1}{2}$.*

Експлицитно, инфинитезимална градијентна трансформација може бити представљена елементима T^a , алгебри $su(2)$, $u(1) = \mathbb{R}$ редом. За детаље о Лијевим групама и алгебрама погледати Апендикс А. Хигсово поље се трансформише на следећи начин

$$\psi(x) \rightarrow e^{i \theta^a T^a} e^{i \frac{1}{2} \theta^4 Y} \psi(x)$$

Где фактор $\frac{1}{2}$ испред $\psi(x)$ долази управо из чињенице да је хипернаелектрисање $Y = \frac{1}{2}$. Градијентна поља која одговарају $SU(2)$ и $U(1)$ су W^a и B , $a = 1;2;3$. Коваријантни извод који одговара овим пољима је

$$D_\mu = \partial_\mu + igW^a T^a + \frac{1}{2} ig^l B Y$$

за неке константе $g; g^l$.

Део Лагранжијана који је за нас тренутно битан је

$$\mathcal{L}_{grad} = \frac{1}{2} Tr(F^W F^W) + \frac{1}{4} F^B F^B + (D_\mu \psi)^\dagger (D_\mu \psi) - \frac{1}{2} j_\mu j^\mu - \frac{1}{2} j_\mu^A j_\mu^A$$

Где су јачине поља редом дате са

$$F^{W;a} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g^{abc} W^b_\mu W^c_\nu$$

$$F^B = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

У случају $v^2 < 0$, Хигсово поље добија очекивану вредност вакуума (VEV), и ми ћемо без губљења општости узети да је вакуум теорије

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

где је $v^2 = -v^2 < 0$. Наравно, подразумева се да смо претпоставили да теорија задовољава mean field једначину, а тек ћемо другим погледом у њу да откријемо фундаменталне природе поља.

Након неколико линија рачуна, из члана $(D_\mu \psi)^\dagger (D_\mu \psi)$ и спонтаног нарушења симетрије добијамо следеће масене доприносе Лагранжијану:

$$\frac{1}{2} \frac{v^2}{4} (g^2 (W^1)^2 + g^2 (W^2)^2 + (g W^3 + g^l B)^2)$$

Komentar: Pod kvadratom vektora podrazumevamo njegov skalarni proizvod sa samim sobom odredjen metrikom prostora.

Дефинишимо нова поља

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^1 - iW^2)$$

$$\begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & \sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^3 \\ B \end{pmatrix}$$

Где се θ_w зове Вајнбергов угао и задовољава следеће релације

$$\cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

$$\sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

Масени члан онда постаје

$$\frac{1}{2} \left(\frac{v^2 g^2}{4} ((W^+)^2 + (W^-)^2) + \frac{v^2 (g^2 + g'^2)}{4} Z^2 \right)$$

Одавде видимо које су масе веома познатих бозона наше теорије, користећи да се у КТП масени члан стандардно налази у следећем (или сличном облику) $\frac{1}{2} m^2 \phi^2$ у акцији.

1. $m_W = \frac{vg}{2}$

2. $m_Z = \frac{v}{2} \sqrt{g^2 + g'^2}$

3. $m_A = 0$

Где је A честица, фотон. Према томе, наша оригинална $SU(2) \times U(1)_Y$ симетрија цепа се на $U(1)_{EM}$ симетрију.

Уочимо корелацију између маса W и Z бозона.

$$m_W = m_Z \cos \theta_w$$

Експериментално, проналазимо да су масе

1. $m_W = 80 \text{ GeV}$

2. $m_Z = 91 \text{ GeV}$

3. $m_A < 10^{-18} \text{ GeV}$

Па је Вајнбергов угао $\sin^2 \theta_w = 0.23$.

Хигсов бозон такође има масу, која је дата са

$$m_H = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \frac{v}{v^2}$$

Занимљиво је да маса Хигса зависи од v , па је самим тим било немогуће детерминисати масу Хигсовог бозона без експеримената у ЛНС.

$$m_H = 125 \text{ GeV}$$

Остатак трансформисаног Лагранжијана нећемо писати, али он садржи свакаке интеракције између $W^+; W^-; Z; H$ честица.

Разлог зашто смо трансформисали прве две "компоненте" поља W је тај што су сада $W^+; W^-$ комплексни коњулати једно другог, па ћемо моћи да их идентификујемо као честица-античестица пар у каснијој квантизацији теорије.

1.9 Спаривање са лептонима

У генерализованом случају, коваријантни извод за честицу хипернаелектрисања Y је

$$D = \partial + igW^a T^a + ig^l Y B$$

Изражен преко $W^+; W^-; Z$ бозона, коваријантни извод постаје

$$D = \partial + \frac{ig}{2} (W^+ T^+ + W^- T^-) + \frac{igZ}{\cos \theta_w} (\cos^2 \theta_w T^3 - \sin^2 \theta_w Y) + ig \sin \theta_w A (T^3 + Y)$$

где је

$$T^{\pm} = T^1 \pm i T^2$$

Интерпретирамо последњи члан израза као спаривање са фотоном. Оно што је занимљиво је у овом случају је што је константа спаривања заправо 2×2 матрица, али то ни у ком случају не треба да нас плаши. Наелектрисање лептона ће наравно бити

$$e = g \sin \theta_w$$

Што би било наелектрисање електрона.

Матрица наелектрисања биће

$$Q = T^3 + Y$$

Уочимо такође корисну релацију

$$\cos^2 \theta_w T^3 - \sin^2 \theta_w Y = T^3 - \sin^2 \theta_w Q$$

Komentar: Primetiti, kako radimo sa bezdimenzijskim fundamentalnim konstantama, a konstanta fine strukture je $\alpha = \frac{1}{137}$, za vrednost naelektrisa a elektrona dobijamo $e = 0.3$. Уведимо сада електронско поље. Електрон је задат спинорским пољем у 4 димензије $e(x)$. Декомпозираћемо поље у његову леву и десну компоненту по хиралности. О хиралности погледати у Апендиксу Ц.

$$e(x) = e_L(x) + e_R(x)$$

Такође имамо и поље неутрина $e_L(x)$. Претпоставићемо да су неутрини безмасени, као и да постоје неутрини само леве хиралности. У Апендиксу Ц се може видети доста занимљив аргумент идентификовања спина и хиралности за одређене специфичне електрослабе процесе. Из закона одржања момента импулса таквих процеса је и настала идеја за додавањем неутрина у Стандардни модел. За неутрино знамо да нема масу нула, али је та маса свакако мала и за сада ћемо је апроксимирати да буде нула. Касније ћемо доћи до теме неутрино осцилација, и ту ћемо се вратити на ову енигму. Следећи корак у нашем рецепту је да задамо репрезентацију групе $SU(2) \times U(1)$ над овим овим спинорским пољем. (О репрезентацијама погледати у Апендиксу Б.) Групишимо честице по хиралности:

$$R(x) = e_R(x); \quad L(x) = \begin{pmatrix} e_L(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix}$$

$R(x)$ синглет спинор. $L(x)$ је $SU(2)$ дублет спинора. Прво радимо са $R(x)$. Експериментално проналазимо да се W спарује само са спинорима леве хиралности. Према томе, $R(x)$ ће имати *trivijalnu reprezentaciju* групе $SU(2)$. Такође знамо да електрони имају наелектрисање $Q = -1$. Како ³ делује тривијално на $R(x)$, следи да морамо имати

$$Q = Y = -1$$

за десноруке спиноре.

Честице леве хиралности су компликованије. Прво ћемо нагласити како L има *fundamentalnu reprezentaciju* $SU(2)$, што значи да ако имамо

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$$

овај елемент делује на L као

$$g \cdot L = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_L \\ e_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a e_L + b e_L \\ \bar{b} e_L + \bar{a} e_L \end{pmatrix}$$

Знамо да електрон има наелектрисање -1 а неутрино наелектрисање 0 , према томе треба нам

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

А како је $Q = \frac{1}{3} + Y$, мора бити да је $Y = \frac{1}{2}$.

Користећи ову нотацију, Лагранжијан лептона може бити компактно записан:

$$L_{lepton}^{EW} = \bar{L}i\partial L + \bar{R}i\partial R$$

Где под Дираковим адјунгатом L -а подразумевамо следећи израз

$$\bar{L} = (\bar{e}_L(x) \quad \bar{\nu}_L(x))$$

Сада долазимо до кључног корака у развоју теорије. Са једне стране, гледајући теорију развијену у Апендиксу II, ако бисмо желели да додамо масени члан у акцију, онда бисмо имали додатан део Лагранжијана

$$m_e(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)$$

Међутим, под акцијом градијентне групе $SU(2)$ на дублет, добићемо мешање e_L и ν_L поља, и самим тим бисмо добили јако чудан израз који би мешао e_L и e_R , што *није добро*. Према томе, ово неће ићи. Али ми *ЗНАМО* да електрон има масу. Како даље?

Решење нам поново нуди механизам спонтаног нарушења симетрије, ил-ити интеракција са Хигсовим бозоном. Радећи у унитарном gauge-у (подсетити се скаларног QED)

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}$$

Где $v; h(x) \in \mathbb{R}$.

Интеракција лептона и Хигса је дата са

$$L_{lepton} = \frac{e}{2} (\bar{L} \psi + \bar{\psi} \gamma L)$$

Где је e такозвани *Yukawa coupling*.

Уочимо да је овај члан градијентно инваријантан, сетивши се како се градијентно трансформишу поља

$$R \rightarrow R$$

$$\begin{aligned} \bar{R} &\not{=} \bar{R} \\ L &\not{=} gL \\ \bar{L} &\not{=} \bar{L}g^{-1} \\ &\not{=} g \\ &\not{=} g \end{aligned}$$

Раширимо сада овај израз преко $h(x)$.

$$\bar{L} R = \begin{pmatrix} -e_L(x) & \bar{e}_L(x) \\ 0 & v + h(x) \end{pmatrix} \frac{1}{\not{=} 2} e_R(x) = \frac{1}{\not{=} 2} (v + h(x)) \bar{e}_L(x) e_R(x)$$

$$\bar{R} \not{=} L = \frac{1}{\not{=} 2} \bar{e}_R \begin{pmatrix} 0 & e_L(x) \\ v + h(x) & e_L(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\not{=} 2} \bar{e}_R(x) (v + h(x)) e_L(x)$$

$$L_{lepton:h} = e(v + h(x))(\bar{e}_L(x)e_R(x) + \bar{e}_R(x)e_L(x)) = m_e \bar{e}e + e h(x) \bar{e}e$$

$\bar{e}_L e_L = \bar{e}_R e_R = 0g$, видети Апендикс II.

$$m_e = e v$$

Маса електрона излази из теорије!

Други члан израза представља интеракцију између електрона и Хигсовог бозона, која је пропорционална m_e . Према томе, масивне "ствари" се "везују" јаче, грубо говорећи.

Потребна нам је и интеракција између фермиона и gauge бозона.

$$L_{lepton}^{EM:int} = \frac{g}{2} (J W^+ + J \not{=} W^-) + e J_{EM} A + \frac{g}{2 \cos \theta_w} J_n Z$$

где је

$$\begin{aligned} J_{EM} &= \bar{e} e \\ J &= \begin{pmatrix} -e_L & (1 - \gamma_5) e \\ e_L & \bar{e} (1 - \gamma_5) \end{pmatrix} \\ J_n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e_L & (1 - \gamma_5) e_L \\ e_L & \bar{e} (1 - \gamma_5) \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e_L & \bar{e} (1 - \gamma_5) \end{pmatrix} \sin^2 \theta_w \end{aligned}$$

Ово су струје које се могу добити када се примени Нетерина теорема на трансформације $L \rightarrow g(x)L$, $R \rightarrow g(x)R$ за $SU(2)$ и $U(1)$ и добију се очуване струје, а које су потом спарене са оригиналним градијентним пољима теорије. На тај начин се чува градијентна инваријантност теорије као

највећа светиња. Познат пример оваквог рачуна је у електромагнетизму, тј. QED где се A спарује са J за које важи $@ J = 0$.

Алтернативно, ова спаривања се само могу екстрактовати из коваријантног извода.

Ове струје се редом зову *EM current, charge weak current, neutral weak current*.

1.10 Мион, Тау

Стандардни модел има три генерације лептона. Постоје такође *muon* и *tau* лептони, и њихови респективни неутрини. Према томе, нека су

$$L^1(x) = \begin{pmatrix} e_L(x) \\ \nu_L(x) \end{pmatrix}; L^2(x) = \begin{pmatrix} \mu_L(x) \\ \nu_L(x) \end{pmatrix}; L^3(x) = \begin{pmatrix} \tau_L(x) \\ \nu_L(x) \end{pmatrix}$$

и

$$R^1(x) = e_R(x); R^2(x) = \mu_R(x); R^3(x) = \tau_R(x)$$

Ове честице је веома лако додати у $L_{lepton}^{EM:int}$ део Лагранжијана, јер имају исто наелектрисање као електрон, и на исти начин се спарују са gauge бозонима из очигледних разлога. Права забава почиње код спаривања са Хигсовим бозоном.

$$L_{lept} = \frac{\rho_-}{2} (\bar{L}^i R^j + \bar{R}^i L^j)$$

Као што видимо, сада имамо $ij \in M_3(\mathbb{C})$. У принципу, ова матрица нема разлога да буде дијагонална! Ипак, увек можемо да је ”дијагонализујемо”. Из линеарне алгебре знамо да за сваку $ij \in M_3(\mathbb{C})$ можемо да нађемо унитарне матрице $U; S$ тако да

$$= U \Lambda S^y$$

тако да је Λ дијагонализована са реалним уносима матрице. Након тога можемо да линеарно трансформирамо наша поља у

$$L^i \nabla U^{ij} L^j; R^i \nabla S^{ij} R^j$$

И ово дијагонализује L_{lepton} . Овакав третман дефинитивно оставља наш Лагранжијан градијентно инваријантним, а масена својствена стања одавде врло лако рачунамо преко ”дијагонализације”. Према томе, после ”дијагонализације”, нема мешања између различитих генерација. Овакав поступак није могуће урадити на кварковима или на теорији са масеним неутринима, и тада се догађа мешање.

1.11 Кваркови

Ово су доста популарни објекти у физици, и самим тим ћемо им се препустити са мало више ентузијазма него иначе.

Ми знамо за 6 типова кваркова у природи, који долазе у три генерације.

Naelektrisanje	Prva generacija	Druga generacija	Treća generacija
+2/3	Up (u)	Charm (c)	Top (t)
-1/3	Down (d)	Strange (s)	Bottom (b)

од којих је сваки спинор.

Поља десне хиралности имају тривијалне $SU(2)$ репрезентације, и самим тим су $SU(2)$ синглети.

$$u_R = (u_R \quad c_R \quad t_R)$$

које имају $Y = Q = +\frac{2}{3}$ и

$$d_R = (d_R \quad s_R \quad b_R)$$

које имају $Y = Q = \frac{1}{3}$. Поља леве хиралности су $SU(2)$ дублети и изгледају овако:

$$Q_L^i = \begin{pmatrix} u_L^i \\ d_L^i \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \right)$$

и сва имају $Y = \frac{1}{6}$. Овде $i = 1, 2, 3$ обележава генерације. Чист спинорски део Лагранжијана је опет тривијалан:

$$L_{quark}^{EW} = \bar{Q}_L^i i \not{\partial} Q_L^i + \bar{u}_R^i i \not{\partial} u_R^i + \bar{d}_R^i i \not{\partial} d_R^i$$

Да бисмо спарили ова поља са A_μ , имаћемо доста посла у рукама. Имајмо на уму да и даље желимо градијентну инваријантност теорије.

Потребан нам је прво члан

$$\bar{Q}_L^i$$

јер им је заједничка репрезентација под $SU(2)$ тривијална. Да би теорија била инваријантна под $U(1)$, хипернаелектрисања морају да имају укупан збир нула, јер је укупан фактор градијентне трансформације $e^{i \sum Y_i \alpha(x)}$. Видимо да нам члан

$$\bar{Q}_L^i d_R^i$$

обезбеђује то својство. Спаривање са U_R је мало компликованије, јер је његово $Y = \frac{2}{3}$. Дефинишимо поље кођугованог набоја

$$(\bar{c}) =$$

За које се лако може увидети да има хипернаелетрисање $Y = \frac{1}{2}$. Према томе, уз додатак овог члана поред U_R у $+\frac{2}{3}$ сектору Лагранжијана, добијемо генерички:

$$L_{kvark} = \frac{P}{2} (\bar{d}^j Q_L^i d_R^j + \bar{u}^j Q_L^i c u_R^j + \bar{d}^j d_R^i y Q_L^j + \bar{u}^j u_R^i c y Q_L^j)$$

Сада ћемо покушати да ”дијагонализујемо” ову теорију на сличан начин као што смо то урадили са лептонима. Видећемо да неће баш ићи. Дакле, нека смо фиксирали gauge наше теорије и нека је

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}$$

Када убацимо овај израз у Лагранжијан интеракције са кварковима, добијемо

$$L_{kvark} = (\bar{d}^j d_L^i (v+h) d_R^j + \bar{u}^j u_L^i (v+h) u_R^j + \bar{d}^j d_R^i (v+h) d_L^j + \bar{u}^j u_R^i (v+h) u_L^j)$$

Сада пишемо

$$u = U_u \Lambda_u S_u^y$$

$$d = U_d \Lambda_d S_d^y$$

Као у примеру са генерацијама лептона, где су $\Lambda_u; \Lambda_d$ дијагоналне матрице да реалним уносима, док су $U_u; S_u; U_d; S_d$ унитарне матрице. Онда можемо да трансформисемо поље на сличан начин

$$u_L \not\sim U_u u_L; d_L \not\sim U_d d_L; u_R \not\sim S_u u_R; d_R \not\sim S_d d_R$$

И рутина је приметити да ово заиста дијагонализује L_{kvark} . Масени члан изгледа овако:

$$\sum_i (m_d^i \bar{d}_L^i d_R^i + m_u^i \bar{u}_L^i u_R^i + m_d^i \bar{d}_R^i d_L^i + m_u^i \bar{u}_R^i u_L^i)$$

Где је, наравно

$$m_q^i = v \Lambda_q^{ii}$$

Како сада ове линеарне трансформације утичу на спиноре? Тривијално је да компоненте $\bar{u}_R i \not{\partial} u_R$, $\bar{d}_R i \not{\partial} d_R$ нису промењене овом трансформацијом, али шта ћемо са спинорима леве хиралности?

Друкчије компоненте Q_L^i се везују другачије него испрва у Дираковој акцији. Конкретно, W део у $\bar{Q}_L i \not{\partial} Q_L$ и није баш инваријантан. Тај део може експлицитно бити записан као $\frac{g}{2} \bar{u}_L^i J^i W$, где је $J = \bar{u}_L^i d_L^i$.

Под трансформацијом раније наведеном, ово постаје

$$\bar{u}_L^i (U_u^\dagger U_d)^{ij} d_L^j$$

Матрица $(U_u)^\dagger U_d$ се назива Кабибо-Кабајаши-Маскава (ККМ) матрица. Тренутно не постоје импликације да је она дијагонална. Постоје међугенерациска спаривања међу кварковима. Као што видимо, масена својствена стања кваркова нису једнака "својственим стањима слабе интеракције".

Експлицитно, ККМ се може написати као

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

Треба напоменути да уноси нису потпуно произвољни. Матрица је унитарна, и имамо одређену слободу у избору фаза уноса. Слична ствар се одиграва на пример при рачунању броја независних компоненти метрике неке многострукости.

1.12 Кратка прича о неутринима

За неутрине знамо да се масена стања **не поклапају** са slabим стањима. Неутрини се пребацују из једне генерације у другу. Ова чињеница (која је откривена експериментално) имплицира да постоји мешање између различитих генерација лептона. Аналогна матрица ККМ-у се у овом случају назива ПМНС матрица. Неутрини су доста непозната територија Стандардног модела. Не интерагују много и самим тим немамо много експерименталних података за њих. Једно од паметних питања о којима се спекулише је могућност да су заправо мајорана фермиони, тј. да су сами себи античестице. (Оваква конфигурација је једино могућа под условом да је наелектрисање неутрина егзактно 0.) Мајорана фермиони, иако доста популарни у физици чврстог стања, још увек нису потврђени у физици фундаменталних честица. Надамо се да ћемо у будућности добити јасније одговоре о њиховој природи.

2 Интермецо - Рачун Фајнманове амплитуде

Сада иде један јако користан део теоријског рада, у коме експлицитно рачунамо диференцијалне пресеке расејања стандардним методама Квантне теорије.

2.1 Први део

За нас ће свакако бити најзначајније да за неку честицу одредимо време полураспада, што можемо добити следећом формулом (уз одговарајуће пратеће коефицијенте)

$$\Gamma = \frac{1}{2M} \sum_{\text{diagrami}} jA_f^2 d\Pi$$

Где је

$$d\Pi = (2\pi)^4 \delta^4(p_I - p_D) \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_{p_f}}$$

Док се диференцијални пресек расејања две честице у односу на другу добија на следећи начин

$$d = \frac{1}{jV_1} \frac{1}{v_2 j 4E_1 E_2} jA_{if}^2 d\Pi$$

Уз кратко разјашњење нотације, где је f ознака за финална стања, i ознака за инцијално стање честице која се распада, $1, 2$ су индекси честица

које сударамо, A је Фајнманова амплитуда.

Дакле, за нас је најбитнија величина у целој причи свакако Фајнманова амплитуда, коју можемо да рачунамо цртањем лепих дијаграма и триковима. Прво, назначићемо да ћемо прећи у интеракциону слику наше квантне теорије, што практично значи да смо деловали одређеним операторима на векторе Хилбертовог простора наше теорије и оставили у Хамилтонијану само интеракциони део теорије. Добра ствар је што се интеракциона слика квантне механике понаша доста слично као Шредингерова слика, тако да и даље пливамо кроз теорију, с тим да морамо нагласити да у овом случају, због некомутирања оператора, оператор временске еволуције узима стандардну форму Вилсонове холономије

$$U(t; -1) = T \exp\left(-i \int_{-1}^t H_I(t') dt'\right)$$

2.2 Пропагатори

Интеракциони део Лагранжијана слабе теорије је

$$L_W = \frac{g}{2} (J W^+ + J^y W) - \frac{g}{2 \cos \theta} J_n Z$$

Наш генерални задатак је да радимо са S -матрицом

$$S = T \exp\left(i \int d^4x L_W(x)\right)$$

Где T назначавача временски приоритет.

Стратегија је, наравно, Тејлор-развијати горњи израз по g , као и иначе. Нас ће наравно занимати

$$hfjSjii$$

За иницијалну и финалну конфигурацију поља, где пуштамо временску еволуцију од -1 до $+1$. Одавде знамо рецепт за изградњу Фајнманове амплитуде. Потребно је да посматрамо теорију и одредимо јој пропагаторе у импулсном простору. За слаба поља пишемо пропагаторе на следећи начин

$$D^W(x, x') = \langle T W(x) W^+(x') \rangle$$

$$D^Z(x, x') = \langle T Z(x) Z(x') \rangle$$

Што је потпуно природан начин записа пропагатора, имајући у виду да су $W^+; W$ пар честица-античестица. Дефинишимо пропагатор као Фуријеову трансформацију корелатора.

$$D^{Z;W}(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} D^{Z;W}(p)$$

Желимо да израчунамо пропагатор у импулсном простору, што је доста позната теоријска техника, али и даље морамо остати доследни досадашњем току рада. Радићемо са Z -бозоном, мада сличан рачун захвата и W -бозон.

Распишимо слободан део Z - Лагранжијана.

$$L_{slobodno}^Z = \frac{1}{4}(\partial_\mu Z - \partial_\mu Z)(\partial^\mu Z - \partial^\mu Z) + \frac{1}{2}m_Z^2 Z^2$$

Сада користимо један трик који је доста добар при рачунању корелатора у квантној теорији поља у 1Д, али је и овде прихватљив.

$$L = L_{slobodno} + j(x)Z(x)$$

И наравно, mean field приступ нам даје једначине кретања

$$\partial^2 Z - \partial^2 Z + m_Z^2 Z = j$$

Када делујемо на овај израз оператором ∂ , добијамо

$$\partial^2 \partial Z - \partial^2 \partial Z + m_Z^2 \partial Z = \partial j$$

И добијамо

$$m_Z^2 \partial Z = \partial j$$

И када вратимо овај израз у претходну једначину можемо и ово написати

$$(\partial^2 + m_Z^2)Z = (g + \frac{\partial^2}{m_Z^2})j$$

И, користећи се чињеницом да пропагатор у неку руку представља response function наше теорије

$$Z(x) = i \int d^4 y D^Z(x, y) j(y)$$

Можемо екстрактовати да је пропагатор у Фуријеовом простору

$$D^Z(p) = \frac{i}{p^2 - m_Z^2 + i\epsilon} (g + \frac{p^2}{m_Z^2})$$

А испоставља се да слична формула важи и за W -пропагатор

$$D^W(p) = \frac{i}{p^2 - m_W^2 + i\epsilon} (g + \frac{p^2}{m_W^2})$$

2.3 Фајнманова амплитуда за процес који нас интересује

Без даљег одуговлачења, ево процеса којим ћемо се ми бавити у раду и његове Фајнманове амплитуде.

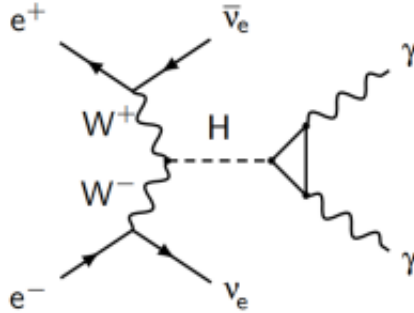


Fig. 1: Feynman diagram of the Higgs production in WW-fusion and subsequent Higgs decay to a pair of photons.

$$A = \frac{1}{4} \bar{u}(p) \left(\not{\epsilon} \frac{g}{2} \right) u_e^s(p_e) (\bar{u}_{e^+}^{s'}(p_{e^+}) \left(\not{\epsilon} \frac{g}{2} \right) u^{r'}(p)) \left(\frac{1}{p_W^2 - m_W^2 + i} \right)^2 \left(g + \frac{p \cdot p}{m_W^2} \right) \left(g + \frac{p}{m_W^2} \right) \left(\frac{1}{p_H^2 - m_H^2 + i} \right) A_1 \frac{p \cdot \not{\epsilon}}{2} \left(\frac{ig}{2} \right)^2$$

Где сматрамо да је процес симетричан по импулсној замени електрон-позитрон, и где су $r; s; r'; s'$ задати хелицитети честица, а поларизациони вектори фотона. Такође, сваки недефинисан импулс на дијаграму се може добити законом одржања импулса. A_1 представља Фајнманову амплитуду размене тешких честица након формирања Хигза.

3 Увод у други део рада

Сада прелазимо на експериментални део рада.

Главни циљ сваког експерименталног физичара који ради на некаквом пројекту судара честица је ефикасно одвајање сигнала од шума. Шта би малопређашња изјава заправо требала да значи? Наиме, у нашим детекторима честица постоји огромна количина података који не потичу од циљаног процеса (као на пример нашег из прошле секције), а ти подаци су или физичке природе (десио се процес који ми не разматрамо) или машинске природе, где је наша електроника заказала на тачности. Наиме, у физици елементарних честица се ради са јако великим бројем судара у секунди, и самим тим имамо доста узорка сигнала који људско око не може да обради. Према томе, морамо се окренути рачунару, штавише програму који је ”утрениран” тако да разазнаје сигнал од шума. Морамо се окренути машинском учењу.

3.1 Компактни линеарни сударач

Компактни линеарни сударач, или CLIC, је предложени акцелератор који је дизајниран као додатак CERN-овом комплексу акцелератора. На њему ће се одигравати судари електрона и позитрона при енергијама од неколико TeV. CLIC ће бити грађен у три фазе, прво на енергијама судара од 350 GeV, затим на енергијама судара од 1.4 TeV, а коначно на енергијама од 3TeV. Између осталог, CLIC ће бити задужен за прецизна мерења интеракција Хигсовог бозона са другим честицама, као и са самим собом. Овај сударач има предност у односу на остале јер судара две елементарне честице и самим тим производи много мање шума него неки други сударачи. Предвиђено је да изградња прве енергијске фазе CLIC-а започне 2026. године, што би омогућило да први снопови честица буду доступни до 2035. године.

Спецификације: CLIC ради на стандардној технологији убрзавања два снопа на собној температури. За генерисање радиофреквентног електричног

поља фреквенције 12GHz се користи сноп високог интензитета са јачином струје од 100A и ниском енергијом од 2.4GeV . Енергија радиофреквентног електричног поља се користи за убрзавање главног снопа честица, помоћу радиофреквентних PETS- Power Extraction and Transfer Structure уређаја. Још спецификација: Снопови честица на CLIC-у су подељени на возове, трајања 156ns и састоје се од пакета честица или вагона. Сваки воз се састоји од 312 појединачних вагона са временским размаком између вагона од 0.5ns док је време између проласка два воза дато фреквенцијом 50Hz . Електрон-позитрон судари се, стога, дешавају на сваких 20ms . Ми у принципу очекујемо 1 електрон-позитрон судар по возу честица. Ми ћемо радити на енергији од 3TeV , која је оптимална за тестирање теорија на граници са Стандардним моделом, као и BSM- Beyond Standard Model теорија. Наведимо сада неке делове CLIC детектора.

1. Извор електрона;
2. Извор позитрона;
3. Пред-прстенови за пригушење који редукују емитанцу снопа;
4. Још прстенова за редуковање емитанце снопа након малопређашњих;
5. Систем за пренос снопа и сабијање снопа у лонгитудиналном правцу;
6. Главни линеарни акцелератор;
7. Систем за испоручивање снопова који доводи снопове до тачке интеракције;
8. Детектори за реконструкцију трагова;
9. Хадронски калориметар;
10. Електромагнетни калориметар;
11. Детектори предње области.

Калориметри мере енергију коју честица губи. Обично су дизајнирани да потпуно зауставе или апсорбују већину честица које долазе од судара, присиљавајући их да депонују сву своју енергију унутар детектора. За нас ће јако бити значајан електромагнетни калориметар, који зауставља фотоне на веома ефикасан начин преко интеракције са електромагнетним пољем. Хадронски калориметар је кориснији за заустављање честица које интерагују слабом интеракцијом.

За детаљнији преглед акцелератора погледати [2].

3.2 Анализа распада који ће нас занимати

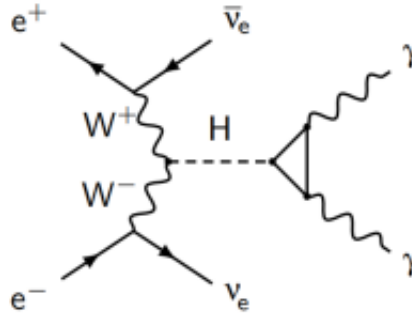


Fig. 1: Feynman diagram of the Higgs production in WW-fusion and subsequent Higgs decay to a pair of photons.

Слика је преузета из [1]. Наиме, након настанка Хигса, може се вршити и размена тешких честица из Стандардног модела и модела виших енергија како би настали фотони, и самим тим мерење односа гранања Хигсовог бозона у буквалном смислу отвара прозор у нову физику енергија већих него у Стандардном моделу. Желимо да одредимо однос гранања (вероватноћу процеса) $BR(H \rightarrow \gamma\gamma)$. Теоријска предикција је

$$BR(H \rightarrow \gamma\gamma) \approx 2.23 \cdot 10^{-3}$$

Однос гранања можемо добити и из следеће формуле

$$(e^+e^- \rightarrow H \rightarrow \gamma\gamma) BR(H \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{N_S}{L \cdot s \cdot id^2}$$

Где је L интегрална луминозност, N_S је број догађаја сигнала, s је ефикасност сигнала а id представља ефикасност идентификације фотона. Погледајмо сада и који су доминантни догађаји у "CLIC"-у на $3TeV$. Треба нагласити како је интегрална луминозност број догађаја који се може десити за време рада машине (по јединици површине), док је тренутна луминозност број догађаја који машина може произвести у јединици времена (по јединици површине). Догађаји наведени у табели испод су доминантни догађаји шума. У секцији фазе апликације ћемо обрадити 8 root фајлова, од којих ће 7 управо потицати од ових догађаја шума. Најдоминантнији догађаји шума су свакако $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ и $e^+e^- \rightarrow$

3.3 Како ради стабло одлуке?

У акцелераторима постоји права ”прашума” честица, и самим тим је јако тешко раздвојити сигнал од шума. Конкретно, стабла одлуке представљају јако добар избор класификатора информације са којом радимо, и јако су добра за разазнавање сигнала од шума.

Како она функционишу? Прво ћемо радити са једним простим примером. Особа коју ћемо у будућности звати Алиса жели да се обуче савршено за матурско сликање. Она треба да изабере боју мајице, боју панталона, ципела, као и материјале од којих су ти комади одеће/обуће направљени (платно, тканина, памук, итд.). Са друге стране, Бобан је заљубљен у Алису и жели да усагласи свој модни стил са Алисиним како би га она приметила. Уколико се Алиси не свиди модна комбинација која се свиди Бобану док пролазе кроз Рајићеву, блокираће Бобана на свим друштвеним мрежама и он никада више неће причати са њом. Како је улог јако велики, Бобан се сетио да Алиса стално лајкује модне комбинације на Инстаграму и почео је да пажљиво класификује узорак од 100 000 комбинација које је Алиса погледала, и за сваку је стављао да ли јој се свидела или није. Онда је почео да учи како раде стабла одлуке. Дакле, стабло одлуке ће у свом првом кораку класификовати варијабле по осетљивости, тј. по важности. Наиме, што је ужи интервал који одређена варијабла може да узме тако да Алиса и даље буде задовољна њом, то ће та варијабла бити битнија (радимо са дискретним случајем тренутно). Према томе, стабло одлуке ће прво јасно да класификује варијабле по важности.

3.4 Информација и ентропија

Наиме, за случајну варијаблу Y која узима дискретне вредности са одређеном вероватноћом (као што се Алиси модна комбинација свиђа са неком вероватноћом), можемо написати следећу формулу за ентропију расподеле случајне варијабле Y .

$$H(Y) = \sum_{i=1}^{i=k} P(Y = y_i) \log_2 P(Y = y_i)$$

Интерпретација у теорији информације: $H(Y)$ представља очекивани број битова за складиштење насумично извучене Y под оптималним алгоритмом.

Заправо, $H(Y)$ треба доживљавати као ентропију било ког другог система. Она је мерило хаоса. Што је виша ентропија, то су расподеле варијабле уједначеније и не можемо да правимо предикције њене највероватније вредности. Што је ентропија мања, расподела варијабле ће бити "шиљатија" и моћи ћемо за само неколико њених вредности да тврдимо огромну вероватноћу.

Циљ наше класификације помоћу стабла одлуке је да **минимизујемо** ентропију задатог система. Како можемо да то урадимо?

Кондиционална ентропија $H(Y|X)$ је задата на следећи начин

$$H(Y|X) = \sum_{j=1}^v P(X = x_j) \sum_{i=1}^k P(Y = y_{ij}|X = x_j) \log_2 P(Y = y_{ij}|X = x_j)$$

Према томе, за сваку варијаблу X по којој сечемо стабло одлуке можемо да дефинишемо величину која се зове **допринос информације**, и која се рачуна на следећи начин

$$IG(X) = H(Y) - H(Y|X)$$

По овој величини можемо да сортирамо све наше варијабле опадајуће и добијемо њихову рангирану важност, јер су нам најбитније варијабле које нам инстантно смањују ентропију у великој мери.

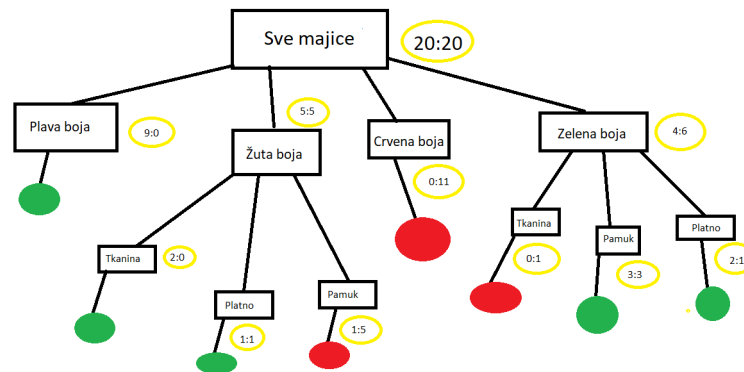
Учење Стабла одлуке ради на такозваном greedy алгоритму, тј. довољно мала вредност ентропије се добија ако сукцесивно сечемо стабло по варијаблама које су на врху ранг-листе, имајући у виду да листови стабла постају нови корени стабала. Алгоритам **тренинга** стабла одлуке се стога може поједноставити на следећа три корака:

1. Кренемо од празног стабла.
2. Расечемо стабло по најважнијој преосталој варијабли.
3. Применимо рекурзију на сваки лист.

Када стајемо?

1. Када је Алиса класификовала све модне комбинације из одређене селекције варијабли као добре или их је све класификовала као лоше, тада стајемо са развојем стабла у дотичном листу.
2. Уколико су догађаји оцене у листу који посматрамо идентични по свим преосталим изборима варијабли, тада стајемо са развојем стабла и додељујемо вредност добра/лоша комбинација дотичном листу у зависности од односа добрих и лоших оцена у листу.

На крају алгорита можемо за сваку комбинацију варијабли са великом сигурношћу тврдити да ли ће се Алиси свидети или не. На слици испод текста је приказан поједностављен алгоритам примењен на Алисине мајице за мали број тест-примера. У пракси никад нећемо у коначном листу стабла имати исти број позитивних и негативних евалуација. Треба напоменути да се тренинг стабла одлуке сматра NP-complete проб-



лемом. Стога се ми ослањамо на greedy алгоритам за његов тренинг као најпрагматичније решење које можемо да смислимо, јер не можемо да оптимално тренирамо стабло у полиномском времену. Са друге стране, провера да ли ће се Алиси свидети нека комбинација или не се врши у логаритамском времену. Стабло потенцијално захтева експоненцијално много чворова и доста је тешко радити са њим за огроман број варијабли. То нас наводи на следеће питање: Шта ћемо са случајем када варијабле узимају реалне, а не дискретне вредности?

Две кључне ствари се мењају:

1. Радимо са бинарним стаблима.
2. Дозвољавамо "сечење" стабла више пута по истој варијабли.

Како ниједан рачунар не може да анализира реалне варијабле, заправо ћемо посматрати сечење стабла на следећи начин:

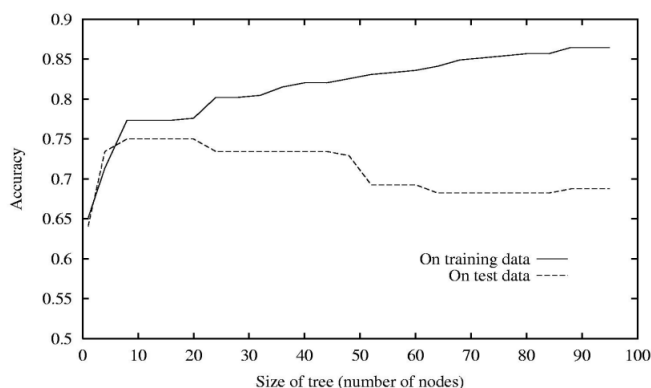
1. Извојићемо све вредности варијабле за које је извршена варијабла и сортирати их растуће. Затим ћемо за низ t_i варијабли посматрати следећу величину (поновно, допринос информацији)

$$IG(r) = H(Y) - H(Y|X = r)$$

и утврдити за коју од вредности $r_i = \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1})$ она узима највећу вредност. Затим ћемо посећи стабло на две гране, $X > r_i$ и $X_i < r_i$

2. Коначно, применићемо рекурзију на измењено стабло, овај пут дозволивши понављање исте варијабле у стаблу.
3. Алгоритам заустављања је исти као у дискретном случају.

Проблем код горепоменутог стабла је што оно има **огроман број чворова**. Један од начина да смањимо број чворова је да посматрамо само "велике интервале" на којима постоје правилности између Алисиног свиђања и несвиђања комбинације. Морамо такође користити и `grouping` (засецање) стабла, како бисмо смањили број чворова (нарочито за реалне интервале). За сложеније моделе и боље резултате можемо користити и `bootstrap` који би прво тренинг податке организовао у класификаторе а потом их спојио у једну велику структуру. Више о томе у [8]. Погледајмо сада како се истренирано стабло понаша са насумичним узорком одеће. Нажалост, за јако велико дрвеће долази до ефекта `overfittinga` - програм



је узео превелик узорак тренинга и такође је јако комплексан. Он почиње да учи не само од сигнала, већ и од веома специфичног узорка шума ког смо му задали. Самим тим је потпуно бескористан на још невиђеним подацима и губи своју улогу. Поред већ наведених начина за смањење овог ефекта, можемо додати и фиксирану дубину стабла у алгоритам, као и минималан број гранања неког листа (свеобухватно по једној варијабли), како бисмо се нашли на оптималном делу горњег графика. Више о томе у [8], [9].

4 Фаза тренинга

Дакле, сада нажалост морамо да се вратимо у стварни свет, где је случај Алисе и Боба (надам се) имагинаран, али сепарација сигнала од шума дефинитивно није. Наиме, наш електромагнетни калориметар у CERN-у региструје фотоне који имају одређене мерљиве карактеристике. Ми на основу тих фотона, као и природе самог судара електрона и позитрона у судару, можемо реконструисати разне осетљиве варијабле овог процеса високе енергије и направити њихове графике. Ипак, постоји гомила других догађаја (видети раније секције) који се могу десити и који ће се мешати са жељеним сигналом. Такође имамо и грешке електронике система. Према томе, наш задатак је следећи: За дати скуп осетљивих варијабли и гомиле тест-примера за тренинг на којима је јасно индексирано шта је сигнал а шта шум, желимо да направимо Boosted Decision Tree које ће моћи касније да ради са правим догађајима 2035. године и које ће нам издвојити шта је за бацање од информација које смо добили у експерименту. Овај проблем је малтене идентичан проблему Алисе и Бобана, само што је комплекснији у сваком могућем погледу осим идејном.

Дефинишимо сада осетљиве варијабле са којима ћемо радити:

1. Инваријантна маса M Хигсовог бозона.
2. Трансверзални импулс фотона бр.2 =5+ Трансверзални импулс кандидат-фотона бр. 2 (није коришћена у фази апликације)
3. Енергија депонована у електромагнетном калориметру
4. Кандидат-енергија Хигса у центру масе
5. Кандидат-трансверзални импулс Хигса (интензитет, не смер)
6. Азимутални угао отклоњења фотонског снопа.

7. Однос енергије депоноване у хардонском калориметру са укупном енергијом депонованом у оба калориметра. (није коришћена у фази апликације)
8. Поларни угао отклоњења другог кандидат-фотона у односу на сноп.
9. Косинус угла хелицитета.
10. Трансверзални импулс првог кандидат-фотона
11. Поларни угао отклоњења првог кандидат-фотона у односу на сноп.
12. Енергија првог кандидат-фотона.
13. Поларни угао између два фотона.
14. Енергија другог кандидат-фотона
15. Поларни угао Хигс-кандидата.
16. Енергија депонована у хадронском калориметру. (није коришћена у фази апликације)

Напомена: Фотон бр.1 је ознака за енергију и једног фотона од два фотона која добијемо из распада $Higgs$.

На доњем графику имамо и ранг-листу варијабли коју је направило стабло одлуке са којим радимо.

```
1 : CandidateM
2 : ptPhoton2
3 : eCalSumB
4 : CandidateE
5 : CandidatePt
6 : CandidatePhi
7 : hCalSumB/(eCalSumB+hCalSumB)
8 : thetaCandidatePhoton2
9 : cosHelAngle
10 : pTCandidatePhoton1
11 : thetaCandidatePhoton1
12 : energyCandidatePhoton1
13 : CandidateTheta
14 : energyCandidatePhoton2
15 : CandidatePL
16 : hCalSumB
```

За тренинг софтвера ћемо користити такозвани Boosted Decision Tree алгоритам, као и Boosted Decision Tree Gradient boost, који су у принципу унапређени алгоритми стабла одлуке. Они су се показали да јако добро раде за огроман број догађаја шума а мали број догађаја сигнала.

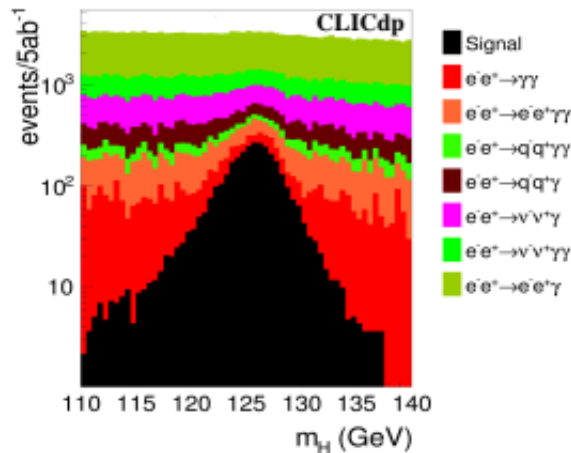
4.1 Преселекција

Наиме, на почетку имамо број догађаја сигнала у хиљадама и број догађаја шума у милионима. Као што смо причали у претходној секцији, не можемо да пошаљемо тај број догађаја у стабло одлуке, јер ћемо обухватити превелики број чворова који потичу из широких интервала осетљивих варијабли. Према томе, први корак у тренингу нашег дрвета радимо ми!

Најразумнији начин да се добије добра преселекција је да се посматрају расподеле догађаја у односу на разне осетљиве варијабли и да се онда интервали варијабли секу на прави начин. Конкретно, ми у овом раду полазимо од одрађене преселекције са три услова

1. Укупна реконструисана инваријантна маса од 2 фотона мора бити у интервалу између 110GeV и 140GeV . (што одговара интервалу масе Хигсовог бозона)
2. Реконструисана укупна енергија фотона мора бити у интервалу између 100GeV и 1000GeV .
3. Трансверзални импулс фотона (интензитет) мора бити у интервалу од 20GeV до 600GeV .

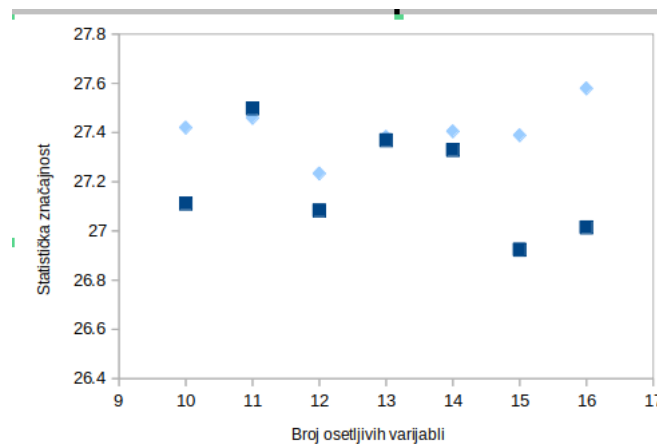
Овим је преселекција извршена и можемо прећи на мултиваријантну анализу.



Histogram signala i xuma nakon preselacije, slika je preuzeta iz [1], ali okvirno odgovara rasporedu signala i xuma za test-uzorak koji smo mi posmatrali u fazi aplikacije pre multivarijantne analize.

4.2 Мултиваријантна анализа

TMVA је програмски пакет за анализу експерименталних података применом метода мултиваријантне статистике и садржи више метода које се могу независно примењивати. Базиран је на ROOT програмском пакету за анализу и графичку обраду резултата мерења, написаних у C++. У фази тренинга радимо са Монте Карло узорцима сигнала и шума. На дијаграму испод је приказана зависност предвиђене статистичке значајности од броја осетљивих варијабли које су уклањане са ранг листе редом од доле.



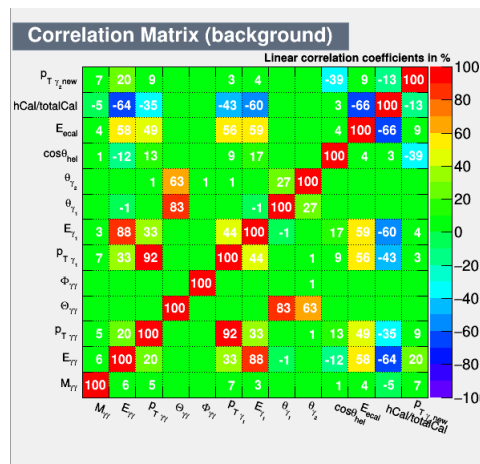
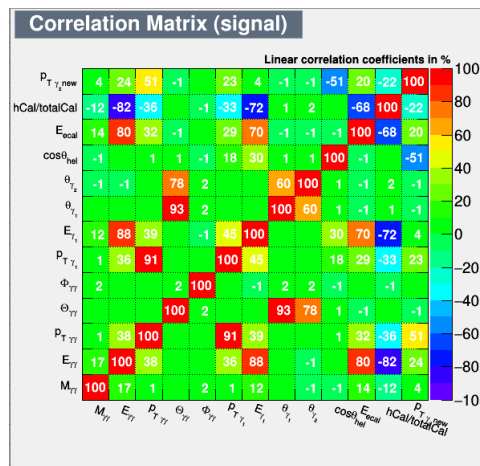
Аутор је одабрао да ради са првих 13 осетљивих варијабли по рангу јер је био задовољан статистичком значајношћу коју је добио за њих, док су флукуације око те значајности биле безначајне и насумичне.

Мера степена успешности раздвајања сигнала од шума се назива статистичка значајност и она се рачуна на следећи начин

$$S = \rho \frac{N_S}{N_S + N_B}$$

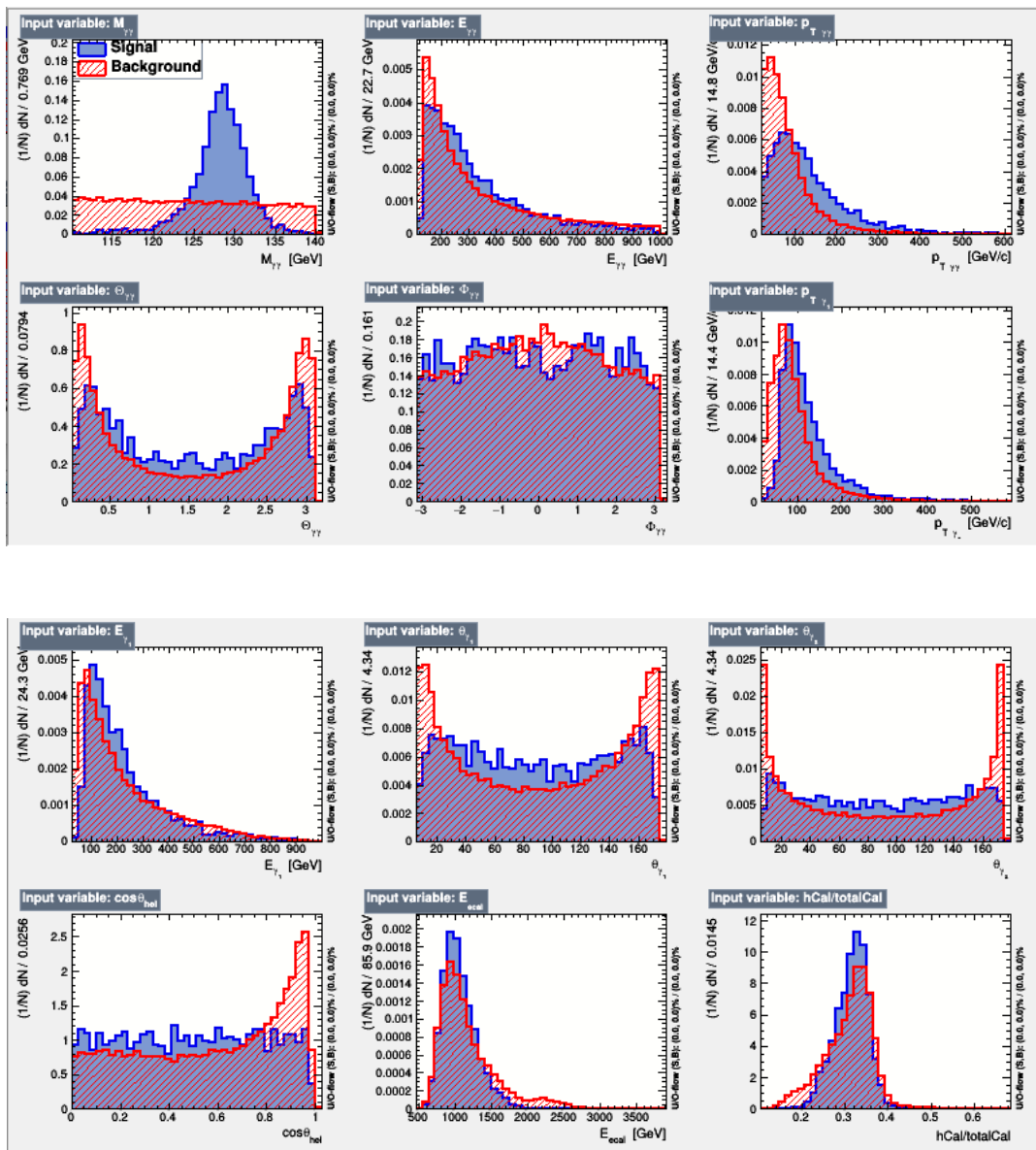
Где је N_S број догађаја сигнала, а N_B број догађаја шума у узорку

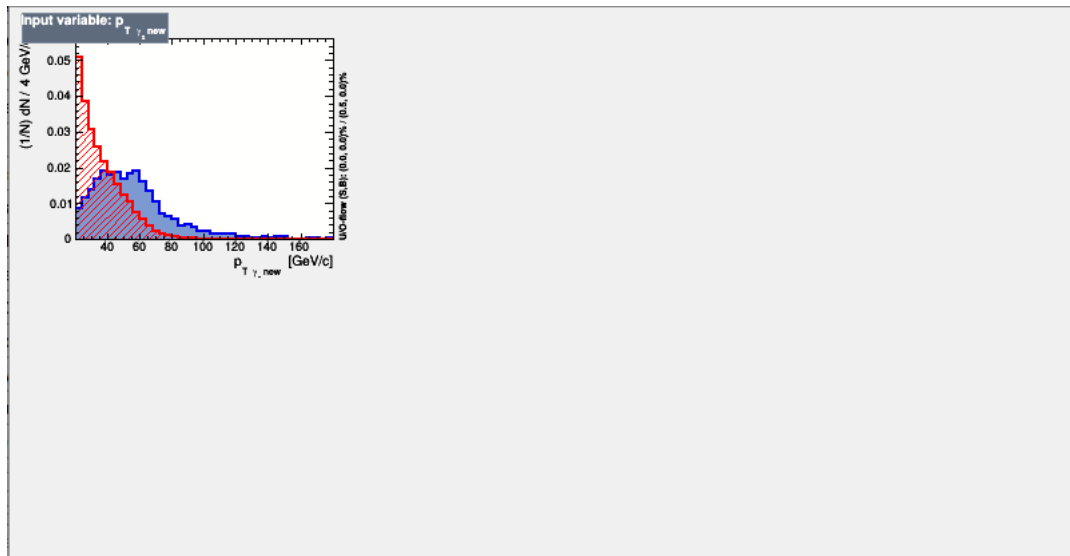
Пре свега желимо да имамо довољну декорелацију осетљивих варијабли како би стабло одлуке функционисало на исправан начин. Уколико су нам варијабле превише корелисане, доћи ће до ефекта *overfitting*-а, где ће програм изгубити могућност да реагује на невидене догађаје, тј. развиће превелику прецизност на тренинг узорку. Корелационе матрице за тренинг узорак изгледају овако



Као што видимо, довољан степен декорелисаности је испуњен.

Затим можемо погледати и дијаграме раздвајања сигнала и шума за ранг-листу осетљивих варијабли.



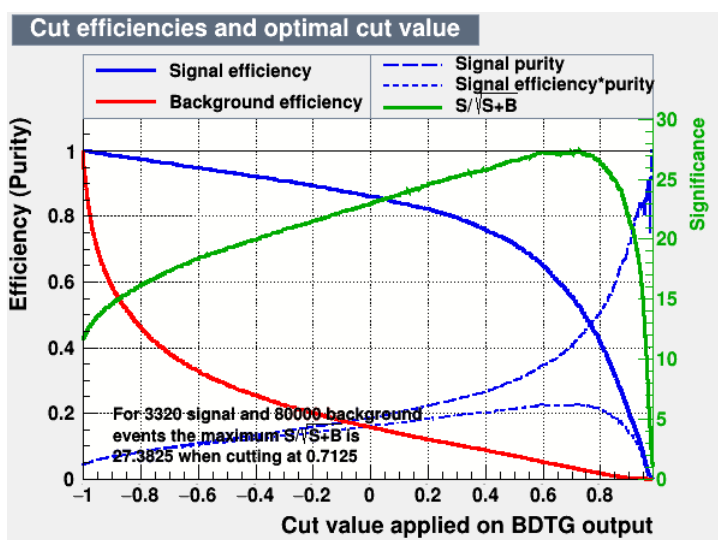
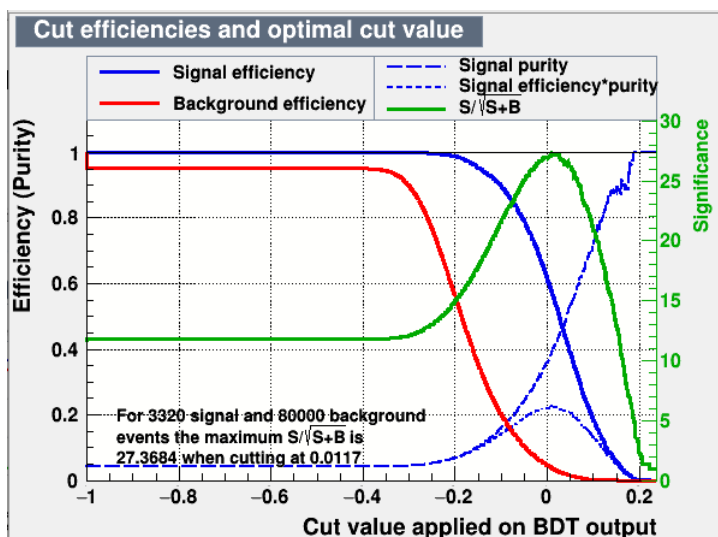


Уочимо да је у горњем левом углу сваког графика приказан такозвани bin - промер хистограма. Сви догађаји унутар једне линије bin-а су еквивалентни за рачунар, и на тај начин можемо да користимо алгоритам стабла одлуке описан у прошлој секцији.

После преселекције смо имали 3320 догађаја сигнала и 80000 догађаја шума. (То је изузетан напредак у односу на милионе догађаја шума које смо имали пре изворног сецкања интервала, и то нам само говори о значају преселекције.) Тада је статистичка значајност износила

$$\rho \frac{N_S}{N_S + N_B} \quad 11.74$$

Наш програм ради следећу ствар - како би тестирао да ли је дошло до overfitting-а или претренирања, он неће узети сав тренинг узорак за учење, већ ће један његов део оставити са стране и тестирати своју тачност на њему. На тај начин програм може да развије процену своје тачности.



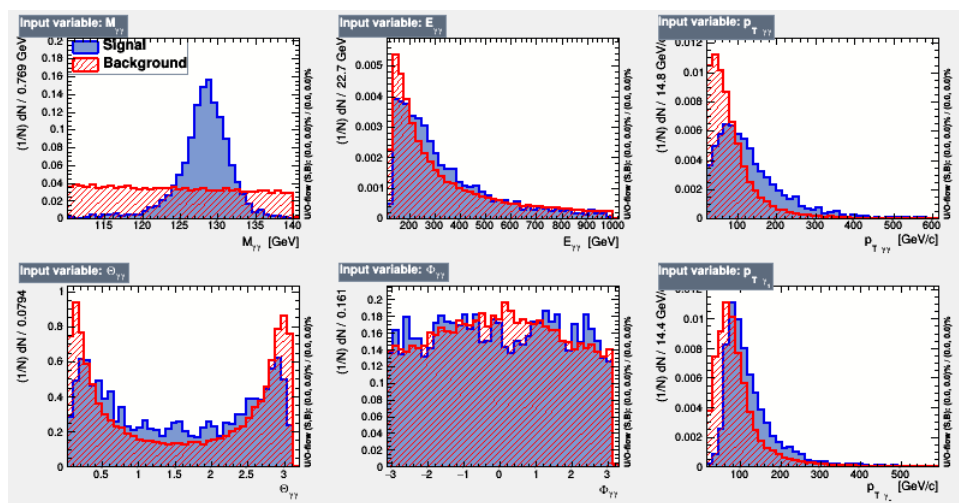
Програм тврди да је статистичка значајност сада отприлике

$$S = 27:4$$

Што је значајно побољшање у односу на претходних $S = 11$.

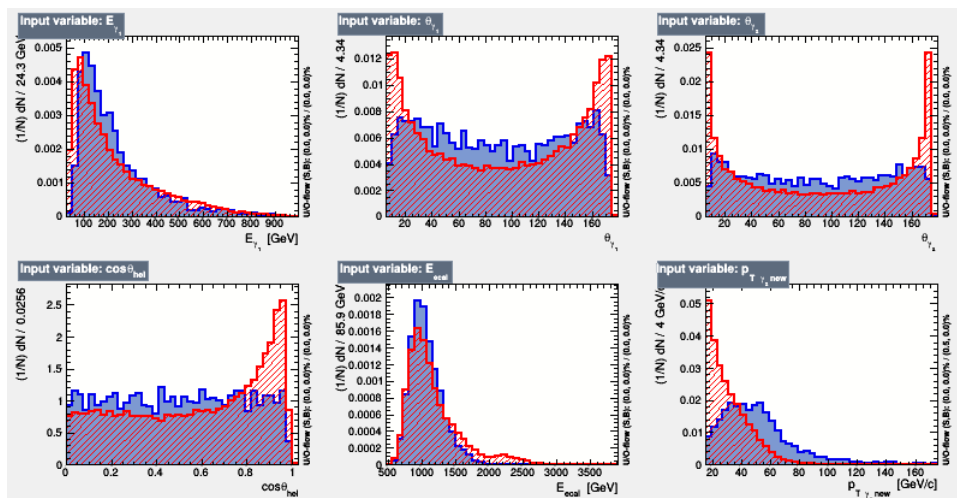
5 Фаза апликације - Резултати

Током фазе апликације су три осетљиве варијабле, назначене у прошлој секцији, почеле да праве проблеме при евалуирању ефикасности стабла и стога су морале бити уклоњене. Разлог за њихову некомпатибилност са програмом је још увек непознат, али се аутор нада да ће ускоро бити откривен. Без те три варијабле, од којих енергија депонована у хадронском калориметру ионако није била коришћена, одговарајући дијаграми изгледају овако

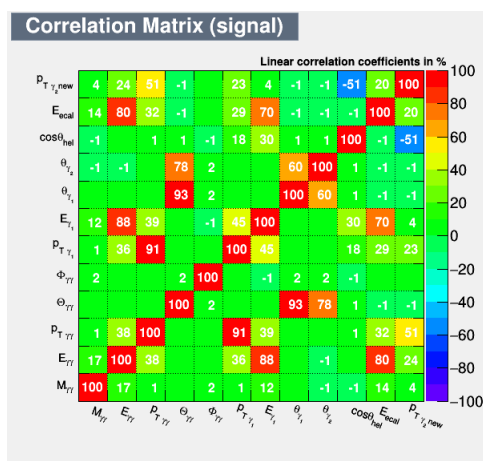


Varijabl e-1

Желимо да погледамо колико је ефикасно наше стабло, а то ћемо урадити са 8 root фајлова, од којих сваки репрезентује по један изузетно доминантан догађај шума.



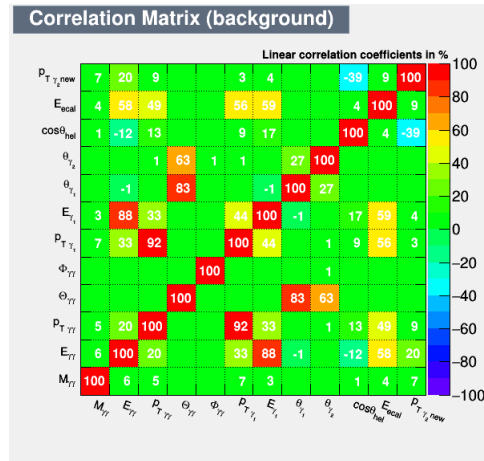
Varijabl e-2



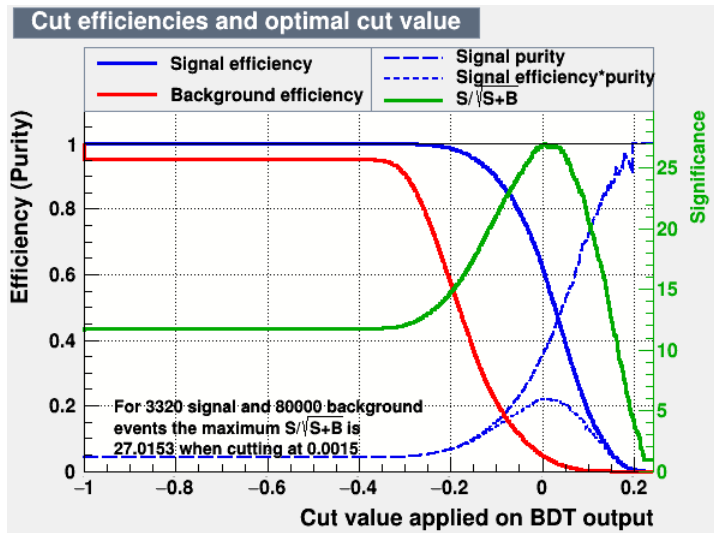
Korelaci ja-si gnal

Додаваћемо и описе уз дијаграме (конфузан распоред).

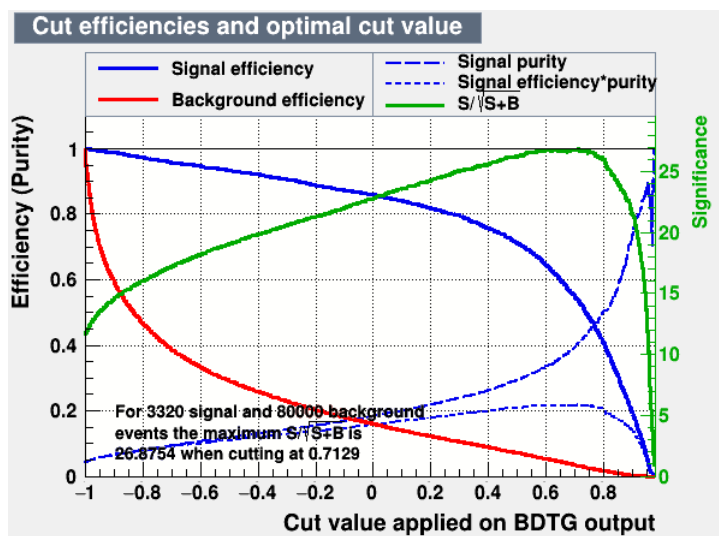
Komentar: Ovaj rad je dal eko od zavr xenog. Nai me, jox uvek el i mo da i zraqnamo koefi ci jent e efi kasnost i i broj i zdvojeni h dog a ja si gnal a na si ste ma ti qan na qin, kao x to je to ura eno u [11] u Tabel i 3, na pri mer. U narednom peri odu e au tor svaka ko radi ti na tom del u ovog rada, kao i na pove a u broja oset i vih vari jabl i u mul ti vari jant noj anal izi.



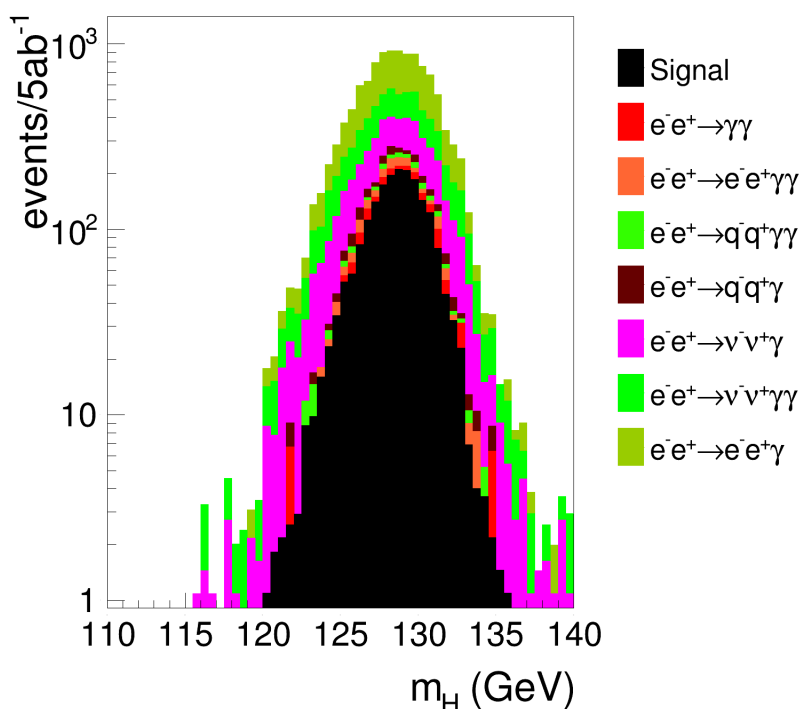
Korel aci ja-xum



BDT efi kasnost



BDTG efikasnost



Završni histogram signala i zuma nakon multivarijantne analize na test-uzorku. Ovaj dijagram predstavlja završetak celog rada, na kome se vidi potpuna izolacija signala nakon multivarijantne analize. Signal je u ogromnoj meri izolovan od zuma. Numeričke vrednosti biće ekstrahovane nakon formiranja tabela efikasnosti u skorijoj budućnosti od strane autora.

Литература

- [1] G. Kačarević, I. Božović-Jelisavčić, N. Vukašinović, G. Milutinović-Dumbelović, M. Radulović, J. Stevanović, I. Smiljanić, T. Agatonović-Jovin *Measurement of the Higgs branching ratio $BR(H \rightarrow \gamma\gamma)$ at 3TeV CLIC*. Eur. Phys. J. 2022.
- [2] Ivana Vidaković *Primena multivarijantne analize u separaciji signala Higsovog bozona na energiji 3TeV na buducem linearnom sudaracu CLIC*. Kragujevac 2021.
- [3] G. Milutinović- Dumbelović *Metode merenja odnosa grananja Higsovog bozona u procesima $H \rightarrow \gamma\gamma$ i $H \rightarrow ZZ$ na 1.4 TeV na buducem linearnom sudaracu CLIC*. Beograd, 2017.
- [4] C.E.Thomas (D.Chua) *Lectures on the Standard Model*. 2017.
- [5] D. Tong *Lectures on Quantum Field Theory*, <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft/qft.pdf> . 2006.
- [6] D. Skinner *Lectures on Advanced Quantum Field Theory*, <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/dbs26/AQFT/chap8.pdf>. 2017.
- [7] N.S. Manton (W. Jay, B. Nachman) *Symmetries, Fields, and Particles*, <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/examples/3P2.pdf>. 2014.
- [8] <https://people.csail.mit.edu/dsontag/courses/ml16/slides/lecture11.pdf>
- [9] <https://www.ise.bgu.ac.il/faculty/liorr/hbchap9.pdf>
- [10] David Tong , *Statistical Field Theory*, 2017 <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/sft/sft.pdf>
- [11] <https://journals.aps.org/prd/pdf/10.1103/PhysRevD.105.092008>

6 Апендикс А - Лијеве групе

Направићемо кратак преглед Лијевих група, са основним дефиницијама и теоремама. Неке од (веома важних) доказа нећемо ни изложити како бисмо сачували простор за физичарима битније ставке.

Најшире гледано, Лијева група је група и многострукост. Према томе, најбоље би било развити одређене алатке диференцијалне геометрије и онда их применити специфично на Лијеве групе и алгебре.

Дефиниција 2 (Глатка мапа). *Кажемо да је мапа $f: R^n \rightarrow R^m$ глатка ако јој сви парцијални изводи свих редова постоје.*

Дефиниција 3 (Многострукост). *Многострукост (димензије n) је skup M заједно са следећим подацима:*

1. *Колекција U отворених скупова у M чија унија је M*
2. *Колекција бијекција $\phi: U \rightarrow V$, где је V отворени подскуп R^n .*

*Ове мапе морају да задовољавају одређене услове компатибилности:
За свако U, V, W , имамо $(U \cap V)$ је отворен у R^n и функција транзиције*

$$\phi^1: (U \cap V) \rightarrow (U \cap V)$$

је глатка.

Дефиниција 4 (Глатка мапа). *Нека је M многострукост. Онда је мапа $f: M \rightarrow R$ глатка ако је композиција $f \circ \phi^1: (U \cap V) \rightarrow R$ глатка на сваком отвореном скупу отвореног отаца M . Хире, мапа $f: M \rightarrow N$ из једне многострукости у другу је глатка ако за сваки отворени skup опремљен мапом у еуклидеански простор $(U; \phi)$ од M , и било који пар $(V; \psi)$ из N , важи да је мапа $\psi \circ f \circ \phi^1: (U \cap V) \rightarrow (V)$ глатка.*

Дефиниција 5 (Лијева група). *Лијева група је група чији је skup елемената задат на структури некакве многострукости, и важи да су мултипликативна мапа $m: G \times G \rightarrow G$ и инверзна мапа $i: G \rightarrow G$ глатке. Понекад (али реално никад) пишемо да је $M(G)$ многострукост Лијеве групе.*

Прво очигледно питање које можемо да поставимо себи би било на које све многострукости ми можемо да "окачимо" нашу Лијеву групу. Испоставља се да постоји теорема која забрањује да одређене многострукости имају структуру Лијеве групе.

Теорема 2 (Поенкаре-Хопф теорема). *Neka je M kompakt na mnogostрукост. Ако M има не-нула Ојлерову карактеристику, онда свако векторско поље на M има нулу.*

Уочимо такође

Теорема 3. *Svaka Liјеva grupa G dimenzije веће од 0 има не-нула векторско поље.*

Нећемо доказивати ове две теореме јер су тешке и скренули бисмо са курса овог рада. Оне нам заједно говоре да, на пример, S^2 не може бити многострукост било какве Лијеве групе.

6.1 Лијеве алгебре

Оно што је лепо код Лијевих група је пре свега особина леве translације, тј. чињеница да се мапа $L_h : G \rightarrow G$, $L_h(g) = hg$, $h \in G$ понаша као хомеоморфизам и изоморфизам ове групе у саму себе. Такође, ако је група довољно лепа (видећемо примере), левом translацијом можемо идентички елемент пребацивати у било који други елемент групе *eksponencijalnom mapom*.

Кренућемо од формалне дефиниције Лијеве алгебре, па ћемо ићи даље.

Дефиниција 6 (Лијева алгебра). *Liјеva algebra \mathfrak{g} је векторски простор (над \mathbb{R} или \mathbb{C}) опремљен заградом*

$$[\cdot; \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

Tako da su zadovoljene sledeće tri relacije

1. $[X; Y] = -[Y; X]$ за све $X; Y \in \mathfrak{g}$
2. $[X + Y; Z] = [X; Z] + [Y; Z]$ за све $X; Y; Z \in \mathfrak{g}$ и $[\lambda X; Y] = \lambda [X; Y]$ у пољу.
3. $[X; [Y; Z]] + [Z; [X; Y]] + [Y; [Z; X]] = 0$ за све $X; Y; Z \in \mathfrak{g}$. Последња идентитет се често назива *Jakobijev identitet*.

Дефиниција 7 (Димензија Лијеве алгебре). *Dimenzija Lijeve algebre je dimenzija enog vektorskog prostora.*

Обично базис B Лијеве алгебре \mathfrak{g} можемо да индексиремо на следећи начин

$$B = \{T^a : a = 1; 2; \dots; \dim \mathfrak{g}\}$$

И онда свако X из алгебре записујемо као $X = X_a T^a; X_a \in \mathbb{F}$.

Из линеарности видимо да су нам довољне комутационе релације за елементе базиса.

Дефиниција 8 (Структурне константе). *Neka je \mathfrak{g} Lijeva algebra sa bazisom $\{T^a\}$. Tada su strukturne konstante f_c^{ab} (elementi po a) date sa*

$$[T^a; T^b] = f_c^{ab} T^c$$

Дефиниција 9 (Хомоморфизам Лијевих алгебри). *Homomorfizam Lijevih algebri $\mathfrak{g}; \mathfrak{h}$ je linearna mapa $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ takva da važi*

$$[f(X); f(Y)] = f([X; Y])$$

Za sve $X; Y \in \mathfrak{g}$.

Дефиниција 10 (Изоморфизам Лијевих алгебри). *Izomorfizam Lijevih algebri je invertibilan homomorfizam Lijevih algebri koji inverz je takođe homomorfizam.*

Дефиниција 11 (Подалгебра). *Podalgebra Lijeve algebre je en vektorski potprostor koji je takođe Lijeva algebra pod zagradom.*

У овом моменту је остало само да наведемо неке кључне резултате везане за физичаре. Пре свега, подсетимо се да смо у диференцијалној геометрији такође сретали Лијеву алгебру на тангентном простору многострукости. Сасвим је логично идентификовати Лијеву алгебру са тангентним простором неке многострукости коју бисмо волели да назовемо Лијева група. Према томе, преостаје нам само чудно питање: Да ли, ако знамо Лијеву алгебру за неку многострукост, можемо да конструишемо и њену Лијеву групу, или постоје читаве класе група са истим алгебрама? Одговор је мало компликован, али у принципу гласи да, до на сечење групе по дискретној групи на косете, скоро да можемо да идентификујемо Лијеву алгебру са веома специфичном Лијевом групом.

Пример.

$$\mathfrak{so}(2) = \mathfrak{o}(2)$$

Иако су $SO(2); O(2)$ различите групе. У реду испод се могу наћи популарне Лијеве групе међу физичарима, као и дефиниције њихових алгебри у фундаменталној репрезентацији. (Фундаментална репрезентација матричних Лијевих група је управо њихова матрична репрезентација). Свакако нам је главна теорема која нам прича о изградњи групе из њеног тангентног простора.

Теорема 4 (Бејкер-Кампбел-Хаусдорф формула). *Neka su $X; Y$ elementi tangentnog prostora \mathfrak{g} Lijeve grupe G . Tada važi*

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp(Z); Z = X + Y + \frac{1}{2}[X; Y] + \dots$$

где \dots одговара ни још и e дефиниција заграда.

Ево листе неких основних Лијевих група. Доста је лако извести њихове Лијеве алгебре ако гледамо како се понашају око матрице идентитета, и детаљнија анализа се може пронаћи у [7], али је ми овде нећемо обавити.

$$GL(n) = \{A : A \in M_{n, \mathbb{R}}(x); \det A \neq 0\}$$

$$SL(n) = \{A : A \in GL(n); \det A = 1\}$$

$$O(n) = \{A : A \in GL(n); A^T = -A\}$$

$$SO(n) = \{A : A \in O(n); \det A = 1\}$$

Што се тиче $GL(n)$ над \mathbb{C} , имамо још две групе

$$U(n) = \{A : A \in GL(n); A^y = -A\}$$

$$SU(n) = \{A : A \in U(n); \det A = 1\}$$

7 Апендикс Б - Репрезентације

Направићемо веома кратак увод у теорију репрезентација за наше скромне потребе.

Дефиниција 12. *Linearna reprezentacija od G na kompleksnom vektorskom prostoru V je homomorfizam*

$$\rho : G \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(V)$$

Основни проблем теорије репрезентација је класификовање свих репрезентација групе G , до на изоморфизам. Овај проблем је прилично озбиљан, али испоставља се да су математичари смислили неколико кључних структура које посматрамо за репрезентације. Више о репрезентацијама се може наћи у [7].

Дефиниција 13. *Podreprezentacija od V reprezentacije grupe G je vektorski potprostor $W \subseteq V$ tj. imamo*

$$\forall w \in W; g \in G \Rightarrow \rho(g)(w) \in W$$

Дефиниција 14. *Sa ovom definicijom, $V=W$ se naziva koeficijentskom reprezentacijom V po W .*

Дефиниција 15. *Diagonalna suma dve reprezentacije $(\rho_1; V_1), (\rho_2; V_2)$ je vektorski prostor $V_1 \oplus V_2$ sa blok-diagonalnom akcijom $\rho_1 \oplus \rho_2$ od G .*

Дефиниција 16. *Reprezentaciju nazivamo ireducibilnom ako ne sadrži prave invarijantne potprostore. Zove se kompletno ireducibilna ako se može rastaviti na diagonalnu sumu ireducibilnih reprezentacija.*

Теорема 5. *Svaka kompleksna reprezentacija konačne Abelove grupe je kompletno ireducibilna, i svaka ireducibilna reprezentacija je jednodimenzionalna.*

Теорема 6. *Svaka kompleksna reprezentacija konačne grupe je kompletno reducirabilna.*

Овај резултат се често идентификује са Машкеовом теоремом, и он доиста одмах следи из ње.

АЛТЕРНАТИВНО:

Дефиниција 17 (Хермитски унутрашњи производ). *Hermitski unutrašnji proizvod je bilinearna mapa $(;): V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ koja zadovoljava sledeće uslove*

1. $(v;!) = (!;v)^y$
2. $(v;v) > 0$ ako $v \notin 0$

Дефиниција 18. *Reprezentacija V je unitarna ako je V opremljena Hermitskim unutrašnjim proizvodom koji je očuvan pod akcijom grupe G reprezentacijom, tj.*

$$(v;!) = ((g)(v); (g)(!))$$

Za svaki izbor $g \in G$.

Теорема 7 (Унитарни критеријум). *Konačnodimenzijska unitarna reprezentacija bilo koje grupe je kompletno reducirabilna.*

Теорема 8 (Вејлов унитарни трик). *Konačnodimenzijske reprezentacije konačnih grupa su unitarizabilne.*

Изложићемо доказ последње теореме јер је леп, користан, и даје нам интуицију како да идемо даље.

Dokaz. Пођимо од било ког Хермитског унутрашњег производа, на пример (након одабира базиса)

$$(e_i; e_j) = \delta_{ij}$$

Конструисаћемо нови унутрашњи производ простим налажењем просека по целој групи

$$(v;!)^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (gv; g!)$$

Врло лако је одавде уочити како множење са g "врти" елементе групе, и самим тим имамо G - инваријантност тј. унитарност. Такође лако изводимо позитивност. \square

Горња теорема такође важи и за компактне Лијеве групе.

Теорема (Шурова лема).

1. *Претпоставимо да $V; W$ и редуцибилне репрезентације G преко F . Онда је било који G -хомоморфизам $\rho : V \rightarrow W$ или нула-преликава или изоморфизам.*
2. *Ако је F алгебарски затворено, и V и редуцибилан G -простор, онда је било који G -ендоморфизам $\rho : V \rightarrow V$ скаларни умножак идентичке мапе id_V .*

Теорема 9. *Коначна Абељова група $G = C_{n_1} \times C_{n_2} \times \dots \times C_{n_r}$ има тајно j G -и редуцибилних репрезентација.*

Дефинисаћемо још и тензорски производ и карактере репрезентација.

Дефиниција 19 (Тензорски производ). *Нека су $V; W$ векторски простори преко F . Нека су $\{v_i\}_{i=1}^n$ и $\{w_j\}_{j=1}^m$ базе V и W димензије $n; m$ респективно. Фиксирајмо $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$ базе V и W као $v_1; v_2; \dots; v_n$ и $w_1; w_2; \dots; w_m$. Простор тензорског производа $V \otimes W$ је nm -димензионални векторски простор чији је база дат формалним симболима*

$$\{v_i \otimes w_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$$

и, наравно

$$V \otimes W = \left\langle \sum_{i,j} \alpha_{ij} v_i \otimes w_j : \alpha_{ij} \in F \right\rangle$$

са "оцигледном" адитивном и скаларном мултипликацијом.

Нека је

$$v = \sum_i \alpha_i v_i \in V; w = \sum_j \beta_j w_j \in W$$

Тода дефинишемо

$$v \otimes w = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (v_i \otimes w_j)$$

Дефиниција - Тврђење

Нека су $\rho : G \rightarrow GL(V)$, $\sigma : G \rightarrow GL(W)$ репрезентације G . Дефинишемо

$$\rho \otimes \sigma : G \rightarrow GL(V \otimes W)$$

на следећи начин

$$(\rho \otimes \sigma)(g) = \sum_{i,j} \rho^i(g) \sigma^j(g) v_i \otimes w_j = \sum_{i,j} (\rho(g)v)^i (\sigma(g)w)^j$$

Онда је ρ репрезентација G .

Dokaz: Тривијалан.

Сада ћемо се позабавити карактерима репрезентација, пошто се њихова дефиниција може проширити на компакне Лијеве групе ([8]).

Дефиниција 20 (Карактер репрезентације). *Karakter reprezentacije* $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$, $\chi(g) = \text{tr}(\rho(g))$, $\rho \in \text{Rep}(G)$, χ је дефинисан као

$$\chi(g) = \text{tr}(\rho(g))$$

Сада ћемо навести једну теорему чији је доказ тривијалан.

Теорема.

- $\chi(1) = \dim V$.
- χ је класена, тј. она је инваријантна у односу на конјугацију

$$\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$$

за све $g, h \in G$.

- $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$
- За две репрезентације V, W имамо

$$\chi(V \oplus W) = \chi(V) + \chi(W)$$

- За две репрезентације V, W имамо

$$\chi(V \otimes W) = \chi(V) \chi(W)$$

8 Апендикс Ц - Разно

У овом апендиксу ће нам главни циљ бити да изведемо Вордове идентитете. Из Вордових идентитета ћемо извести веома важну релацију у теорији поља коју примењујемо у првој секцији при извођењу Голдстонових бозона на квантни начин. Након тога ћемо изнети неколико ставки везано за хиралност и повезаност са спином, као и трансформације парности, реверзије времена и коњугације наелектрисања.

8.1 Вордови идентитети

Нека имамо трансформацију поља \mathcal{V}^{θ} , тако да нам функција партиције теорије остаје идентична.

$$Z = \int D e^{S_{E[1]}} = \int D^{\theta} e^{S_{E[1]}}$$

Конкретно, направићемо претпоставку да су засебно мера D и члан $e^{S_{E[1]}}$ очувани при овој трансформацији, што заправо не мора бити случај, али за наше скромне физичарске потребе ће сасвим радити. Нека је трансформација поља $\mathcal{V}^{\theta} = +$

Где је нека константа, тако да је $D^{\theta} = D$. Проширимо сада ову глобалну симетрију на локалну симетрију (x) .

Тада, можемо тврдити да функција партиције мора имати следећу форму

$$Z^{\theta} = \int D e^{S_{E[1]}} \left(1 - \int_M d^n x j^{\theta}(x) \right)$$

До првог реда у (x) . У генералном случају, j добија допринос и од D и од $e^{S_{E[1]}}$, а ако би добијала допринос само од другог члана, онда би се она понашала као класична струја, са којом смо јако добро упознати. Можемо према томе закључити да важи следећа релација

$$\int D e^{S_{E[1]}} \int_M d^n x j^{\theta} = 0$$

За све изборе (x) у експанзији првог реда.

Применом парцијалне интергације на интеграл унутар путног интеграла, добијамо да важи

$$\int_M d^d x (x) @ < j (x) > = 0$$

Где је M наша многострукост, и нисмо додавали запремински члан мери у овом простору због једноставности извођења, али треба увек у пракси радити са простором нетривијалне метрике.

Према томе, видимо да се очекивана вредност j понаша као очувана струја теорије, и имамо квантну верзију Нетерине теореме.

Сада прелазимо на корелационе функције, које се понашају мало узбудљивије.

Заправо, испоставља се да је могуће извести Фајнманова правила за класичну скаларну теорију (као и за неке сложеније теорије) применом Швингер-Дајсонове једначине, која је дериват Вордових идентитета.

Према томе, нека је оператор који посматрамо

$$O(x) = O_1(x_1)O_2(x_2) \cdots O_n(x_n)$$

Као и пре, нека имамо инфинитезималну трансформацију поља $\mathcal{V} + \delta\mathcal{V}$, где је δ нека константа, тако да је трансформација заправо симетрија.

Онда за генерално (x) имамо да важи

$$\begin{aligned} & \int D e^{S_E[1]} O_1(x_1)O_2(x_2) \cdots O_n(x_n) = \\ & = \int D e^{S_E[1]} O_1(x_1)O_2(x_2) \cdots O_n(x_n) + \sum_{i=1}^n \delta(x_i) O_i(x_i) \prod_{j \neq i} O_j(x_j) \end{aligned}$$

Где имамо, наравно

$$O_i(x_i) = \frac{\delta O_i}{\delta x_i}$$

Према томе, на најнижем нивоу у развоју проналазимо

$$\int @ (x) < j (x) \prod_{i=1}^n O_i(x_i) > d^d x = \sum_{i=1}^n \delta(x_i) < O_i(x_i) \prod_{j \neq i} O_j(x_j) >$$

Са леве стране вршимо парцијалну интеграцију да померимо извод са на корелаторе, а са десне стране уводимо делта-функције у интеграле тако да на крају добијемо финалну формулу

$$\int (x) @ \langle j(x) \prod_{i=1}^n O_i(x_i) \rangle d^d x = \sum_{i=1}^n \int (x) d(x-x_i) \langle O_i(x_i) \prod_{j \neq i} O_j(x_j) \rangle d^d x$$

и закључујемо, пошто ово важи за превише велику класу (x) , да важи

$$\boxed{@ \langle j(x) \prod_{i=1}^n O_i(x_i) \rangle = \sum_{i=1}^n d(x-x_i) \langle O_i(x_i) \prod_{j \neq i} O_j(x_j) \rangle}$$

Ово је Вордов идентитет за корелационе функције. Екстремно је важан. На пример, у Квантној електродинамици, када се изводи поправка жиромагнетског односа за електрон, Вордов идентитет помаже да се калкулације доприноса скрате са рачуна од 5 страна на рачун од малтене једне стране, када је примењен на пропагатор у импулсном простору.

Сада иде извођење веома битног резултата који касније користимо при извођењу Голдстонових бозона.

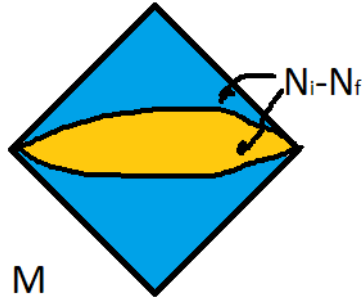
Претпоставимо да је M компактно и без границе, као што смо и до сада малтене радили, јелте. Урадићемо интеграцију Вордовог идентитета преко M , користећи се доста једноставним случајем Стоксове теореме.

$$0 = \int_M @ f(x; x_i) d^d x = \sum_{i=1}^n \langle O_i(x_i) \prod_{j \neq i} O_j(x_j) \rangle = \langle \prod_{i=1}^n O_i(x_i) \rangle$$

Сада иде занимљив део. Претпоставимо да смо издвојили подмногострукост M^0 унутар M са границом $N = N_1 \cup N_0$. Хајде да видимо шта нам интергација Вордовог идентитета унутар M^0 сада даје.

$$\begin{aligned} \int_{M^0} @ f(x; x_i) d^d x &= \int_{N_1 \cup N_0} \sum_{i=1}^n \langle j(x) \prod_{i=1}^n O_i(x_i) \rangle d^{d-1} x = \\ &= \langle Q[N_1] \prod_{i=1}^n O_i(x_i) \rangle - \langle Q[N_0] \prod_{i=1}^n O_i(x_i) \rangle = \sum_{x_i \in M^0} \langle O_i(x_i) \prod_{j \neq i} O_j(x_j) \rangle \end{aligned}$$

Док нам десна страна даје суму по свим обухваћеним сингуларностима (видети горе). Према томе, ако успемо да одаберемо праве временске slice-ове, можемо да узмемо тачно једну сингуларну тачку из целе многострукости (x_1) . Такође ћемо узети инфинитезимално танак регион



многострукости, како бисмо могли да посматрамо щелу ситуацију из ”квантне” перспективе. Уз додавање чистог квантног вакуума $|j\Omega\rangle$ у теорију, можемо написати.

$$\langle j\Omega | T [\hat{Q}; \hat{O}_1(x_1)] \prod_{i=2}^n O_i(x_i) |j\Omega\rangle = \langle j\Omega | T f O_1 \prod_{i=2}^n O_i(x_i) g |j\Omega\rangle$$

Према томе, у чистој квантној слици имамо да важи

$$\hat{O} = [\hat{Q}; O]$$

Што је наравно и резултат који смо желели да покажемо.

8.2 Хиралност

Ова секција ће бити веома кратка и фокусираће се на растављање спинора на десне и леве компоненте. Касније ћемо поменути и РСТ симетрију. Према томе, нека радимо са репрезентацијом Клифордове алгебре

$$f ; g = 2$$

У којој гама-матрице узимају следеће вредности:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Где су σ_i , наравно, Паулијеве матрице које узимају следеће вредности

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Оваква репрезентација Клиффордове алгебре се назива хирална репрезентација. Формирајмо сада пету гама-матрицу

$$\gamma_5 = i \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

Она изгледа овако у хиралној репрезентацији

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Уочимо и антикомутиционе релације ове матрице

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0; \quad (\gamma_5)^2 = 1$$

Главна идеја нам је да уочимо следеће операторе

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$$

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$$

Такође, уочимо

$$1 = P_L + P_R$$

Сваки Дирак спинор можемо раставити на следећи начин

$$\psi = (P_L + P_R)\psi = (P_L\psi) + (P_R\psi) = \psi_L + \psi_R$$

Најбитнија ствар коју треба запамтити је да се безмасени спинор може раставити на свој леви и десни спинор, који се понашају као потпуно функционална спинорска поља. Доказ ове ставке се може наћи у [5]. Сада ћемо да повежемо ове изразе са хиралношћу.

Дефиниција (Хелицитет).

Хелицитет је пројекција оператора момента импулса у квантној теорији на правац линеарног импулса честице.

$$h = \mathcal{J} \cdot \hat{p} = \mathcal{S} \cdot \hat{p}$$

Конкретно, S ће бити описано следећим оператором за фермионе (овај израз се може извести преко Нетерине теореме примењене на инфинитезималне Лоренц-ротације простор-времена):

$$S_i = \frac{i}{4} \epsilon_{ijk} \sigma_j \sigma_k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Тврђење.

За безмасени спинор важи

$$hu(p) = \frac{1}{2} u(p)$$

Dokaz:

Пре свега, из Диракове једначине имамо

$$\not{p}u = 0$$

Када распишемо то имамо

$$(p^0 - \not{p}^i)u(p) = 0$$

И када помножимо горњи израз са $\frac{1}{p^0}$ имамо

$$u(p) = \frac{\not{p}^i}{p^0} u(p)$$

Како је честица безмасена, имамо и

$$p^0^2 - p^{i2} = 0; \quad \not{p}^i = \frac{p^i}{p^0}$$

Директним рачуном у хиралној репрезентацији (физика коју радимо мора дати исте експерименталне предикције без обзира на избор репрезентације Клиффордове алгебре са којом радимо!), добијамо и да важи

$$\not{p}^i = 2S^i$$

И добијамо

$$u(p) = 2hu(p)$$

што је и било тражено. \square

Конкретно, важи

$$hu_{L,R}(p) = \frac{1}{2} u_{L,R}(p) = \frac{1}{2} u_{L,R}(p)$$

Према томе имамо фиксиран хелицитет левих и десних спинора. Ово је доста значајан резултат. Наиме, леви и десни спинори се потпуно другачије понашају у Стандардном моделу, јер се слаба интеракција спарује само са левим спинорима. Са друге стране, спин је сачуван у сваком судару или распаду. Очигледно је да ће природа забранити догађаје одређених распада или судара уколико они нарушавају одржање импулса, и тако добијамо да су бројни процеси чије Фајнманове дијаграме можемо да нацртамо заправо потпуно немогући. (Поново, овај исказ важи само за безмасене честице.)

8.3 PCT

Аутор је сматрао како треба споменути ову симетрију у раду, мада се нећемо бавити математиком овог занимљивог предела Стандардног модела. Наиме, доста рано се сумњало како свака разумна (тј. генеричка) квантна теорија поља мора бити симетрична у односу на некакву врсту реверзије времена, простора и наелектрисања. Наиме, *PCT* симетрија говори о томе како је физика коју радимо идентичка физици у свемиру у коме смо прво интегрисали осу времена, затим коњуговали честице и античестице у теорији, и коначно применили оператор "парности" ($\chi \rightarrow \chi^\dagger$) на простор. Ова трансформација потпуно има смисла, мада је било потребно време како би се малопређасњи исказ заправо доказао. Постоји читава класа оваквих теорема које се баве генеричким теоријама нашег универзума, најпознатија од којих би свакако била Колман-Мандула теорема, која прича о томе како "максимална" симетрија било које разумне теорије може бити заправо Поенкареова симетрија укрштена са неком дискретном симетријом квантне теорије.