

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

Београд

МАТУРСКИ РАД ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Примена комплексних бројева у геометрији

Кандидат: Ива Живковић IVд

Ментор: Бобан Маринковић

Београд, мај 2026.

Садржај

1	Шта је комплексан број?	2
1.1	Реалан и имагинаран део комплексног броја, конјугат и модул	2
1.2	Тригонометријски облик комплексног броја	3
1.3	Геометријска интерпретација комплексног броја	4
1.4	Јединична кружница	5
2	Основни геометријски услови у комплексној равни	6
2.1	Колинеарност	6
2.2	Паралелност	7
2.3	Нормалност	8
2.4	Концикличност	9
2.5	Сличност троуглова	10
3	Значајне тачке троугла у комплексној равни	11
3.1	Ортоцентар троугла	11
3.2	Тежиште троугла	12
3.3	Нормализација у случају описане јединичне кружнице	14
3.4	Нормализација у случају уписане јединичне кружнице	16
4	Примена у задацима	19
4.1	БМО 2015	19
4.2	СМО 2024	21
4.3	ИМО 2019	23

Увод

Комплексни бројеви представљају један од најзначајнијих појмова модерне математике. Иако су настали приликом покушаја решавања алгебарских једначина, временом се испоставило да имају веома широку примену у различитим областима математике, физике и технике.

Посебно занимљива примена комплексних бројева јавља се у геометрији. Представљањем тачака равни комплексним бројевима многи геометријски проблеми могу се решавати алгебарским методама, често једноставније и елегантније него класичним геометријским поступцима.

У овом раду биће представљени основни појмови везани за комплексне бројеве, њихово геометријско тумачење, као и неке примене у решавању геометријских проблема.

1 Шта је комплексан број?

Дефиниција 1.1. Комплексни бројеви се могу дефинисати као уређени парови реалних бројева. Скуп $\mathbb{R}^2$ се опрема операцијама сабирања и множења дефинисаним са:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Из овакве конструкције природно се уводи јединица $i = (0, 1)$, при чему важи $i^2 = (-1, 0)$. Сваки уређени пар (a, b) може се записати у облику:

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) \equiv a + bi.$$

Тако добијамо стандардни алгебарски облик комплексног броја $z = a + bi$.

Скуп свих комплексних бројева означава се са $\mathbb{C}$. Структура $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ чини поље.

1.1 Реалан и имагинаран део комплексног броја, конјугат и модул

Дефиниција 1.2. За комплексни број $z = a + ib$ реални део је број a , а имагинарни део је број b .

Ознаке:

$$\operatorname{Re}(z) = a, \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

Дефиниција 1.3. Комплексно конјугован број броја $z = a + ib$ је број

$$\bar{z} = a - ib.$$

Дефиниција 1.4. Модул комплексног броја $z = a + ib$ је

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Тврђење 1.5. За свако $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ важе следећа својства:

$$\begin{aligned} 1) \quad z + \bar{z} &= 2\operatorname{Re}(z), & 2) \quad z - \bar{z} &= 2i\operatorname{Im}(z), & 3) \quad z\bar{z} &= |z|^2, \\ 4) \quad \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, & 5) \quad \overline{z_1 z_2} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2, & 6) \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0, \\ 7) \quad \overline{z^n} &= (\bar{z})^n, & 8) \quad |z_1 z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|, & 9) \quad |z^n| &= |z|^n. \end{aligned}$$

1.2 Тригонометријски облик комплексног броја

Дефиниција 1.6. Комплексни број $z \neq 0$ може се представити у поларном облику:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

где је $r = |z|$ модул комплексног броја, а $\theta = \arg z$ његов аргумент.

- $r = |z|$ је растојање тачке z од координатног почетка,
- $\theta = \arg z$ је оријентисани угао који вектор $\overrightarrow{Oz}$ заклапа са позитивним делом реалне осе, при чему је $\theta \in [0, 2\pi)$.

Последица 1.7. Ако је $z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, онда важи:

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta.$$

Теорема 1.8 (Ојлерова формула). За сваки реалан број θ важи:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Из Ојлерове формуле следи експоненцијални запис комплексног броја:

$$z = r e^{i\theta}.$$

Дефиниција 1.9. Израз $\cos \theta + i \sin \theta$ краће се записује као:

$$\operatorname{cis} \theta.$$

1.3 Геометријска интерпретација комплексног броја

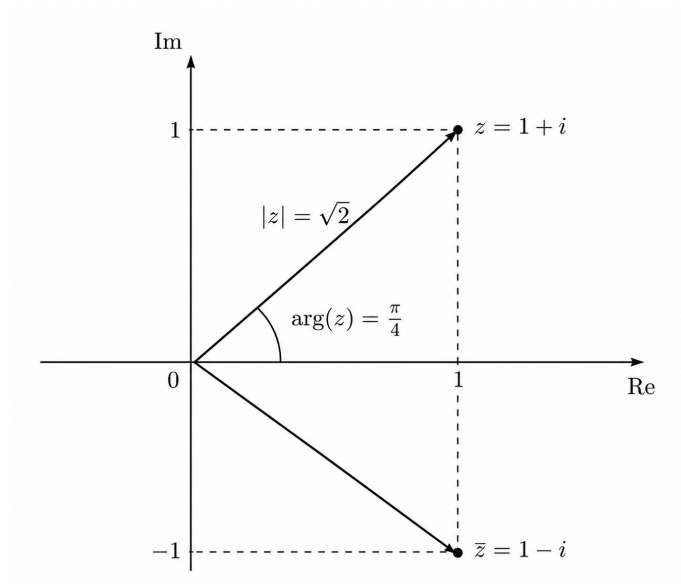
Комплексни бројеви се природно интерпретирају као тачке у равни, која се зато назива **комплексна равна**.

Хоризонтална оса је **реална оса**, а вертикална оса је **имагинарна оса**.

Сваки комплексан број $z = a + ib$ може се представити као тачка комплексне равни са координатама (a, b) . При томе реални део a одговара координати на реалној оси, док имагинарни део b одговара координати на имагинарној оси.

Модул комплексног броја z , $|z|$, представља растојање тачке (a, b) од координатног почетка.

Аргумент комплексног броја $\arg z$ је оријентисани угао између позитивног дела реалне осе и вектора $\vec{Oz}$, који се мери у смеру супротном од казаљке на сату.



Слика1: Приказ комплексног броја, модула, аргумента и конјугата у комплексној равни

1.4 Јединична кружница

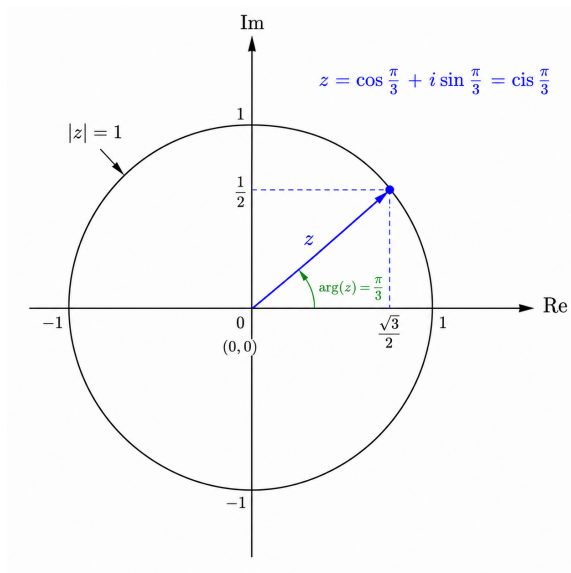
Посебно важну улогу у комплексној геометрији има јединична кружница, која се у комплексној равни дефинише условом:

$$|z| = 1.$$

Свака тачка на јединичној кружници може се записати у облику:

$$z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}.$$

За сваки z са јединичне кружнице важи $z\bar{z} = 1$, одакле следи $\bar{z} = \frac{1}{z}$



Слика2: Приказ јединичне кружнице са одговарајућим комплексним бројем

Ова особина има велики значај у комплексној геометрији, јер омогућава знатно једноставније извођење многих геометријских услова и формула.

Лема 1.10. Нека су a и b тачке на јединичној кружници у комплексној равни. Тада важи:

$$\frac{a-b}{\overline{a-b}} = -ab.$$

Доказ. Пошто су a и b тачке јединичне кружнице, важи $\bar{a} = \frac{1}{a}$ и $\bar{b} = \frac{1}{b}$. Зато је:

$$\frac{a-b}{\overline{a-b}} = \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}} = \frac{a-b}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \frac{a-b}{\frac{b-a}{ab}} = \frac{ab(a-b)}{b-a} = -ab.$$

□

2 Основни геометријски услови у комплексној равни

У комплексној геометрији многи класични геометријски односи могу се изразити на једноставан алгебарски начин преко комплексних бројева. Уместо коришћења углова и дужина, услови као што су колинеарност, паралелност или концикличност могу се записати помоћу односа комплексних афикса тачака. У овом поглављу наводе се најважнији критеријуми који ће се користити у даљим разматрањима и решавању задатака.

2.1 Колинеарност

Нека су тачке A, B, C у комплексној равни представљене комплексним бројевима a, b, c . Оне су колинеарне ако и само ако леже на истој правој, односно ако су вектори $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CB}$ паралелни.

То је еквивалентно услови да су њихови аргументи једнаки по модулу π :

$$\arg(b - a) \equiv \arg(c - b) \pmod{\pi}.$$

Одузимањем добијамо:

$$\arg(b - a) - \arg(c - b) \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Коришћењем особине аргумента количника следи:

$$\arg\left(\frac{b - a}{c - b}\right) \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Ово значи да је број

$$\frac{b - a}{c - b} \in \mathbb{R}.$$

Еквивалентно, важи:

$$\frac{b - a}{c - b} = \frac{\overline{b - a}}{\overline{c - b}}. \quad (2.1)$$

Лема 2.1. Нека су $a, b \in \mathbb{C}$ тачке јединичне кружнице, односно $|a| = |b| = 1$, и нека је $c \in \mathbb{C}$ тачка у равни. Тачка c припада правој одређеној тачкама a и b ако и само ако важи:

$$c + ab\bar{c} = a + b.$$

Доказ. У питању је специјалан случај услова колинеарности три комплексна броја.

Услов (2.1) модификујемо у еквивалентан облик:

$$\frac{c - b}{c - a} = \frac{b - a}{b - c} \xLeftrightarrow{\text{Лема 1.10}} \frac{c - b}{c - a} = -ab$$

Одатле следи:

$$c - b = -ab(\bar{c} - \bar{a}).$$

Распоредивањем добијамо:

$$c + ab\bar{c} = a + b.$$

□

2.2 Паралелност

Нека су тачке A, B, C, D у комплексној равни представљене комплексним бројевима a, b, c, d .

Дужи AB и CD су паралелне ако и само ако су њихови правци једнаки по модулу π , односно ако важи:

$$\arg(b - a) \equiv \arg(d - c) \pmod{\pi}.$$

Одустимањем добијамо:

$$\arg(b - a) - \arg(d - c) \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Коришћењем особине аргумента количника следи:

$$\arg\left(\frac{b - a}{d - c}\right) \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Ово значи да је број

$$\frac{b - a}{d - c} \in \mathbb{R}.$$

Еквивалентно, важи:

$$\frac{b - a}{d - c} = \overline{\frac{b - a}{d - c}}. \quad (2.2)$$

Лема 2.2. Нека су $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ тачке јединичне кружнице, односно $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$. Дужи AB и CD су паралелне ако и само ако важи:

$$ab = cd.$$

Доказ. У питању је специјалан случај услова паралелности.

Услов (2.2) модификујемо у еквивалентан облик:

$$\frac{b - a}{\overline{b - a}} = \frac{d - c}{\overline{d - c}} \xLeftrightarrow{\text{Лема 1.10}} -ba = -dc$$

Одатле следи:

$$ba = cd,$$

односно:

$$ab = cd.$$

□

2.3 Нормалност

Нека су тачке A, B, C, D у комплексној равни представљене комплексним бројевима a, b, c, d . Дужи AB и CD су нормалне ако и само ако је угао између њих једнак $\frac{\pi}{2}$, односно ако важи:

$$\arg(b - a) \equiv \arg(d - c) + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Одузимањем добијамо:

$$\arg\left(\frac{b - a}{d - c}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Ово значи да је број

$$\frac{b - a}{d - c} \in i\mathbb{R},$$

односно еквивалентно:

$$\frac{b - a}{d - c} = -\frac{\overline{b - a}}{d - c}. \quad (2.3)$$

Лема 2.3. Нека су $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ тачке јединичне кружнице, односно $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$. Дужи AB и CD су нормалне ако и само ако важи:

$$ab + cd = 0.$$

Доказ. У питању је специјалан случај услова нормалности.

Услов (2.3) модификујемо у еквивалентан облик:

$$\frac{b - a}{\overline{b - a}} = -\frac{d - c}{\overline{d - c}} \xLeftrightarrow{\text{Лема 1.10}} -ab = dc$$

Преуређивањем добијамо:

$$ab + cd = 0.$$

□

Лема 2.4 (Лема о подножју висине на тетиву јединичне кружнице).

Нека су A, B, C тачке јединичне кружнице представљене комплексним бројевима a, b, c , и нека је P подножје висине из тачке A на праву BC . Тада важи:

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c - \overline{a}bc).$$

Доказ. Пошто је $AP \perp BC$, на основу услова (2.3) важи:

$$\frac{p - a}{\overline{p - a}} = -\frac{b - c}{\overline{b - c}} \stackrel{\text{Лема 1.10}}{=} bc,$$

па следи:

$$p - a = bc(\overline{p} - \overline{a}) \implies p - bc\overline{p} = a - \overline{a}bc \quad (1)$$

Пошто су тачке P, B, C колинеарне, на основу Леме 2.1, важи:

$$p + bc\bar{p} = b + c \quad (2)$$

Сабирањем једначина (1) и (2) добијамо:

$$2p = a + b + c - bc\bar{a},$$

одакле следи:

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c - \bar{a}bc).$$

□

2.4 Концикличност

Нека су тачке A, B, C, D у комплексној равни представљене комплексним бројевима a, b, c, d .

Четири тачке су концикличне ако и само ако је периферијски угао над истом тетивом једнак, односно ако важи:

$$\angle DAC = \angle DBC.$$

У комплексном облику овај услов записује се као:

$$\arg\left(\frac{d-a}{c-a}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-b}{c-b}\right) \pmod{\pi}.$$

Одузимањем аргумената добијамо:

$$\arg\left(\frac{d-a}{c-a}\right) - \arg\left(\frac{d-b}{c-b}\right) \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

односно:

$$\arg\left(\frac{d-a}{c-a} : \frac{d-b}{c-b}\right) \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Пошто је аргумент једнак нули по модулу π , следи да је број реалан, па важи:

$$\frac{d-a}{c-a} : \frac{d-b}{c-b} \in \mathbb{R},$$

односно еквивалентно:

$$\frac{d-a}{c-a} : \frac{d-b}{c-b} = \overline{\frac{d-a}{c-a} : \frac{d-b}{c-b}} \quad (2.4)$$

2.5 Сличност троуглова

Нека су троуглови ABC и DEF представљени комплексним бројевима a, b, c и d, e, f .

Сличност троуглова у комплексној равни природно се разматра у два случаја у зависности од оријентације.

Случај 1 : иста оријентација

Троуглови ABC и DEF исте оријентације су слични ако и само ако важи:

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{e-d}{f-d}.$$

Заиста, сличност троуглова еквивалентна је условима:

$$\frac{|b-a|}{|c-a|} = \frac{|e-d|}{|f-d|} \quad \text{и} \quad \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \arg\left(\frac{e-d}{f-d}\right).$$

Леви услов представља једнакост односа одговарајућих страница, док десни услов обезбеђује једнакост одговарајућих углова.

Обједињавањем ова два услова добија се критеријум:

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{e-d}{f-d}. \quad (2.5)$$

Случај 2 : супротна оријентација

У случају да су троуглови ABC и DEF супротних оријентација, критеријум сличности се незнатно мења.

Троуглови ABC и DEF супротних оријентација су слични ако и само ако важи:

$$\frac{b-a}{c-a} = \overline{\frac{e-d}{f-d}}. \quad (2.6)$$

Заиста, ако тачке D, E, F пресликамо симетрично у односу на реалну осу, добијамо троугао чија су темена представљена бројевима $\bar{d}, \bar{e}, \bar{f}$.

Тако добијени троугао има исту величину и облик као троугао DEF , али супротну оријентацију, па се проблем своди на случај сличности троуглова исте оријентације.

3 Значајне тачке троугла у комплексној равни

Комплексни бројеви омогућавају елегантно представљање геометријских објеката и трансформација. Посебно су корисни у изучавању значајних тачака троугла, јер се многе класичне конструкције могу записати једноставним алгебарским формулама.

У овом поглављу посматраћемо троугао чија су темена представљена комплексним бројевима a, b, c . Разматраћемо два специјална случаја:

- када је описана кружница троугла јединична кружница,
- када је уписана кружница троугла јединична кружница.

3.1 Ортоцентар троугла

За одређивање положаја ортоцентра користи се следећа релација.

Теорема 3.1 (Хамилтонова теорема). *Нека је ABC троугао у равни и нека је H његов ортоцентар, а O центар описане кружнице око троугла $\triangle ABC$. Тада важи:*

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}.$$

Доказ. Нека је A_1 средиште дужи BC , а H ортоцентар троугла ABC . Пре свега, докажимо:

$$2\vec{OA_1} = \vec{AH}.$$

Како су $\vec{OA_1}$ и $\vec{AH}$ паралелни, постоји $\alpha \in \mathbb{R}$ тако да важи $\vec{OA_1} = \alpha \vec{AH}$.

Аналогно, ако је B_1 средиште дужи AC , постоји $\beta \in \mathbb{R}$ тако да $\vec{OB_1} = \beta \vec{BH}$.

Пошто је A_1B_1 средња линија троугла $\triangle ABC$, важи $\vec{B_1A_1} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

Како је $\vec{AB} = \vec{AH} + \vec{HB}$, па добијамо:

$$\vec{B_1A_1} = \frac{1}{2}\vec{AH} + \frac{1}{2}\vec{HB}.$$

Изједначавањем добијамо:

$$\frac{1}{2}\vec{AH} + \frac{1}{2}\vec{HB} = \beta \vec{HB} + \alpha \vec{AH},$$

односно:

$$\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\vec{AH} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\vec{HB} = \vec{0}.$$

Пошто су вектори $\vec{AH}$ и $\vec{HB}$ линеарно независни, следи $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Одатле добијамо:

$$\vec{AH} = 2\vec{OA_1}.$$

Пошто је A_1 средиште дужи BC , важи:

$$\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OA_1}.$$

Зато следи:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA} + 2\vec{OA_1} = \vec{OA} + \vec{AH} = \vec{OH}.$$

□

Из датог векторског идентитета, ако тачке A, B, C, O и H заменимо редом њиховим комплексним афиксима a, b, c, o и h , добијамо:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH} \implies (a - o) + (b - o) + (c - o) = h - o.$$

Сређивањем израза добија се:

$$h = a + b + c - 2o, \quad (3.1)$$

што представља општи израз за ортоцентар у комплексној равни.

Последица 3.2. Специјалан случај настаје када су темена троугла на јединичној кружници, односно када важи $|a| = |b| = |c| = 1$, при чему је $o = 0$. Тада важи:

$$h = a + b + c.$$

3.2 Тежиште троугла

За одређивање положаја тежишта користи се следећа релација.

Теорема 3.3. Нека је T тежиште троугла ABC . Тада важи:

$$T\vec{A} + T\vec{B} + T\vec{C} = \vec{0}.$$

Доказ. Нека је A_1 средиште странице BC . Користимо чињеницу да тежиште T дели тежишну дуж AA_1 у односу $AT : TA_1 = 2 : 1$.

Зато важи:

$$\vec{OT} = \frac{1}{3}\vec{OT} + \frac{1}{3}T\vec{A} + \frac{2}{3}\vec{OT} + \frac{2}{3}T\vec{A_1}.$$

Пошто је $\vec{OT} + T\vec{A} = \vec{OA}$ и $\vec{OT} + T\vec{A_1} = \vec{OA_1}$, следи:

$$\vec{OT} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OA_1}.$$

Пошто је A_1 средиште странице BC , добијамо $2\vec{OA_1} = \vec{OB} + \vec{OC}$, па следи:

$$\vec{OA_1} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}).$$

Уврштавањем у претходни израз добијамо:

$$\vec{OT} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}),$$

односно:

$$\vec{OT} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

Сада имамо:

$$\vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC} = (\vec{OA} - \vec{OT}) + (\vec{OB} - \vec{OT}) + (\vec{OC} - \vec{OT}),$$

односно:

$$\vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - 3\vec{OT}.$$

Како је

$$3\vec{OT} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC},$$

следи:

$$\vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC} = \vec{0}.$$

□

Ако тачке A , B , C и T заменимо њиховим комплексним афиксима a , b , c и t , добијамо:

$$(a - t) + (b - t) + (c - t) = 0.$$

Сређивањем израза следи:

$$a + b + c - 3t = 0,$$

односно

$$t = \frac{a + b + c}{3} \tag{3.2}$$

Ова формула важи у општем случају и не зависи од положаја троугла у комплексној равни.

3.3 Нормализација у случају описане јединичне кружнице

Мотивација за параметризацију

Центар уписане кружнице добијамо из чињенице да се налази у пресеку правих AA_1 , BB_1 и CC_1 , где су A_1 , B_1 и C_1 средишта одговарајућих лукова описане кружнице.

Прецизније, A_1 је средиште лука $\widehat{BC}$ који не садржи тачку A , а аналогно важи и за B_1 и C_1 .

Пошто су тачке A, B, C на јединичној кружници, постоје реални бројеви α, β, γ такви да:

$$a = e^{i\alpha}, \quad b = e^{i\beta}, \quad c = e^{i\gamma}.$$

Тада је:

$$a_1 = e^{i\frac{\beta+\gamma}{2}}, \quad b_1 = e^{i\frac{\gamma+\alpha}{2}}, \quad c_1 = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Међутим, $a_1^2 = e^{i(\beta+\gamma)} = bc$, па би формално важило:

$$a_1 = \sqrt{bc}, \quad b_1 = \sqrt{ca}, \quad c_1 = \sqrt{ab}.$$

Како рад са квадратним коренима комплексних бројева уноси непотребне техничке потешкоће, уводимо нову параметризацију:

$$a = u^2, \quad b = v^2, \quad c = w^2,$$

где су u, v, w тачке јединичне кружнице, па су самим тим и a, b, c тачке јединичне кружнице.

Тада добијамо:

$$a_1 = -vw, \quad b_1 = -wu, \quad c_1 = -uv.$$

На тај начин избегава се употреба квадратних коренова, а формуле постају симетричније и погодније за рачун.

Лема 3.4. Нека су A, B, C темена троугла на јединичној кружници, представљена комплексним бројевима a^2, b^2, c^2 , где је $|a| = |b| = |c| = 1$. Важи $a_1 = -bc, b_1 = -ca, c_1 = -ab$, као средишта лукова $\widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{AB}$, који не садрже тачке A, B, C .

Ако је i афикс центра уписане кружнице троугла $\triangle ABC$, онда важи:

$$i = -ab - bc - ca.$$

Доказ. Пошто центар уписане кружнице припада тетивама AA_1 и BB_1 јединичне кружнице, примењујемо Лему 2.1:

$$i - \bar{i} a^2 bc = a^2 - bc, \tag{1}$$

$$i - \bar{i} ab^2 c = b^2 - ac. \tag{2}$$

Множењем (1) са bc , а (2) са ac добијамо:

$$ibc - \bar{i} a^2 b^2 c^2 = a^2 bc - b^2 c^2, \tag{3}$$

$$iac - \bar{i}a^2b^2c^2 = ab^2c - a^2c^2. \quad (4)$$

Одузимањем (3) од (4) следи:

$$i(ac - bc) = ab^2c - a^2bc - a^2c^2 + b^2c^2$$

Скраћивањем добијамо:

$$i = -ab - bc - ca.$$

□

Лема 3.5. Нека су A, B, C темена троугла на јединичној кружности, представљена комплексним бројевима a^2, b^2, c^2 , где је $|a| = |b| = |c| = 1$. Важи $a_1 = -bc, b_1 = -ca, c_1 = -ab$, као средишта лукова $\widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{AB}$, који не садрже тачке A, B, C .

Ако су i_a, i_b, i_c афикси центра приписаних кружница троугла $\triangle ABC$ наспрам темена A, B, C редом, онда важи:

$$i_a = -bc + ca + ab \quad i_b = bc - ca + ab \quad i_c = bc + ca - ab.$$

Доказ. Без губитка општости изводимо формулу за i_a . Формуле за i_b и i_c добијају се аналогно, цикличном заменом $a \rightarrow b \rightarrow c$, због потпуне симетрије конструкције.

Формулу за i_a изводимо из чињенице да је $BI_A \perp BI$ и $CI_A \perp CI$, јер су симетрале унутрашњег и спољашњег угла троугла међусобно нормалне.

Применимо услов (2.3) на $BI_A \perp BI$:

$$\frac{i_a - b^2}{\overline{i_a - b^2}} = -\frac{b^2 - i}{\overline{b^2 - i}}.$$

Добијамо:

$$\frac{b^2 - i}{\overline{b^2 - i}} = \frac{b^2 + ab + bc + ca}{\overline{b^2 + ab + bc + ca}} = \frac{(b+a)(b+c)}{\overline{(b+a)(b+c)}} = ab^2c.$$

Одатле следи:

$$\frac{i_a - b^2}{\overline{i_a - b^2}} = -ab^2c.$$

Множењем унакрст:

$$i_a - b^2 = -ab^2c(\overline{i_a} - \overline{b^2}).$$

Пошто је b на јединичној кружности следи:

$$i_a + \overline{i_a}ab^2c = b^2 + ac \quad (1)$$

Аналогно се применом услова (2.3) на $CI_A \perp CI$ добија:

$$i_a + \overline{i_a}abc^2 = c^2 + ab \quad (2)$$

Множењем (1) са ac и (2) са ab добијамо:

$$i_a ac + \bar{i}_a a^2 b^2 c^2 = ab^2 c + a^2 c^2 \quad (3)$$

$$i_a ab + \bar{i}_a a^2 b^2 c^2 = abc^2 + a^2 b^2 \quad (4)$$

Одузимањем (3) од (4) следи:

$$i_a(ab - ac) = abc^2 - ab^2c + a^2b^2 - a^2c^2$$

Скраћивањем добијамо:

$$i_a = -bc + ca + ab$$

Цикличном заменом се добијају и изрази:

$$i_b = bc - ca + ab \quad i_c = bc + ca - ab$$

□

3.4 Нормализација у случају уписане јединичне кружнице

Изражавање темена троугла $\triangle ABC$

Знамо да је $i = 0$. Бирамо тачке D, E, F на страницама BC, CA, AB редом као пресеке уписане кружнице са одговарајућим страницама троугла. Према томе важи $d\bar{d} = e\bar{e} = f\bar{f} = 1$.

Тачка A се налази у пресеку тангенти повучених из тачака E и F на јединичну кружницу. Уводимо следећу лему.

Лема 3.6. *Нека је дата јединична кружница са центром у тачки $o = 0$, и нека су a, b тачке на јединичној кружници. Ако је c пресек тангенти повучених у тачкама a и b , онда важи:*

$$c = \frac{2ab}{a+b}.$$

Доказ. Пошто је тангента у тачки A нормална на полупречник OA , примењујемо услов (2.3):

$$\frac{c-a}{c-a} = -\frac{a}{\bar{a}} = -a^2.$$

Одатле следи:

$$c - a = -a^2(\bar{c} - \bar{a})$$

па је:

$$c + a^2\bar{c} = 2a \quad (1)$$

Аналогно, из тангенте у тачки B добијамо:

$$c + b^2\bar{c} = 2b. \quad (2)$$

Множењем (1) са b^2 и (2) са a^2 :

$$b^2c + a^2b^2\bar{c} = 2ab^2 \quad (3)$$

$$a^2c + a^2b^2\bar{c} = 2a^2b \quad (4)$$

Одузимањем (3) од (4) добијамо:

$$(a^2 - b^2)c = 2ab(a - b),$$

Скраћивањем добијамо:

$$c = \frac{2ab}{a + b}.$$

□

Примењујући лему 3.6 на наш случај добијамо:

$$a = \frac{2ef}{e + f}, \quad b = \frac{2fd}{f + d}, \quad c = \frac{2de}{d + e} \quad (3.1)$$

Лако је приметити да важи:

$$\bar{a} = \frac{2}{e + f}, \quad \bar{b} = \frac{2}{f + d}, \quad \bar{c} = \frac{2}{d + e} \quad (3.2)$$

Лема 3.7. *Постављамо координатни систем тако да је $i = 0$, а тачке додира уписане кружнице са страницама троугла леже на јединичној кружници, односно $|d| = |e| = |f| = 1$. За темена троугла $\triangle ABC$ по (3.1) важи $a = \frac{2ef}{e+f}$, $b = \frac{2fd}{f+d}$, $c = \frac{2de}{d+e}$.*

Ако су i_a, i_b, i_c афикси центра приписаних кружница троугла $\triangle ABC$ наспрам темена A, B, C редом, онда важи:

$$i_a = \frac{4def}{(d + e)(d + f)}, \quad i_b = \frac{4def}{(e + d)(e + f)}, \quad i_c = \frac{4def}{(f + d)(f + e)}.$$

Доказ. Без губитка општости изводимо формулу за i_a . Формуле за i_b и i_c добијају се аналогно, цикличном заменом $a \rightarrow b \rightarrow c$, због потпуне симетрије конструкције.

Формулу за i_a изводимо из чињенице да је $BI_A \perp BI$ и $CI_A \perp CI$, јер су симетрале унутрашњег и спољашњег угла троугла међусобно нормалне.

Применимо услов (2.3) на $BI_A \perp BI$:

$$\frac{i_a - b}{\bar{i}_a - \bar{b}} = -\frac{b}{\bar{b}} \stackrel{(3.2)}{=} -fd.$$

Из (3.1) и (3.2), следи:

$$i_a - \frac{2fd}{f + d} = -fd \left(\bar{i}_a - \frac{2}{f + d} \right).$$

па је:

$$i_a + fd\overline{i_a} = \frac{4fd}{f+d} \quad (1)$$

Аналогно, се применом услова (2.3) на $CI_A \perp CI$ добија:

$$i_a + de\overline{i_a} = \frac{4de}{d+e} \quad (2)$$

Множењем (1) са e и (2) са f добијамо:

$$i_a e + def\overline{i_a} = \frac{4def}{f+d} \quad (3)$$

$$i_a f + def\overline{i_a} = \frac{4def}{d+e} \quad (4)$$

Одузимањем (3) од (4) следи:

$$i_a(f-e) = 4def \frac{(d+f)-(d+e)}{(d+f)(d+e)}$$

Скраћивањем добијамо:

$$i_a = \frac{4def}{(d+e)(d+f)}$$

Цикличном заменом се добијају и изрази:

$$i_b = \frac{4def}{(e+f)(e+d)} \quad i_c = \frac{4def}{(f+d)(f+e)}$$

□

4 Примена у задацима

У овом поглављу биће приказана примена претходно уведених резултата и метода на конкретним геометријским задацима олимпијског типа. Кроз одабране примере видеће се како комплексни бројеви омогућавају елегантније постављање и једноставније решавање сложених геометријских проблема.

4.1 БМО 2015

Дат је неједнакокраки троугао $\triangle ABC$ са описаном кружницом w и центром уписане кружнице I . Праве AI, BI, CI секу кружницу w редом у тачкама D, E, F , различитим од A, B, C . Праве кроз тачку I паралелне правим BC, CA, AB редом секу праве EF, FD, DE у тачкама K, L, M . Доказати да су тачке K, L, M колинеарне.

Решење

Уводимо комплексну равну у којој је јединична кружница описана кружница троугла $\triangle ABC$. За темена троугла важи $a^2\bar{a}^2 = b^2\bar{b}^2 = c^2\bar{c}^2 = 1$, док центру описане кружнице одговара број $o = 0$. Из леме 3.4 закључујемо да тачки I одговара комплексан број

$$i = -bc - ca - ab \quad (1)$$

Праве AI, BI, CI по други пут секу описану кружницу троугла $\triangle ABC$ у средишту лукова $\widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{AB}$, који не садрже тачку A, B, C . Према томе:

$$d = -bc \quad e = -ac \quad f = -ab \quad (2)$$

Без губитка општости, изводимо формулу за k . Формуле за l и m се добијају аналогно, цикличним заменама.

Паралелност KI и BC

Из услова (2.2) и леме 1.10 добијамо:

$$\frac{k-i}{k-\bar{i}} = \frac{b^2-c^2}{b^2-\bar{c}^2} = -b^2c^2$$

па је:

$$k + \bar{k}b^2c^2 = i + \bar{i}b^2c^2 \quad (3)$$

Колинеарност K, E, F

Из леме 2.1 добијамо:

$$k + \bar{k}ef = e + f$$

па је применом (2) добијено:

$$k + \bar{k}a^2bc = -ab - ac \quad (4)$$

Множењем једначине (3) са a^2 и применом формуле (1) добијамо једнакост:

$$ka^2 + \bar{k}a^2b^2c^2 = -a^3b - a^2bc - a^3c - abc^2 - a^2bc - ab^2c \quad (5)$$

Множењем једначине (4) са bc добијамо једнакост:

$$kbc + \bar{k}a^2b^2c^2 = -ab^2c - abc^2 \quad (6)$$

Одузимањем (6) од (5) добијамо:

$$k(a^2 - bc) = -a^3b - a^2bc - a^3c - a^2bc = -a^2(ab + bc + ac + bc)$$

Коначно, добијамо крајњу формулу за k , али и за l, m , настале цикличним заменама.

$$k = -\frac{a^2(ab + ac + 2bc)}{a^2 - bc} \quad l = -\frac{b^2(ab + bc + 2ac)}{b^2 - ac} \quad m = -\frac{c^2(ac + bc + 2ab)}{c^2 - ab} \quad (7)$$

Задатак се своди на доказивање следећег тврђења:

$$\frac{k-l}{\overline{k-l}} \stackrel{?}{=} \frac{k-m}{\overline{k-m}} \quad (8)$$

Како су формуле k, l, m настале цикличним заменама a, b, c , потребно је показати да је разломак $\frac{k-l}{\overline{k-l}}$ симетричан по променљивама a, b, c , да би важила релација (8).

Након дужег рачуна, добијамо $k-l$:

$$k-l = \frac{b^2(ab + bc + 2ac)}{b^2 - ac} - \frac{a^2(ab + ac + 2bc)}{a^2 - bc} = \frac{(a-b)(a+b)^2c(ab + ac + bc)}{(a^2 - bc)(b^2 - ac)} \quad (9)$$

Његов конјугат:

$$\overline{k-l} = -\frac{(a-b)(a+b)^2(a+b+c)}{ab(a^2 - bc)(b^2 - ac)} \quad (10)$$

Користећи изразе (9) и (10) добијамо:

$$\frac{k-l}{\overline{k-l}} = -\frac{abc}{(a+b+c)(ab + bc + ca)}$$

Како је крајњи израз $\frac{k-l}{\overline{k-l}}$ симетричан по променљивама a, b и c , можемо закључити да ће једнакост (8) важити, па је тврђење задатка доказано.

4.2 СМО 2024

Нека су тачке I, I_a редом, центри уписане кружнице и споља приписане кружнице наспрам темена A неједнакокраког троугла $\triangle ABC$. Уписана кружница тог троугла додирује странице BC, CA, AB , редом, у тачкама D, E, F . Праве EF и BC се секу у тачки P , а тачка X је средиште дужи PD . Доказати да је $XI \perp I_aD$.

Решење

Уводимо комплексну раван у којој је јединична кружница уписана кружница троугла $\triangle ABC$. За тачке додира уписане кружнице и страница троугла важи $d\bar{d} = e\bar{e} = f\bar{f} = 1$, док центру уписане кружнице I одговара број $i = 0$. Из (3.1) закључујемо:

$$a = \frac{2ef}{e+f} \quad b = \frac{2fd}{f+d} \quad c = \frac{2de}{d+e} \quad (1)$$

Из леме 3.7 закључујемо да тачки I_a одговара комплексан број:

$$i_a = \frac{4def}{(d+e)(d+f)} \quad (2)$$

Колинеарност P, E, F

Из леме 2.1 добијамо:

$$p + \bar{p}ef = e + f \quad (3)$$

Колинеарност P, B, C

Како је P колинеарно са B, C , а $DI \perp BC$, наш услов се своди на чињеницу да је $PD \perp DI$. Записујемо:

$$\frac{p-d}{\overline{p-d}} = -\frac{d}{\bar{d}} = -d^2 \quad (4)$$

па се сређивањем израза (4) добија:

$$p + \bar{p}d^2 = 2d \quad (5)$$

Множењем израза (3) са d^2 и израза (5) са ef добијамо:

$$pd^2 + \bar{p}d^2ef = d^2e + d^2f \quad (6)$$

$$pef + \bar{p}d^2ef = 2def \quad (7)$$

Одузимањем (7) од (6) добијамо:

$$p = \frac{d(de + df - 2ef)}{d^2 - ef} \quad (8)$$

Формулу за x налазимо на основу чињенице да је X средиште PD :

$$x = \frac{p + d}{2} = \frac{d \frac{de + df - 2ef + d^2 - ef}{d^2 - ef}}{2} = \frac{d(d^2 + de + df - 3ef)}{2(d^2 - ef)} \quad (9)$$

За крај, потребно је применити услов (2.3):

$$\frac{x - i}{i_a - d} \stackrel{?}{=} -\overline{\frac{x - i}{i_a - d}} \quad (10)$$

Добијамо:

$$i_a - d = d \frac{4ef - d^2 - de - df - ef}{(d + e)(d + f)} = d \frac{3ef - d^2 - de - df}{(d + e)(d + f)} \quad (11)$$

Рачунамо израз:

$$A = \frac{x - i}{i_a - d} = \frac{x}{i_a - d} = -\frac{(d + e)(d + f)}{2(d^2 - ef)} \quad (12)$$

И његов конјугат:

$$\overline{A} = \frac{(d + e)(d + f)}{2(d^2 - ef)} \quad (13)$$

Из релација (12) и (13) закључујемо:

$$A = -\overline{A}$$

што се управо своди на релацију (10). Како је доказана једнакост (10), следи тврђење задатка.

4.3 ИМО 2019

Нека је I центар уписане кружности w оштроуглог троугла $\triangle ABC$, у коме је $AB \neq AC$. Кружница w додирује странице BC, CA, AB у тачкама D, E, F редом. Права која садржи D и нормална је на EF поново сече кружницу w у тачки R . Права AR поново сече кружницу w у тачки P . Кружнице описане око троуглова $\triangle PCE$ и $\triangle PBF$ поново се секу у тачки Q . Доказати да се праве DI и PQ секу на правој која садржи тачку A и нормална је на AI .

Решење

Уводимо комплексну раван у којој је јединична круница уписана кружница троугла $\triangle ABC$. За тачке додира кружнице и странице троугла важи $d\bar{d} = e\bar{e} = f\bar{f} = 1$, док центру уписане кружнице I одговара број $i = 0$. Из (3.1) закључујемо:

$$a = \frac{2ef}{e+f} \quad b = \frac{2fd}{f+d} \quad c = \frac{2de}{d+e} \quad (1)$$

Применимо лему 2.3 на RD и EF :

$$dr = -ef \implies r = -\frac{ef}{d} \quad (2)$$

Применимо лему 2.1 на колинеарност тачака A, R, P :

$$a + rp\bar{a} = r + p \quad (3)$$

Заменимо (2) у једначину (3) и добијамо израз:

$$p\left(1 + \frac{2ef}{d(e+f)}\right) = \frac{2ef}{e+f} + \frac{ef}{d} = \frac{ef(2d+e+f)}{d(e+f)}$$

чијим даљим сређивањем добијамо формулу за p :

$$p = \frac{ef(2d+e+f)}{de+df+2ef} \quad (4)$$

У наставку, задатак ћемо преформулисати на следећи начин: уколико је S тачка пресека правих DI и праве кроз A нормалне на AI , доказати да су тачке S, P, Q колинеарне.

Колинеарност S, D, I

На основу услова (2.1) добијамо релацију:

$$\frac{s-i}{s-\bar{i}} = \frac{s}{\bar{s}} = \frac{d-i}{d-\bar{i}} = \frac{d}{\bar{d}} = d^2 \quad (5)$$

чијим сређивањем се добија:

$$s - \bar{s}d^2 = 0 \quad (6)$$

Нормалност SA и AI

На основу услова (2.3) добијамо релацију:

$$\frac{s-a}{s-a} = -\frac{a}{a} \stackrel{(3.2)}{=} -ef \quad (7)$$

Заменом (1) у (7) добијамо израз:

$$s + \bar{s}ef = \frac{4ef}{e+f} \quad (8)$$

Множењем (6) са ef и (7) са d^2 , добијамо:

$$sef - \bar{s}d^2ef = 0 \quad (9)$$

$$sd^2 + \bar{s}d^2ef = \frac{4d^2ef}{e+f} \quad (10)$$

Одузимањем (9) од (10) добијамо израз за s :

$$s = \frac{4d^2ef}{(e+f)(d^2+ef)} \quad (11)$$

Означимо са o_1, o_2 средишта описаних кружница око троуглова $\triangle BPF, \triangle CPE$, редом.

Нормалност O_1I и FP

Приметимо да како је тачка O_1 центар описане кружнице око троугла $\triangle BPF$, то је подножје нормалне из O_1 на PF управо средиште те дужи. Аналогно, како је PF тетива јединичне кружнице, то је подножје нормале из I на PF управо средиште те дужи.

Одатле добијамо $O_1I \perp FP$. Примењујемо услов (2.3):

$$\frac{o_1 - i}{o_1 - i} = \frac{o_1}{o_1} = -\frac{f-p}{f-p} \stackrel{\text{(Лема 1.10)}}{=} fp$$

одакле добијамо

$$\overline{o_1} = \frac{o_1}{fp} \quad (12)$$

Уведимо тачку P_1 као средиште дужи BF .

Паралелност O_1B_1 и FI

Приметимо да како је тачка O_1 центар описане кружнице око троугла $\triangle BPF$ а P_1 средиште дужи BF , то је $O_1P_1 \perp BF$. Аналогно, $FI \perp AB$, а како је тачка F на дужи AB , то је и $FI \perp BF$. Одатле је очигледно да су O_1B_1 и FI паралелне.

$$\frac{o_1 - p_1}{o_1 - p_1} = \frac{f - i}{f - i} = \frac{f}{f} = f^2$$

Сређивањем добијамо релацију:

$$\overline{o_1} = \overline{p_1} + \frac{o_1 - p_1}{f^2} \quad (13)$$

Изједначавањем (12) и (13) добијамо

$$\frac{o_1}{fp} = \overline{p_1} + \frac{o_1 - p_1}{f^2} \implies o_1 f = f^2 p \overline{p_1} + o_1 p - p_1 p$$

Сређивањем, добијамо:

$$o_1 = \frac{p(f^2 \overline{p_1} - p_1)}{f - p} \quad (14)$$

Како је P_1 средиште BF , замењујемо $p_1 = \frac{b+f}{2}$ у (14).

Посматрамо пре свега следећи израз:

$$f^2 \overline{p_1} - p_1 = \frac{1}{2}(f^2 \overline{b} - b) = \frac{f(f-d)}{d+f} \quad (15)$$

Заменом (14) у (15) добијамо:

$$o_1 = \frac{pf(f-d)}{(f+d)(f-p)} \quad (16)$$

Користећи се релацијом (4), након дужег рачуна добијамо израз за $f - p$:

$$f - p = f - \frac{ef(2d + e + f)}{2ef + de + df} = -f \frac{(e-d)(e-f)}{2ef + de + df} \quad (17)$$

Заменом израза (4) и (17) у (16), коначно добијамо израз за o_1 :

$$o_1 = -\frac{ef(e+f+2d)(f-d)}{(e+d)(f+d)(e-f)} = \frac{ef(e+f+2d)(f-d)}{(e+d)(f+d)(f-e)} \quad (18)$$

Приметимо да су формуле за темена троуглова $\triangle PBF, \triangle PCF$ добијене заменама $e \rightarrow f$ и $f \rightarrow e$. Према томе, на исти начин можемо добити и формулу за o_2 из (18):

$$o_2 = \frac{ef(e+f+2d)(e-d)}{(e+d)(f+d)(e-f)} \quad (19)$$

Приметимо како се кружнице описане око троуглова $\triangle PBF, \triangle PCF$ секу у тачкама P, Q , то је PQ заједничка тетива 2 кружнице. Из тога је лако закључити да је $O_1 O_2 \perp PQ$.

Вратимо се на циљ задатка. Потребно је доказати да су тачке S, P, Q колинеарне. Да би избегли рачунање формуле q везану за тачку Q , приметимо да је довољно показати да је $SP \perp O_1O_2$. Другим речима, потребно је доказати:

$$\frac{o_1 - o_2}{s - p} = -\frac{\overline{o_1 - o_2}}{s - p} \quad (20)$$

Рачунамо $o_1 - o_2$, користећи се изразима (18) и (19):

$$o_1 - o_2 = \frac{ef(2d + e + f)(e + f - 2d)}{(e + d)(f + d)(e - f)} \quad (21)$$

Након дужег рачуна, добијамо $s - p$:

$$s - p = \frac{4d^2ef}{(e + f)(d^2 + ef)} - \frac{ef(2d + e + f)}{de + df + 2ef} = -\frac{ef(e + f - 2d)(e^2f + ef^2 + d^2e + d^2f + 4def)}{(e + f)(d^2 + ef)(de + df + 2ef)} \quad (22)$$

Користимо релације (21) и (22):

$$\frac{o_1 - o_2}{s - p} = \frac{(2d + e + f)(e + f)(d^2 + ef)(de + df + 2ef)}{(d + e)(d + f)(e - f)(e^2f + ef^2 + d^2e + d^2f + 4def)} \quad (23)$$

Конјугат израза (23) је:

$$\frac{\overline{o_1 - o_2}}{s - p} = \frac{(de + df + 2ef)(e + f)(d^2 + ef)(2d + e + f)}{(d + e)(d + f)(f - e)(d^2f + d^2e + ef^2 + e^2f + 4def)} \quad (24)$$

Из (23) и (24):

$$\frac{o_1 - o_2}{s - p} : \frac{\overline{o_1 - o_2}}{s - p} = \frac{f - e}{e - f} = -1 \quad (25)$$

Релација (25) је, према томе, еквивалентна релацији (20). Како је релација (20) доказана, то следи тврђење задатка.

Закључак

У овом раду представљена је примена комплексних бројева у геометрији и начин на који се класични геометријски проблеми могу решавати алгебарским методама. У првом делу рада уведени су основни појмови везани за комплексне бројеве, њихов геометријски смисао и приказ у комплексној равни. Након тога изведени су основни геометријски услови, као што су колинеарност, паралелност, нормалност и концикличност, који представљају основу за примену комплексне геометрије.

У наставку рада приказане су формуле за одређивање значајних тачака троугла у комплексној равни, као и две важне нормализације — случај када је описана кружница јединична кружница и случај када је уписана кружница јединична кружница. Таква поставка омогућава једноставније и симетричније записивање геометријских односа и значајно олакшава рачунање.

Кроз решења олимпијских задатака показано је како метода комплексних бројева омогућава елегантније и систематичније доказе. Иако су рачуни понекад обимни, комплексна геометрија често омогућава да се суштина проблема лакше уочи него класичним синтетичким методама.

Примена комплексних бројева у геометрији представља леп пример повезаности различитих области математике и показује како се алгебарске методе могу успешно користити у решавању геометријских проблема. Управо та повезаност различитих математичких идеја чини комплексну геометрију веома занимљивом и значајном облашћу математике.

Овом приликом желим да се захвалим свом ментору, Бобану Маринковићу, на помоћи, саветима и стрпљењу током израде овог рада, професору Теодору фон Бургу, на чијим сам се часовима први пут сусрела са овом проблематиком, као и својој разредној, Милици Мисојчић Огњановић, на помоћи и подршци током целокупног школовања. Такође се захваљујем свим професорима Математичке гимназије који су у последњих шест година допринели мом интересовању за математику и помогли ми да стекнем знање које је било неопходно за писање овог рада.

Литература

- [1] Evan Chen, *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, 2016
- [2] Зоран Каделбург, Владимир Мићић, Срђан Огњановић, Соња Чукић, *Анализа са алгебром 2*, Круг, 2023.
- [3] Зоран Каделбург, Владимир Мићић, Срђан Огњановић, Соња Чукић, *Анализа са алгебром 3*, Круг, 2021.
- [4] Милан Митровић, Срђан Огњановић, Михаило Вељковић, Љубинка Петровић, Ненад Лазаревић, *Геометрија за први разред Математичке гимназије*, Круг, Београд, 2013.
- [5] Душан Ђукић, Марко Радановић, *Математичке олимпијаде средњошколаца од 2012. до 2019. године*, ДМС, 2020.
- [6] Српска математичка олимпијада 2024:
https://dms.rs/wp-content/uploads/2024/04/SMO_2024_ZADACI.pdf