

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД
ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Хипотеза континуума и еквиваленти

Ученик

Урош ВУКИЋЕВИЋ, IVд

Ментор

др Славко МОЦОЊА

Београд, 28.5.2026.

Садржај

1	Уводни појмови	1
1.1	Ординали	1
1.2	Кардинали	6
1.3	Игра која показује непребројивост континуума	9
1.4	Континуум хипотеза	12
2	Еквиваленти континуум хипотезе	13
2.1	Проблем три затвореника	13
2.2	Монохроматски правоугаоници и троуглови у обојеној равни . .	21
2.3	Облаци у равни	29
	Литература	38

1

Уводни појмови

1.1 Ординали

Ординали служе за описивање типова добро уређених скупова. За разлику од кардинала, који мере само величину скупа, ординали памте и редослед елемената. Зато ординали разликују, на пример, поредак

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

од поретка

$$0, 1, 2, 3, \dots, \omega,$$

иако оба поретка имају пребројиво много елемената.

Дефиниција 1.1. Нека је S скуп. Релација $<$ на скупу S назива се *строго линеарно уређење* ако за све $x, y, z \in S$ важи:

1. није $x < x$;
2. ако је $x < y$ и $y < z$, онда је $x < z$;
3. за свака два различита елемента $x, y \in S$ важи тачно једно од $x < y$ или $y < x$.

Дефиниција 1.2. Нека је $(S, <)$ линеарно уређен скуп. Елемент $a_0 \in A$, где је $A \subseteq S$ и $A \neq \emptyset$, назива се *најмањи елемент* скупа A ако за сваки $a \in A$, $a \neq a_0$, важи

$$a_0 < a.$$

Дефиниција 1.3. Линеарно уређен скуп $(S, <)$ назива се *добро уређен* ако сваки непразан подскуп $A \subseteq S$ има најмањи елемент.

Пример 1. Скуп $\mathbb{N}$, са уобичајеним уређењем, јесте добро уређен, јер сваки непразан подскуп природних бројева има најмањи елемент. Са друге стране, скуп $\mathbb{Z}$, са уобичајеним уређењем, није добро уређен, јер сам скуп $\mathbb{Z}$ нема најмањи елемент.

Дефиниција 1.4. Нека је $(S, <)$ линеарно уређен скуп. Подскуп $I \subseteq S$ назива се *почетни део* скупа S ако за све $x, y \in S$ важи:

$$y \in I \wedge x < y \implies x \in I.$$

Другим речима, ако се неки елемент налази у почетном делу, онда се у њему налазе и сви елементи који му претходе.

Дефиниција 1.5. Ако је $(S, <)$ линеарно уређен скуп и $a \in S$, онда скуп

$$S_{<a} = \{x \in S : x < a\}$$

називамо *почетним делом одређеним елементом a* .

Пример 2. У скупу $\mathbb{N}$ почетни део одређен бројем 5 јесте скуп

$$\mathbb{N}_{<5} = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Дефиниција 1.6. Скуп X назива се *транзитиван* ако за свако $x \in X$ важи

$$x \subseteq X.$$

Еквивалентно, ако је $y \in x$ и $x \in X$, онда је $y \in X$.

Дефиниција 1.7. Скуп α назива се *ординал* ако важе следећа два услова:

1. α је транзитиван скуп;
2. релација припадања $\in$ добро уређује скуп α .

Ако су α и β ординали, пишемо

$$\alpha < \beta$$

ако и само ако је

$$\alpha \in \beta.$$

Дакле, код ординала је релација поретка дефинисана релацијом припадања.

Пример 3. Први ординали су

$$\begin{aligned}0 &= \emptyset, \\1 &= \{0\}, \\2 &= \{0, 1\}, \\3 &= \{0, 1, 2\}.\end{aligned}$$

Уопште, природан број n поистовећујемо са ординалом

$$n = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Ова дефиниција показује важну особину ординала: сваки ординал је скуп свих ординала који му претходе. На пример,

$$3 = \{0, 1, 2\}.$$

Дакле, елементи ординала 3 су управо ординали мањи од 3.

Тврдња 1.1. Нека су α и β ординали. Тада важе следећа тврђења:

1. $0 = \emptyset$ је ординал;
2. ако је $\alpha \neq 0$, онда је $0 \in \alpha$;
3. $\alpha \notin \alpha$;
4. ако је $x \in \alpha$, онда је x почетни део ординала α , тј.

$$x = \{\xi \in \alpha : \xi < x\};$$

5. ако је $x \in \alpha$, онда је x ординал;
6. важи

$$\beta \subseteq \alpha \iff \beta \in \alpha \text{ или } \beta = \alpha;$$

7. скуп

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$$

јесте ординал.

Доказ. Тврђење (1) је непосредно из дефиниције, јер је $\emptyset$ транзитиван скуп и релација $\in$ добро уређује празан скуп. Докажимо (2). Пошто је $\alpha \neq \emptyset$, у добро уређеном скупу $(\alpha, \in)$ постоји најмањи елемент. Означимо га са x . Ако би постојао $y \in x$, онда би из транзитивности ординала α следило $y \in \alpha$, а пошто је $y \in x$, добили бисмо $y < x$, што је у супротности са минималношћу елемента x . Дакле x нема елемената, па је $x = \emptyset$. Како је $x \in \alpha$, добијамо

$\emptyset \in \alpha$. Докажимо (3). Када би важило $\alpha \in \alpha$, тада би α био елемент добро уређеног скупа α , па би из антирефлексивности релације поретка следило да не може важити $\alpha \in \alpha$. То је контрадикција, па је $\alpha \notin \alpha$. Тврђење (4) следи из чињенице да је поредак на ординалу α дат управо релацијом припадања. Заиста, ако је $x \in \alpha$, онда су елементи скупа x тачно они елементи ординала α који претходе елементу x , па је

$$x = \{\xi \in \alpha : \xi < x\}.$$

Докажимо (5). Нека је $x \in \alpha$. Пошто је α транзитиван, из $x \in \alpha$ следи $x \subseteq \alpha$. Зато се добро уређење релацијом $\in$ на α преноси на x . Остаје да проверимо да је x транзитиван. Нека је $z \in y$ и $y \in x$. Тада су z, y, x елементи ординала α , а из $z \in y$ и $y \in x$, односно из $z < y < x$, следи $z < x$. Дакле $z \in x$. Тиме је x транзитиван, па је x ординал. Докажимо сада (6). Ако је $\beta \in \alpha$, онда је $\beta \subseteq \alpha$ због транзитивности ординала α . Ако је $\beta = \alpha$, онда је наравно $\beta \subseteq \alpha$. Обрнуто, претпоставимо да је $\beta \subseteq \alpha$. Ако је $\beta = \alpha$, нема шта да се доказује. Зато претпоставимо да је $\beta \subsetneq \alpha$. Тада је скуп $\alpha \setminus \beta$ непразан, па има најмањи елемент у добро уређењу ординала α . Означимо тај елемент са x . Због минималности елемента x , сви елементи ординала α који су мањи од x припадају скупу β , па важи

$$\{\xi \in \alpha : \xi < x\} \subseteq \beta.$$

Са друге стране, ако је $y \in \beta$, онда је $y \in \alpha$. Не може бити $y = x$, јер $x \notin \beta$. Такође не може бити $x \in y$, јер би из $y \in \beta$ и транзитивности ординала β следило $x \in \beta$, што је немогуће. Зато мора важити $y \in x$, тј. $y < x$. Дакле

$$\beta \subseteq \{\xi \in \alpha : \xi < x\}.$$

Према томе,

$$\beta = \{\xi \in \alpha : \xi < x\}.$$

По тврђењу (4), десна страна једнака је x , па је $\beta = x$. Како је $x \in \alpha$, добијамо $\beta \in \alpha$. На крају, докажимо (7). Скуп $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ је транзитиван: ако је $y \in x \in \alpha + 1$, онда је или $x \in \alpha$, па $y \in \alpha$ због транзитивности α , или је $x = \alpha$, па опет $y \in \alpha$. У оба случаја је $y \in \alpha + 1$. Релација $\in$ добро уређује $\alpha + 1$, јер сваки непразан подскуп који сече α има најмањи елемент у α , док је у супротном једини могући елемент тог подскупа управо α . Дакле $\alpha + 1$ је ординал. $\square$

Дефиниција 1.8. Ако је α ординал, ординал

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$$

назива се *следбеник* ординала α . Ординал који је облика $\alpha + 1$ за неки ординал α назива се *следбени ординал*.

Дефиниција 1.9. Ординал λ назива се *гранични ординал* ако је $\lambda \neq 0$ и ако не постоји ординал α такав да је

$$\lambda = \alpha + 1.$$

Другим речима, гранични ординал нема непосредног претходника.

Дефиниција 1.10. Ординал ω је најмањи бесконачни ординал. Он се може записати као

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

У теорији скупова скуп природних бројева поистовећујемо са ординалом ω .

Пример 4. Ординал $\omega + 1$ је следбеник ординала ω :

$$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}.$$

Његов редослед изгледа овако:

$$0, 1, 2, 3, \dots, \omega.$$

Дакле, $\omega + 1$ има један додатни елемент после свих природних бројева. Зато

$$\omega \neq \omega + 1.$$

Дефиниција 1.11. Нека су $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$ добро уређени скупови. Бијекција $f : A \rightarrow B$ назива се *изоморфизам уређених скупова* ако за све $x, y \in A$ важи

$$x <_A y \iff f(x) <_B f(y).$$

Ако таква бијекција постоји, кажемо да су $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$ изоморфни као уређени скупови.

Теорема 1.1. Сваки добро уређен скуп изоморфан је тачно једном ординалу.

Доказ. Ову чињеницу не доказујемо детаљно. Она представља основну везу између ординала и добро уређених скупова: сваки могући тип добро уређеног поретка може се представити једним и само једним ординалом. $\square$

1.2 Кардинали

Кардинали мере величину скупова. За разлику од ординала, кардинали не памте редослед елемената, него само питање да ли се елементи два скупа могу упарити бијекцијом.

Дефиниција 1.12. За скупове A и B кажемо да имају исту кардиналност, и пишемо

$$|A| = |B|,$$

ако постоји бијекција

$$f : A \longrightarrow B.$$

Дефиниција 1.13. За скупове A и B пишемо

$$|A| \leq |B|$$

ако постоји инјекција

$$f : A \longrightarrow B.$$

Пишемо

$$|A| < |B|$$

ако важи $|A| \leq |B|$, али не важи $|A| = |B|$.

Дефиниција 1.14. Скуп A назива се *уребројив* ако је коначан или ако важи

$$|A| = |\mathbb{N}|.$$

Кардиналност скупа природних бројева означава се са

$$\aleph_0.$$

Дакле,

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

Кардинали се у теорији скупова могу представити помоћу ординала. Идеја је да за сваку могућу величину узмемо најмањи ординал те величине.

Дефиниција 1.15. Ординал κ назива се *почетни ординал* ако не постоји ординал $\alpha < \kappa$ такав да

$$|\alpha| = |\kappa|.$$

Почетни ординали називају се *кардиналима*.

Дефиниција 1.16. Први бесконачни кардинал је

$$\aleph_0 = |\omega|.$$

Ординал ω је почетни ординал кардиналности $\aleph_0$.

Дефиниција 1.17. Ординал ω_1 дефинише се као скуп свих пребројивих ординала:

$$\omega_1 = \{\alpha : \alpha \text{ је ординал и } |\alpha| \leq \aleph_0\}.$$

Тај ординал назива се *први непребројив ординал*.

Другим речима, ω_1 садржи све ординале који су још увек пребројиви. Зато важи:

$$\alpha < \omega_1 \iff \alpha \text{ је пребројив ординал.}$$

Лема 1.1. Ординал ω_1 је најмањи непребројив ординал.

Доказ. По дефиницији, елементи скупа ω_1 су сви пребројиви ординали. Зато је сваки ординал $\alpha < \omega_1$ пребројив. Са друге стране, сам ω_1 не може бити пребројив. Када би ω_1 био пребројив ординал, онда би, по дефиницији скупа ω_1 , важило

$$\omega_1 \in \omega_1,$$

што је немогуће за ординал. Дакле, ω_1 није пребројив. Пошто су сви ординали мањи од њега пребројиви, ω_1 је први непребројив ординал. $\square$

Дефиниција 1.18. Кардиналност ординала ω_1 означава се са

$$\aleph_1.$$

Дакле,

$$|\omega_1| = \aleph_1.$$

Кардинал $\aleph_1$ је први кардинал строго већи од $\aleph_0$.

Дефиниција 1.19. Слично, ординал ω_2 је први ординал чија је кардиналност већа од $\aleph_1$. Његова кардиналност означава се са

$$\aleph_2.$$

Дакле,

$$|\omega_2| = \aleph_2.$$

Општије, ω_α означава почетни ординал кардиналности $\aleph_\alpha$, односно

$$|\omega_\alpha| = \aleph_\alpha.$$

За овај рад ће нам најважнији бити ординал ω_1 . Његова кључна особина је да су сви његови прави почетни сегменти пребројиви.

Лема 1.2. Ако је $\beta < \omega_1$, онда је скуп

$$\beta + 1 = \{\xi : \xi \leq \beta\}$$

пребројив.

Доказ. Пошто је $\beta < \omega_1$, ординал β је пребројив. Скуп

$$\beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$$

добива се додавањем једног елемента пребројивом скупу. Зато је и $\beta + 1$ пребројив. $\square$

1.3 Игра која показује непребројивост континуума

Непребројивост скупа реалних бројева обично се доказује Канторовим дијагоналним аргументом. У овом одељку изложимо један другачији, мање познат доказ, заснован на идеји из рада Метјуа Бејкера [8]. У оригиналном раду игра се посматра на интервалу $[0, 1]$, док ћемо је овде формулисати на целој реалној правој. Суштина доказа остаје иста: ако је циљни скуп пребројив, други играч може редом да избегне сваки његов елемент, док за $S = \mathbb{R}$ први играч аутоматски побеђује.

Дефиниција 1.20. Нека је $S \subseteq \mathbb{R}$. Дефинишемо игру $\mathcal{G}(S)$ за два играча, које ћемо звати A и B . У нултом кораку играч A бира број $a_0 \in \mathbb{R}$, а затим играч B бира број $b_0 \in \mathbb{R}$ тако да важи

$$a_0 < b_0.$$

У n -том кораку, за $n \geq 1$, играч A бира број a_n тако да

$$a_{n-1} < a_n < b_{n-1},$$

а затим играч B бира број b_n тако да

$$a_n < b_n < b_{n-1}.$$

Дакле, током игре настаје низ угњеждених интервала

$$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n < \cdots < b_2 < b_1 < b_0.$$

Пошто је низ (a_n) растући и одозго ограничен, он има границу у $\mathbb{R}$. Означимо је са

$$a_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Кажемо да играч A побеђује ако је

$$a_\infty \in S.$$

У супротном, ако је $a_\infty \notin S$, побеђује играч B .

Тврдња 1.2. Ако је $S = \mathbb{R}$, онда играч A побеђује у игри $\mathcal{G}(S)$, независно од тога како се игра одвија.

Доказ. У свакој партији игре низ (a_n) је растући и одозго ограничен, јер за свако n важи

$$a_n < b_n < b_0.$$

Зато, по теореме о монотonoј конвергенцији, постоји

$$a_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}.$$

Ако је сада $S = \mathbb{R}$, онда је аутоматски

$$a_\infty \in S.$$

Дакле, играч A побеђује. □

Теорема 1.1. Ако је skup $S \subseteq \mathbb{R}$ пребројив, онда играч B има победничку стратегију у игри $\mathcal{G}(S)$.

Доказ. Пошто је S пребројив, његове елементе можемо поређати у низ

$$S = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}.$$

Стратегија играча B биће да у n -том потезу обезбеди да граница a_∞ не може бити једнака броју x_n . У нултом кораку, пошто је играч A изабрао a_0 , играч B поступа овако. Ако је $x_0 > a_0$, бира b_0 тако да

$$a_0 < b_0 < x_0.$$

Ако је $x_0 \leq a_0$, бира било који реалан број b_0 такав да

$$a_0 < b_0.$$

Претпоставимо сада да је $n \geq 1$, и да је играч A управо изабрао број a_n , при чему важи

$$a_{n-1} < a_n < b_{n-1}.$$

Ако је $x_n > a_n$, играч B бира b_n тако да

$$a_n < b_n < \min\{x_n, b_{n-1}\}.$$

То је могуће јер су и x_n и b_{n-1} већи од a_n . Ако је $x_n \leq a_n$, играч B бира било који легалан број b_n , тј. било који број такав да

$$a_n < b_n < b_{n-1}.$$

Докажимо да ова стратегија заиста обезбеђује победу играча B . Фиксирајмо произвољан број $x_n \in S$. Ако је у тренутку n -тог потеза важило $x_n \leq a_n$, онда су сви каснији чланови низа (a_k) строго већи од a_n . Зато је

$$a_\infty > x_n,$$

па $a_\infty \neq x_n$. Ако је, с друге стране, важило $x_n > a_n$, онда је играч B изабрао b_n тако да

$$b_n < x_n.$$

Сви каснији чланови низа (a_k) остају мањи од b_n , па је

$$a_\infty \leq b_n < x_n.$$

Дакле, и у овом случају је

$$a_\infty \neq x_n.$$

Пошто ово важи за сваки $n \in \mathbb{N}$, закључујемо да граница a_∞ није једнака ниједном елементу скупа S . Другим речима,

$$a_\infty \notin S.$$

Зато играч B побеђује. □

Последица 1. Скуп реалних бројева $\mathbb{R}$ није пребројив.

Доказ. Претпоставимо супротно, да је скуп $\mathbb{R}$ пребројив. Тада би, на основу претходне теореме, играч B имао победничку стратегију у игри $\mathcal{G}(\mathbb{R})$. Са друге стране, пошто је $S = \mathbb{R}$, на основу претходне тврдње играч A мора да победи у свакој партији игре. То је контрадикција: не могу оба играча имати победничку стратегију у истој игри са јасно одређеним победником. Зато скуп $\mathbb{R}$ није пребројив. □

1.4 Континуум хипотеза

Кардиналност скупа реалних бројева означава се са

$$\mathfrak{c}.$$

Овај кардинал назива се *континуум*. Дакле,

$$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|.$$

Доказали смо да је скуп реалних бројева непребројив, па важи

$$\aleph_0 < \mathfrak{c}.$$

Природно питање је да ли постоји кардинал строго између кардиналности скупа природних бројева и кардиналности скупа реалних бројева.

Дефиниција 1.21. *Канџорова континуум хипотеза*, скраћено **CH**, јесте тврдња да не постоји скуп A такав да

$$\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}.$$

Другим речима, не постоји кардинал строго између $\aleph_0$ и $\mathfrak{c}$.

Пошто је $\aleph_1$ први кардинал строго већи од $\aleph_0$, континуум хипотеза је еквивалентна тврдњи

$$\mathfrak{c} = \aleph_1.$$

Односно,

$$|\mathbb{R}| = \aleph_1.$$

Како је

$$|\omega_1| = \aleph_1,$$

добивамо да је континуум хипотеза еквивалентна тврдњи

$$|\mathbb{R}| = |\omega_1|.$$

Последица 2. Ако важи **CH**, онда постоји бијекција

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \omega_1.$$

Ова последица је кључна за доказе који следе. Она нам омогућава да, под претпоставком континуум хипотезе, реалне бројеве заменимо ординалима мањим од ω_1 . Предност рада са ω_1 је у томе што сваки његов почетни сегмент има пребројиву кардиналност. Прецизније, ако је

$$\beta < \omega_1,$$

онда је

$$\beta + 1 = \{\xi : \xi \leq \beta\}$$

пребројив скуп. Управо ова особина биће нам корисна у наредним доказима.

2

Еквиваленти континууум хипотезе

2.1 Проблем три затвореника

У овом одељку посматрамо следећу игру. Три затвореника имају на главама елементе неког унапред познатог скупа S . Сваки затвореник види елементе на главама друге двојице, али не види свој елемент. На основу онога што види, он мора да изабере коначан подскуп скупа S . Циљ је да, без обзира на то која су три елемента стављена на главе затвореника, бар један од затвореника изабере скуп који садржи баш његов елемент.

Дефиниција 2.1. Нека је S скуп. Стратегијом за скуп S називамо функцију

$$\sigma : S^2 \longrightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}}(S),$$

где је $\mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$ скуп свих коначних подскупова скупа S , такву да важе следећа два услова:

$$\sigma(x, y) = \sigma(y, x),$$

за све $x, y \in S$, и

$$(\forall x, y, z \in S) \quad x \in \sigma(y, z) \vee y \in \sigma(x, z) \vee z \in \sigma(x, y).$$

Први услов говори да редослед два виђена елемента није битан. Други услов је формализација захтева из игре. Ако су на главама затвореника елементи x, y, z , онда затвореник са елементом x види y и z , па бира скуп $\sigma(y, z)$. Слично, затвореник са елементом y бира $\sigma(x, z)$, а затвореник са елементом z бира $\sigma(x, y)$. Зато услов

$$x \in \sigma(y, z) \vee y \in \sigma(x, z) \vee z \in \sigma(x, y)$$

значи да је бар један затвореник сигурно погодио.

Тврдња 2.1. За скуп $\mathbb{Z}$ постоји стратегија.

Доказ. Дефинишимо

$$\sigma(m, n) = \{k \in \mathbb{Z} : \min(m, n) \leq k \leq \max(m, n)\}.$$

Другим речима, затвореник који види два цела броја бира све целе бројеве између њих. Скуп $\sigma(m, n)$ је коначан, јер између два цела броја има само коначно много целих бројева. Такође је јасно да

$$\sigma(m, n) = \sigma(n, m).$$

Нека су сада на главама затвореника бројеви $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Без губљења општости можемо претпоставити да је

$$a \leq b \leq c.$$

Затвореник са бројем b види бројеве a и c , па бира

$$\sigma(a, c) = \{a, a+1, \dots, c\}.$$

Пошто је $a \leq b \leq c$, важи

$$b \in \sigma(a, c).$$

Дакле, затвореник са средњим бројем сигурно погађа. Тиме је показано да је σ стратегија за $\mathbb{Z}$. $\square$

Тврдња 2.2. За скуп $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ постоји стратегија при којој бар двојица затвореника погађају свој број.

Доказ. Дефинишимо

$$\sigma(m, n) = \{0, 1, 2, \dots, \max(m, n)\}.$$

Овај скуп је коначан за све $m, n \in \mathbb{N}$, а очигледно важи и

$$\sigma(m, n) = \sigma(n, m).$$

Нека су на главама затвореника бројеви $a, b, c \in \mathbb{N}$. Без губљења општости претпоставимо да је

$$a \leq b \leq c.$$

Затвореник са бројем a види бројеве b и c , па бира

$$\sigma(b, c) = \{0, 1, 2, \dots, c\}.$$

Пошто је $a \leq c$, имамо

$$a \in \sigma(b, c).$$

Дакле, затвореник са најмањим бројем погађа. Затвореник са бројем b види бројеве a и c , па бира

$$\sigma(a, c) = \{0, 1, 2, \dots, c\}.$$

Пошто је $b \leq c$, имамо

$$b \in \sigma(a, c).$$

Дакле, и затвореник са средњим бројем погађа. Према томе, овом стратегијом сигурно погађају бар двојица затвореника. $\square$

Лема 2.1. Нека су S_1 и S_2 скупови такви да постоји бијекција

$$f : S_2 \longrightarrow S_1.$$

Ако постоји стратегија за S_1 , онда постоји стратегија за S_2 .

Доказ. Нека је

$$\sigma_1 : S_1^2 \longrightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}}(S_1)$$

стратегија за S_1 . Желимо да направимо стратегију

$$\sigma_2 : S_2^2 \longrightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}}(S_2).$$

Идеја је једноставна: елементе из S_2 прво помоћу бијекције f пребацујемо у S_1 , тамо примењујемо познату стратегију σ_1 , а затим добијени коначан скуп враћамо назад помоћу f^{-1} . Дефинишимо:

$$\sigma_2(x, y) = f^{-1} [\sigma_1(f(x), f(y))],$$

за све $x, y \in S_2$. Пошто је $\sigma_1(f(x), f(y))$ коначан подскуп од S_1 , његова инверзна слика бијекцијом f је коначан подскуп од S_2 . Дакле заиста важи

$$\sigma_2(x, y) \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(S_2).$$

Даље, пошто је σ_1 симетрична, имамо

$$\sigma_1(f(x), f(y)) = \sigma_1(f(y), f(x)).$$

Зато је

$$\sigma_2(x, y) = f^{-1} [\sigma_1(f(x), f(y))] = f^{-1} [\sigma_1(f(y), f(x))] = \sigma_2(y, x).$$

Остаје да проверимо главни услов стратегије. Нека су $x, y, z \in S_2$. Тада су

$$f(x), f(y), f(z) \in S_1.$$

Пошто је σ_1 стратегија за S_1 , важи

$$f(x) \in \sigma_1(f(y), f(z)) \quad \vee \quad f(y) \in \sigma_1(f(x), f(z)) \quad \vee \quad f(z) \in \sigma_1(f(x), f(y)).$$

Размотримо, на пример, први случај:

$$f(x) \in \sigma_1(f(y), f(z)).$$

Тада, по дефиницији инверзне слике, добијамо

$$x \in f^{-1}[\sigma_1(f(y), f(z))].$$

Али по дефиницији функције σ_2 важи

$$f^{-1}[\sigma_1(f(y), f(z))] = \sigma_2(y, z).$$

Дакле

$$x \in \sigma_2(y, z).$$

Преостала два случаја су потпуно аналогна. Зато важи

$$x \in \sigma_2(y, z) \quad \vee \quad y \in \sigma_2(x, z) \quad \vee \quad z \in \sigma_2(x, y).$$

Према томе, σ_2 је стратегија за S_2 . □

Теорема 2.1. Ако су скупови S_1 и S_2 исте кардиналности, онда стратегија за S_1 постоји ако и само ако стратегија за S_2 постоји.

Доказ. Ако су S_1 и S_2 исте кардиналности, постоји бијекција између њих. Претходна лема показује да се стратегија може пренети из S_1 у S_2 . Пошто је бијекција симетрична, односно има инверзну бијекцију, исти аргумент важи и у другом смеру. Зато стратегија постоји за S_1 ако и само ако постоји за S_2 . □

Последица 3. Сваки пребројив скуп има стратегију.

Доказ. Ако је S коначан, онда је стратегија очигледна: сваки затвореник може да изабере цео скуп S , јер је он коначан. Претпоставимо сада да је S бесконачно пребројив. Тада постоји бијекција

$$f : S \longrightarrow \omega.$$

Пошто смо већ показали да постоји стратегија за ω , а скуп S има исту кардиналност као ω , из претходне теореме следи да постоји стратегија и за S . □

Теорема 2.2. (Башић, [5]) За скуп реалних бројева $\mathbb{R}$ постоји победничка стратегија ако и само ако важи хипотеза континуума, тј.

$$\mathbb{R} \text{ има победничку стратегију} \iff \text{CH}.$$

Доказ. Докажимо прво смер

$$\text{CH} \implies \mathbb{R} \text{ има победничку стратегију.}$$

Ако важи CH, онда је

$$|\mathbb{R}| = \aleph_1 = |\omega_1|.$$

Зато је довољно конструисати победничку стратегију за ω_1 , па је затим пренети на $\mathbb{R}$ помоћу неке бијекције између $\mathbb{R}$ и ω_1 . За сваки $\beta < \omega_1$, скуп

$$\beta + 1 = \{\xi : \xi \leq \beta\}$$

је пребројив. Зато можемо изабрати инјекцију

$$f_\beta : \beta + 1 \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Сада дефинишемо стратегију

$$\sigma : \omega_1^2 \longrightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}}(\omega_1)$$

на следећи начин. За $\xi, \eta < \omega_1$ нека је

$$\alpha = \min\{\xi, \eta\}, \quad \beta = \max\{\xi, \eta\}.$$

Тада поставимо

$$\sigma(\xi, \eta) = \{\rho \leq \beta : f_\beta(\rho) \leq f_\beta(\alpha)\}.$$

Ово је заиста коначан скуп. Наиме, пошто је f_β инјективна, за сваку вредност

$$0, 1, \dots, f_\beta(\alpha)$$

постоји највише један $\rho \leq \beta$ који се у њу пресликава. Дакле скуп $\sigma(\xi, \eta)$ има највише $f_\beta(\alpha) + 1$ елемената. Покажимо да је σ победничка стратегија. Нека су на капама ординали

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma.$$

Посматрамо инјекцију

$$f_\gamma : \gamma + 1 \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Имамо два случаја. Ако је

$$f_\gamma(\alpha) \leq f_\gamma(\beta),$$

онда по дефиницији стратегије важи

$$\alpha \in \sigma(\beta, \gamma),$$

јер у пару (β, γ) већи ординал је γ , а мањи је β , па се узимају сви $\rho \leq \gamma$ за које је

$$f_\gamma(\rho) \leq f_\gamma(\beta).$$

Пошто $\alpha \leq \gamma$ и $f_\gamma(\alpha) \leq f_\gamma(\beta)$, следи да је $\alpha \in \sigma(\beta, \gamma)$. Ако је

$$f_\gamma(\beta) < f_\gamma(\alpha),$$

онда аналогно добијамо

$$\beta \in \sigma(\alpha, \gamma).$$

Дакле у првом случају погађа особа са ординалом α , а у другом случају особа са ординалом β . У сваком случају бар једна особа погађа, па је σ победничка стратегија за ω_1 . По већ доказаном, пошто $|\mathbb{R}| = |\omega_1|$, знамо да постоји стратегија за $\mathbb{R}$. Докажимо сада обрнути смер

$$\mathbb{R} \text{ има победничку стратегију} \implies \text{CH}.$$

Претпоставимо да постоји победничка стратегија

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{R}).$$

Докажимо да тада не може постојати скуп строго између $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ по кардиналности. Претпоставимо супротно, да постоји скуп A такав да

$$\aleph_0 < |A| < \mathfrak{c}$$

и такође важи

$$\mathbb{N} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}.$$

Посматрајмо скуп

$$A' = \bigcup_{a,b \in A} \sigma(a, b).$$

За сваки пар $(a, b) \in A^2$, скуп $\sigma(a, b)$ је коначан. Пошто је A бесконачан скуп, важи

$$|A^2| = |A|.$$

Зато је

$$|A'| \leq |A| < |\mathbb{R}|.$$

Дакле постоји реалан број

$$x_0 \in \mathbb{R} \setminus A'.$$

То значи да за све $a, b \in A$ важи

$$x_0 \notin \sigma(a, b).$$

За свако $n \in \mathbb{N}$ дефинишимо

$$B_n = \{a \in A : n \notin \sigma(a, x_0)\}.$$

Показаћемо да је сваки скуп B_n коначан. Нека је $a \in B_n$. Посматрајмо тројку

$$a, n, x_0.$$

Пошто су $a, n \in A$, а $x_0 \notin A'$, имамо

$$x_0 \notin \sigma(a, n).$$

Дакле особа са бројем x_0 не погађа. Такође, пошто је $a \in B_n$, имамо

$$n \notin \sigma(a, x_0).$$

Дакле ни особа са бројем n не погађа. Пошто је σ победничка стратегија, мора погодити преостала особа, односно особа са бројем a . Она види бројеве n и x_0 , па мора важити

$$a \in \sigma(n, x_0).$$

Дакле

$$B_n \subseteq \sigma(n, x_0).$$

Како је $\sigma(n, x_0)$ коначан скуп, следи да је B_n коначан. Сада је

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

пребројива унија коначних скупова, па је пребројив скуп. Пошто је A непребројив, постоји

$$a_0 \in A \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Тада за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$a_0 \notin B_n.$$

По дефиницији скупа B_n , то значи да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$n \in \sigma(a_0, x_0).$$

Дакле

$$\mathbb{N} \subseteq \sigma(a_0, x_0).$$

Али $\sigma(a_0, x_0)$ мора бити коначан скуп, што је контрадикција. Зато не постоји скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ такав да

$$|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|.$$

Према томе важи хипотеза континуума, тј.

$$\text{CH.}$$

Тиме је доказано

$$\mathbb{R} \text{ има победничку стратегију} \iff \text{CH.}$$

□

2.2 Монохроматски правоугаоници и троуглови у обојеној равни

Сада посматрамо следећи проблем. Раван $\mathbb{R}^2$ обојена је неким скупом боја. Питамо се да ли се, без обзира на начин бојења, увек могу наћи четири темена једног правоугаоника (три темена једног правоуглог троугла) која су исте боје. Под правоугаоником ћемо у овом одељку подразумевати осно-паралелан правоугаоник, тј. правоугаоник чије су странице паралелне координатним осама. Касније ћемо, исто тако, посматрати правоугле троуглове чије су катете паралелне са осама. Резултати у овом одељку засновани су на раду Ердоша и Комјата [6].

Дефиниција 2.2. Нека је C скуп боја. Бојењем равни скупом боја C називамо функцију

$$c : \mathbb{R}^2 \longrightarrow C.$$

Осно-паралелан правоугаоник у равни је скуп од четири тачке облика

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_1), \quad (x_1, y_2), \quad (x_2, y_2),$$

где је

$$x_1 \neq x_2, \quad y_1 \neq y_2.$$

Кажемо да је тај правоугаоник монохроматски ако су сва његова четири темена исте боје, односно ако важи

$$c(x_1, y_1) = c(x_2, y_1) = c(x_1, y_2) = c(x_2, y_2).$$

Другим речима, не посматрамо све могуће правоугаонике у равни, већ само оне који се добијају пресецањем две различите вертикале и две различите хоризонтале. Зато је довољно пронаћи два различита x -координатна места и два различита y -координатна места таква да су четири добијене тачке исте боје. Прво ћемо показати да је за коначно много боја одговор увек потврдан.

Тврдња 2.3. Нека је $n \geq 1$. При сваком бојењу равни $\mathbb{R}^2$ у n боја постоји монохроматски правоугаоник.

Доказ. Нека је дато произвољно бојење

$$c : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}.$$

Изаберимо $n + 1$ различитих реалних бројева

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

и $n^{n+1} + 1$ различитих реалних бројева

$$y_0, y_1, \dots, y_{n^{n+1}}.$$

Посматрамо само тачке облика

$$(x_i, y_j), \quad 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq n^{n+1}.$$

За свако фиксирано j , хоризонтала

$$\{(x_0, y_j), (x_1, y_j), \dots, (x_n, y_j)\}$$

одређује једну уређену $(n + 1)$ -торку боја

$$(c(x_0, y_j), c(x_1, y_j), \dots, c(x_n, y_j)).$$

Могућих таквих $(n + 1)$ -торки има тачно

$$n^{n+1}.$$

Међутим, ми имамо $n^{n+1} + 1$ различитих хоризонтала. Зато, по Дирихлеовом принципу, постоје две различите хоризонтале, рецимо y_p и y_q , које имају потпуно исти распоред боја. Дакле,

$$c(x_i, y_p) = c(x_i, y_q)$$

за свако $i = 0, 1, \dots, n$. Сада на хоризонтали y_p имамо $n + 1$ тачака, а само n боја. Поново по Дирихлеовом принципу, постоје два различита индекса k и l таква да је

$$c(x_k, y_p) = c(x_l, y_p).$$

Пошто хоризонтале y_p и y_q имају исти распоред боја, важи и

$$c(x_k, y_q) = c(x_k, y_p), \quad c(x_l, y_q) = c(x_l, y_p).$$

Према томе, све четири тачке

$$(x_k, y_p), \quad (x_l, y_p), \quad (x_k, y_q), \quad (x_l, y_q)$$

имају исту боју. Оне су темена осно-паралелног правоугаоника, па је тај правоугаоник монохроматски. $\square$

За коначно много боја, дакле, монохроматски правоугаоник увек постоји. Природно је сада питати се шта се дешава ако раван бојимо у пребројиво много боја. Испоставља се да тада одговор зависи тачно од тога да ли важи хипотеза континуума.

Теорема 2.3. Следеће две тврдње су еквивалентне:

свако пребројиво бојење равни $\mathbb{R}^2$ има монохроматски правоугаоник

и

$$\neg \text{CH}.$$

Другим речима,

свако бојење $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \omega$ има монохроматски правоугаоник $\iff \neg \text{CH}.$

Доказ. Докажимо прво смер

$\neg \text{CH} \implies$ свако пребројиво бојење равни има монохроматски правоугаоник.

Пошто не важи хипотеза континуума, имамо

$$\mathfrak{c} > \aleph_1.$$

Како је $\aleph_2$ први кардинал строго већи од $\aleph_1$, следи

$$\mathfrak{c} \geq \aleph_2.$$

Зато можемо изабрати скупове

$$X, Y \subseteq \mathbb{R}$$

такве да је

$$|X| = \aleph_1, \quad |Y| = \aleph_2.$$

Нека је дато произвољно пребројиво бојење

$$c : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \omega.$$

Довољно је посматрати његово сужење на скуп

$$X \times Y.$$

Фиксирајмо $y \in Y$. На хоризонтали

$$X \times \{y\}$$

има $\aleph_1$ тачака, а боја има само пребројиво много. Зато постоји бар једна боја која се на тој хоризонтали појављује $\aleph_1$ пута. Такву боју назваћемо главном бојом хоризонтале $X \times \{y\}$, и означимо је са n_y . За свако $y \in Y$ на овај начин добијамо једну главну боју n_y . Пошто постоји само пребројиво много

боја, а имамо $\aleph_2$ хоризонтала, нека боја мора бити главна боја за $\aleph_2$ много хоризонтала. Означимо ту боју са n_0 . Дакле, постоји скуп

$$Y_1 \subseteq Y, \quad |Y_1| = \aleph_2,$$

такав да за свако $y \in Y_1$ боја n_0 наступа $\aleph_1$ пута на хоризонтали $X \times \{y\}$. За свако $y \in Y_1$ можемо изабрати два различита елемента

$$x_y^1, x_y^2 \in X$$

таква да је

$$c(x_y^1, y) = c(x_y^2, y) = n_0.$$

Другим речима, свакој хоризонтали $y \in Y_1$ придружујемо један двочлани подскуп скупа X . Дефинишимо

$$f : Y_1 \longrightarrow [X]^2, \quad f(y) = \{x_y^1, x_y^2\},$$

где је

$$[X]^2 = \{\{x_1, x_2\} : x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\}.$$

Пошто је

$$|X| = \aleph_1,$$

важи

$$|[X]^2| = \aleph_1.$$

Са друге стране,

$$|Y_1| = \aleph_2.$$

Зато функција

$$f : Y_1 \longrightarrow [X]^2$$

не може бити инјективна. Дакле, постоје две различите хоризонтале $y_1, y_2 \in Y_1$ такве да је

$$f(y_1) = f(y_2).$$

Нека је

$$f(y_1) = f(y_2) = \{x_1, x_2\}.$$

Тада су, по дефиницији функције f , све четири тачке

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_1), \quad (x_1, y_2), \quad (x_2, y_2)$$

боје n_0 . Дакле, добили смо монохроматски правоугаоник. Тиме смо доказали да, ако не важи хипотеза континуума, онда свако пребројиво бојење равни има монохроматски правоугаоник. Докажимо сада обрнути смер

свако пребројиво бојење равни има монохроматски правоугаоник $\implies \neg \text{CH}$.

Довољно је доказати контрапозицију, односно да из хипотезе континуума следи да постоји пребројиво бојење равни без монохроматског правоугаоника. Претпоставимо зато да важи хипотеза континуума. Тада је

$$|\mathbb{R}| = \aleph_1.$$

Зато реалне бројеве можемо добро уредити у трансфинитни низ дужине ω_1 :

$$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

За сваки ординал $\alpha < \omega_1$, скуп

$$\alpha + 1 = \{\xi : \xi \leq \alpha\}$$

је пребројив. Зато можемо изабрати инјекцију

$$f_\alpha : \alpha + 1 \longrightarrow \omega.$$

Сада дефинишемо бојење

$$c : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \omega$$

на следећи начин. Ако су $\alpha, \beta < \omega_1$, стављамо

$$c(r_\alpha, r_\beta) = \begin{cases} f_\beta(\alpha), & \alpha \leq \beta, \\ f_\alpha(\beta), & \beta < \alpha. \end{cases}$$

Интуитивно, боја тачке (r_α, r_β) одређена је већим од ординала α и β , док се мањи ординал убацује у одговарајућу инјекцију. Показаћемо да ово бојење нема монохроматски правоугаоник. Претпоставимо супротно, да постоје

$$\alpha_1 \neq \alpha_2, \quad \beta_1 \neq \beta_2,$$

такви да су све четири тачке

$$(r_{\alpha_1}, r_{\beta_1}), \quad (r_{\alpha_2}, r_{\beta_1}), \quad (r_{\alpha_1}, r_{\beta_2}), \quad (r_{\alpha_2}, r_{\beta_2})$$

исте боје. Без губљења општости можемо претпоставити да је

$$\alpha_1 < \alpha_2, \quad \beta_1 < \beta_2.$$

Разликујемо два случаја. Ако је

$$\alpha_2 \leq \beta_2,$$

онда је и

$$\alpha_1 < \alpha_2 \leq \beta_2.$$

Зато, по дефиницији бојења, важи

$$c(r_{\alpha_1}, r_{\beta_2}) = f_{\beta_2}(\alpha_1)$$

и

$$c(r_{\alpha_2}, r_{\beta_2}) = f_{\beta_2}(\alpha_2).$$

Пошто је f_{β_2} инјективна и $\alpha_1 \neq \alpha_2$, следи

$$f_{\beta_2}(\alpha_1) \neq f_{\beta_2}(\alpha_2).$$

Дакле,

$$c(r_{\alpha_1}, r_{\beta_2}) \neq c(r_{\alpha_2}, r_{\beta_2}).$$

Зато посматрани правоугаоник не може бити монохроматски. Остаје случај

$$\beta_2 < \alpha_2.$$

Тада је

$$\beta_1 < \beta_2 < \alpha_2.$$

Зато, по дефиницији бојења, важи

$$c(r_{\alpha_2}, r_{\beta_1}) = f_{\alpha_2}(\beta_1)$$

и

$$c(r_{\alpha_2}, r_{\beta_2}) = f_{\alpha_2}(\beta_2).$$

Пошто је f_{α_2} инјективна и $\beta_1 \neq \beta_2$, следи

$$f_{\alpha_2}(\beta_1) \neq f_{\alpha_2}(\beta_2).$$

Дакле,

$$c(r_{\alpha_2}, r_{\beta_1}) \neq c(r_{\alpha_2}, r_{\beta_2}).$$

Ни у овом случају посматрани правоугаоник не може бити монохроматски. У оба случаја долазимо до контрадикције са претпоставком да су сва четири темена исте боје. Према томе, ако важи хипотеза континуума, постоји пребројиво бојење равни без монохроматског правоугаоника. Тиме је доказана контрапозиција, па следи

свако пребројиво бојење равни има монохроматски правоугаоник $\implies \neg \text{CH}$.

Дакле,

свако бојење $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \omega$ има монохроматски правоугаоник $\iff \neg \text{CH}$.

□

Испоставља се да се до сличног закључка може доћи и за правоугле оснопаралелне троуглове. Следећа тврдња добија се истом идејом као претходна теорема, уз малу промену бојења: боји се додаје још једна координата која бележи који од два ординална индекса је већи.

Теорема 2.4. Наредне две тврдње су еквивалентне:

свако пребројиво бојење равни $\mathbb{R}^2$ има
 монохроматски правоугли троугао чије су катете оснопаралелне
 и
 $\neg \text{CH}$.

Доказ. Докажимо прво смер

$\neg \text{CH} \implies$ свако пребројиво бојење равни има правоугли монохроматски троугао.

По претходној теорему, ако не важи хипотеза континуума, онда свако пребројиво бојење равни има монохроматски правоугаоник. Међутим, свака три одговарајућа темена таквог правоугаоника чине правоугли троугао чије су катете оснопаралелне. Зато у том бојењу постоји и тражени правоугли монохроматски троугао. Докажимо сада обрнути смер контрапозицијом. Претпоставимо да важи хипотеза континуума. Тада је

$$|\mathbb{R}| = \aleph_1,$$

па реалне бројеве можемо добро уредити у трансфинитни низ

$$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

За сваки $\alpha < \omega_1$, скуп $\alpha + 1$ је пребројив, па можемо изабрати инјекцију

$$f_\alpha : \alpha + 1 \longrightarrow \omega.$$

Сада дефинишемо бојење

$$c : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \{0, 1\} \times \omega$$

на следећи начин:

$$c(r_\alpha, r_\beta) = \begin{cases} (0, f_\beta(\alpha)), & \alpha \leq \beta, \\ (1, f_\alpha(\beta)), & \beta < \alpha. \end{cases}$$

Пошто је скуп $\{0, 1\} \times \omega$ пребројив, ово је заиста пребројиво бојење равни. Показаћемо да у овом бојењу не постоји монохроматски правоугли троугао чије су катете оснопаралелне. Претпоставимо супротно. Нека су три темена

таквог троугла исте боје. Тај троугао има једну хоризонталну катету и једну вертикалну катету. Пошто су сва три темена исте боје, њихове прве координате у боји, дакле бројеви 0 или 1, морају бити једнаке. Ако је та заједничка прва координата једнака 0, посматрамо хоризонталну катету троугла. Њена темена су облика

$$(r_{\alpha_1}, r_{\beta}), \quad (r_{\alpha_2}, r_{\beta}),$$

где је $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Пошто обе тачке имају прву координату боје једнаку 0, по дефиницији бојења важи

$$c(r_{\alpha_1}, r_{\beta}) = (0, f_{\beta}(\alpha_1)),$$

и

$$c(r_{\alpha_2}, r_{\beta}) = (0, f_{\beta}(\alpha_2)).$$

Али f_{β} је инјективна, а $\alpha_1 \neq \alpha_2$, па је

$$f_{\beta}(\alpha_1) \neq f_{\beta}(\alpha_2).$$

Зато ове две тачке не могу имати исту боју, што је контрадикција. Ако је заједничка прва координата боје једнака 1, посматрамо вертикалну катету троугла. Њена темена су облика

$$(r_{\alpha}, r_{\beta_1}), \quad (r_{\alpha}, r_{\beta_2}),$$

где је $\beta_1 \neq \beta_2$. Пошто обе тачке имају прву координату боје једнаку 1, по дефиницији бојења важи

$$c(r_{\alpha}, r_{\beta_1}) = (1, f_{\alpha}(\beta_1)),$$

и

$$c(r_{\alpha}, r_{\beta_2}) = (1, f_{\alpha}(\beta_2)).$$

Пошто је f_{α} инјективна, а $\beta_1 \neq \beta_2$, следи

$$f_{\alpha}(\beta_1) \neq f_{\alpha}(\beta_2).$$

Зато ни ове две тачке не могу имати исту боју, што је поново контрадикција. Дакле, под претпоставком СН постоји пребројиво бојење равни без монохроматског правоуглог троугла чије су катете оснопаралелне. Тиме је доказана контрапозиција, па следи

свако пребројиво бојење равни има правоугли монохроматски троугао $\implies \neg \text{СН}$.

Према томе,

свако пребројиво бојење равни има монохроматски
правоугли троугао са оснопаралелним катетама

еквивалентно је са

$$\neg \text{СН}.$$

□

2.3 Облаци у равни

Сада ћемо говорити о томе да ли се цела равна може покрити помоћу три посебно ретка скупа, које називамо облацима. Идеја облака је следећа. Ако је A фиксирана тачка у равни, онда облак око A сме да има много тачака у равни, али на свакој правој која пролази кроз A сме да има само коначно много тачака.

Дефиниција 2.3. Нека је A тачка у равни. Са $\mathcal{P}_A$ означавамо скуп свих правих у равни које пролазе кроз A . Облак око тачке A је скуп тачака $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ такав да за сваку праву $p \in \mathcal{P}_A$ важи

$$|p \cap \Omega| < \aleph_0.$$

Другим речима, свака права кроз A сече облак Ω у коначно много тачака.

Кажемо да је равна унија три облака ако постоје тачке $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ и облаци $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$, редом око A, B, C , такви да је

$$\mathbb{R}^2 = \Omega_A \cup \Omega_B \cup \Omega_C.$$

Следећа теорема, коју је доказао Комјат, показује да је могућност таквог покривања равни тачно еквивалентна хипотези континуума.

Теорема 2.5. (Комјат, [7]) Равна $\mathbb{R}^2$ је унија три облака ако и само ако важи хипотеза континуума.

Доказ. Докажимо прво смер

$$\text{CH} \implies \mathbb{R}^2 \text{ је унија три облака.}$$

Претпоставимо да важи хипотеза континуума. Тада је

$$|\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c} = \aleph_1,$$

па тачке равни можемо добро уредити у трансфинитни низ

$$\mathbb{R}^2 = \{P_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Фиксирајмо три неколинеарне тачке A, B, C у равни. Нека је

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}_A \cup \mathcal{P}_B \cup \mathcal{P}_C.$$

Дакле, $\mathcal{E}$ је скуп свих правих које пролазе кроз бар једну од тачака A, B, C . Најпре ћемо конструисати, за свако $\alpha < \omega_1$, скупове тачака $\Phi_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2$ и скупове правих $\mathcal{E}_\alpha \subseteq \mathcal{E}$, тако да важе следећи услови:

- (U1) Φ_α и $\mathcal{E}_\alpha$ су пребројиви;
- (U2) $\alpha \leq \beta \implies \Phi_\alpha \subseteq \Phi_\beta$ и $\mathcal{E}_\alpha \subseteq \mathcal{E}_\beta$;
- (U3) $A, B, C, P_\alpha \in \Phi_\alpha$ и $AB, BC, CA \in \mathcal{E}_\alpha$;
- (U4) ако је $P \in \Phi_\alpha$, $X \in \{A, B, C\}$ и $P \neq X$, онда $PX \in \mathcal{E}_\alpha$;
- (U5) ако $p, q \in \mathcal{E}_\alpha$ и $p \cap q = \{P\}$, онда $P \in \Phi_\alpha$.

За тренутак претпоставимо да су такви скупови конструисани. Из услова (U3) одмах следи

$$\bigcup_{\alpha < \omega_1} \Phi_\alpha = \mathbb{R}^2.$$

Такође важи

$$\bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}.$$

Заиста, нека је $p \in \mathcal{E}$. Ако, на пример, $p \in \mathcal{P}_A$, изаберимо тачку $P \in p$, $P \neq A$. Тада је $P = P_\alpha$ за неко $\alpha < \omega_1$, па је $P \in \Phi_\alpha$. По услову (U4) добијамо $PA \in \mathcal{E}_\alpha$, односно $p \in \mathcal{E}_\alpha$. За свако $\alpha < \omega_1$ посматрајмо скуп правих које се први пут појављују у етапи α :

$$\mathcal{E}_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{E}_\beta.$$

Пошто је $\mathcal{E}_\alpha$ пребројив, и овај скуп је пребројив. Зато га можемо записати у облику

$$\mathcal{E}_\alpha \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{E}_\beta = \{p_{\alpha,n} : n < \gamma_\alpha\},$$

где је $\gamma_\alpha \leq \omega$. Овде γ_α може бити коначан ординал или ω . Сада ћемо свакој правој $p \in \mathcal{E}$ придружити коначан скуп тачака $K_p \subseteq p$. Ако је

$$p = p_{\alpha,n},$$

дефинишемо K_p као скуп свих једночланих пресека праве p са правама

$$AB, AC, BC, p_{\alpha,0}, p_{\alpha,1}, \dots, p_{\alpha,n-1}.$$

Прецизније,

$$K_{p_{\alpha,n}} = \{P : \text{постоји права } q \in \{AB, AC, BC, p_{\alpha,0}, \dots, p_{\alpha,n-1}\} \text{ таква да је } p_{\alpha,n} \cap q = \{P\}\}.$$

Скуп K_p је коначан, јер у његовој дефиницији учествује само коначно много правих. Приметимо да овде узимамо само једночлане пресеке: ако су две праве паралелне или ако се поклапају, оне не додају нову тачку у K_p . Дефинишимо сада три скупа

$$\Omega_A = \bigcup_{p \in \mathcal{P}_A} K_p, \quad \Omega_B = \bigcup_{p \in \mathcal{P}_B} K_p, \quad \Omega_C = \bigcup_{p \in \mathcal{P}_C} K_p.$$

Показаћемо да су то облаци око тачака A, B, C , редом. Посматрајмо, на пример, скуп Ω_A . Нека је $\ell \in \mathcal{P}_A$ произвољна права кроз A . Пошто је K_ℓ коначан, довољно је приметити да свака друга права $p \in \mathcal{P}_A$, $p \neq \ell$, има са правом ℓ само једну заједничку тачку, и то тачку A . Како је $K_p \subseteq p$, добијамо

$$\ell \cap \Omega_A \subseteq K_\ell \cup \{A\}.$$

Десна страна је коначна, па је и $\ell \cap \Omega_A$ коначан скуп. Дакле, Ω_A је облак око A . Потпуно аналогно се показује да су Ω_B и Ω_C облаци око B и C . Остаје да покажемо да ови облаци покривају целу равн. Нека је $P \in \mathbb{R}^2$ произвољна тачка. Пошто је

$$\bigcup_{\alpha < \omega_1} \Phi_\alpha = \mathbb{R}^2,$$

постоји најмањи ординал $\beta < \omega_1$ такав да је

$$P \in \Phi_\beta.$$

Дакле

$$P \notin \bigcup_{\delta < \beta} \Phi_\delta.$$

Разликујемо неколико случајева. Прво, нека је $P \in AB$. Тада права PC припада $\mathcal{E}_\beta$, по услову (U4). Тврдимо да се права PC први пут појављује баш у етапи β . Заиста, ако би $PC \in \mathcal{E}_\delta$ за неко $\delta < \beta$, онда бисмо, пошто је $AB \in \mathcal{E}_\delta$, из услова (U5) добили

$$P \in \Phi_\delta,$$

што је супротно избору ординала β . Дакле

$$PC = p_{\beta,n}$$

за неко $n < \gamma_\beta$. По дефиницији скупа K_{PC} , у њега улази једночлани пресек праве PC са правом AB . Зато је

$$P \in K_{PC}.$$

Како права PC пролази кроз C , имамо $K_{PC} \subseteq \Omega_C$, па је

$$P \in \Omega_C.$$

Аналогно, ако је $P \in AC$, добијамо $P \in \Omega_B$, а ако је $P \in BC$, добијамо $P \in \Omega_A$. Преостаје случај када

$$P \notin AB \cup AC \cup BC.$$

Тада су праве

$$PA, PB, PC$$

добро дефинисане и међусобно различите. По услову (U4), све три припадају скупу $\mathcal{E}_\beta$. Тврдимо да највише једна од ове три праве може припадати скупу

$$\bigcup_{\delta < \beta} \mathcal{E}_\delta.$$

Заиста, ако би две од њих биле старе, на пример PA и PB , онда би, користећи монотоност из услова (U2), постојао $\delta < \beta$ такав да

$$PA, PB \in \mathcal{E}_\delta.$$

Тада би из

$$PA \cap PB = \{P\}$$

и услова (U5) следило

$$P \in \Phi_\delta,$$

што је немогуће по избору ординала β . Дакле, бар две од правих PA, PB, PC први пут се појављују у етапи β . Нека су те две праве

$$p_{\beta,n} \quad \text{и} \quad p_{\beta,m},$$

где је, без губљења општости, $n < m$. Њихов пресек је управо тачка P , па по дефиницији скупа $K_{p_{\beta,m}}$ имамо

$$P \in K_{p_{\beta,m}}.$$

Права $p_{\beta,m}$ је једна од правих PA, PB, PC , па пролази кроз једну од тачака A, B, C . Зато је

$$P \in \Omega_A \cup \Omega_B \cup \Omega_C.$$

Тиме смо показали да

$$\mathbb{R}^2 = \Omega_A \cup \Omega_B \cup \Omega_C.$$

Пошто су $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$ облаци, раван је унија три облака. Остаје још да заиста конструишемо скупове Φ_α и $\mathcal{E}_\alpha$ који задовољавају услове (U1)–(U5). Фиксирајмо $\alpha < \omega_1$. Дефинисаћемо растуће низове скупова тачака Θ_n^α и скупова правих $\mathcal{F}_n^\alpha$, за $n \in \omega$. Ставимо

$$\Theta_0^\alpha = \{A, B, C\} \cup \{P_\delta : \delta \leq \alpha\}$$

и

$$\mathcal{F}_0^\alpha = \{AB, BC, CA\}.$$

Пошто је $\alpha < \omega_1$, скуп $\{\delta : \delta \leq \alpha\}$ је пребројив, па је и Θ_0^α пребројив скуп. Ако су Θ_n^α и $\mathcal{F}_n^\alpha$ већ дефинисани, ставимо

$$\mathcal{F}_{n+1}^\alpha = \mathcal{F}_n^\alpha \cup \{PX : P \in \Theta_n^\alpha, X \in \{A, B, C\}, P \neq X\},$$

а затим

$$\Theta_{n+1}^\alpha = \Theta_n^\alpha \cup \{P : \text{постоје } p, q \in \mathcal{F}_{n+1}^\alpha \text{ такве да је } p \cap q = \{P\}\}.$$

Другим речима, у сваком кораку прво додајемо праве које спајају већ познате тачке са тачкама A, B, C , а затим додајемо све једночлане пресеке тако добијених правих. Индукцијом по n добијамо да су сви скупови Θ_n^α и $\mathcal{F}_n^\alpha$ пребројиви. Зато су скупови

$$\Phi_\alpha = \bigcup_{n \in \omega} \Theta_n^\alpha \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_\alpha = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n^\alpha$$

пребројиви, као пребројиве уније пребројивих скупова. Дакле важи (U1). Из саме конструкције јасно је да, ако је $\alpha \leq \beta$, онда је

$$\Theta_0^\alpha \subseteq \Theta_0^\beta.$$

Индукцијом по n добијамо

$$\Theta_n^\alpha \subseteq \Theta_n^\beta \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_n^\alpha \subseteq \mathcal{F}_n^\beta$$

за свако $n \in \omega$. Према томе,

$$\Phi_\alpha \subseteq \Phi_\beta \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_\alpha \subseteq \mathcal{E}_\beta,$$

па важи (U2). Услов (U3) важи јер су A, B, C, P_α већ у Θ_0^α , а праве AB, BC, CA већ у $\mathcal{F}_0^\alpha$. Услов (U4) важи по дефиницији скупова $\mathcal{F}_{n+1}^\alpha$. Заиста, ако је $P \in \Phi_\alpha$, онда је $P \in \Theta_n^\alpha$ за неко n . Зато за свако $X \in \{A, B, C\}$, $P \neq X$, права PX припада $\mathcal{F}_{n+1}^\alpha$, па самим тим и $\mathcal{E}_\alpha$. Коначно, важи и (U5). Нека су $p, q \in \mathcal{E}_\alpha$ и нека је

$$p \cap q = \{P\}.$$

Тада постоје $m, n \in \omega$ такви да је

$$p \in \mathcal{F}_m^\alpha \quad \text{и} \quad q \in \mathcal{F}_n^\alpha.$$

Ако је $k = \max(m, n)$, онда су, због раста скупова $\mathcal{F}_i^\alpha$,

$$p, q \in \mathcal{F}_k^\alpha \subseteq \mathcal{F}_{k+1}^\alpha.$$

По дефиницији скупа Θ_{k+1}^α , из $p \cap q = \{P\}$ следи

$$P \in \Theta_{k+1}^\alpha \subseteq \Phi_\alpha.$$

Дакле важи (U5). Тиме је завршен доказ смера

$$\text{CH} \implies \mathbb{R}^2 \text{ је унија три облака.}$$

Докажимо сада обрнути смер

$$\mathbb{R}^2 \text{ је унија три облака} \implies \text{CH}.$$

Довољно је доказати контрапозицију. Претпоставимо да је

$$\mathbb{R}^2 = \Omega_A \cup \Omega_B \cup \Omega_C,$$

где су $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$ облаци око тачака A, B, C , редом, и претпоставимо супротно да не важи хипотеза континуума. Тада је

$$|\mathbb{R}| \geq \aleph_2.$$

Приметимо најпре да тачке A, B, C не могу бити колинеарне. Заиста, ако би лежале на некој правој l , онда би, пошто су $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$ облаци око тачака A, B, C , скупови

$$l \cap \Omega_A, \quad l \cap \Omega_B, \quad l \cap \Omega_C$$

били коначни. Тада би и

$$l = (l \cap \Omega_A) \cup (l \cap \Omega_B) \cup (l \cap \Omega_C)$$

био коначан скуп, што је немогуће. Нека је

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}_A \cup \mathcal{P}_B \cup \mathcal{P}_C.$$

За сваку праву $p \in \mathcal{E}$ дефинишимо

$$K_p = \bigcup_{\substack{X \in \{A, B, C\} \\ p \in \mathcal{P}_X}} (p \cap \Omega_X).$$

Скуп K_p је коначан, јер је унија највише три коначна скупа. Такође важи

$$\bigcup_{p \in \mathcal{E}} K_p = \mathbb{R}^2.$$

Заиста, ако је $P \in \mathbb{R}^2$, онда $P \in \Omega_X$ за неко $X \in \{A, B, C\}$. Изаберемо праву p која пролази кроз X и P , па тада $P \in K_p$. Нека је $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Пошто је

$$|\mathbb{R}^+| \geq \aleph_2,$$

можемо изабрати међусобно различите бројеве

$$u_\alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \alpha < \omega_1,$$

и међусобно различите бројеве

$$v_n \in \mathbb{R}^+, \quad n < \omega.$$

За $\alpha < \omega_1$ и $n < \omega$, нека је $b_{\alpha,n}$ права кроз тачку B која сече дуж CA у тачки која дели ту дуж у односу

$$1 : u_\alpha v_n$$

гледано од C ка A . Ставимо

$$X = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \bigcup_{n < \omega} K_{b_{\alpha,n}}.$$

Пошто је сваки скуп $K_{b_{\alpha,n}}$ коначан, добијамо

$$|X| \leq \aleph_1.$$

Посматрајмо скуп лоших вредности

$$I = \{t \in \mathbb{R}^+ : (\exists P \in X)(\exists n < \omega) \text{ права } CP \text{ сече } AB \text{ у односу } tv_n : 1\}.$$

За фиксиране $P \in X$ и $n < \omega$ постоји највише једно такво t . Зато је

$$|I| \leq |X| \cdot \aleph_0 \leq \aleph_1.$$

Пошто је $|\mathbb{R}^+| \geq \aleph_2$, можемо изабрати

$$t_0 \in \mathbb{R}^+ \setminus I.$$

За свако $n < \omega$, нека је c_n права кроз тачку C која сече дуж AB у односу

$$t_0 v_n : 1.$$

Према избору броја t_0 , важи

$$X \cap c_n = \emptyset$$

за свако $n < \omega$. Ставимо сада

$$Y = \bigcup_{n < \omega} K_{c_n}.$$

Пошто је сваки скуп K_{c_n} коначан, скуп Y је пребројив, тј.

$$|Y| \leq \aleph_0.$$

Посматрајмо скуп

$$J = \{\alpha < \omega_1 : (\exists P \in Y)(\exists n < \omega) \text{ права } BP \text{ сече } CA \text{ у односу } 1 : u_\alpha v_n\}.$$

За фиксиране $P \in Y$ и $n < \omega$ постоји највише један индекс $\alpha < \omega_1$, јер су бројеви u_α међусобно различити. Зато је

$$|J| \leq \aleph_0.$$

Можемо, дакле, изабрати

$$\alpha_0 \in \omega_1 \setminus J.$$

Према избору α_0 , важи

$$Y \cap b_{\alpha_0, n} = \emptyset$$

за свако $n < \omega$. За свако $n < \omega$, нека је

$$b_{\alpha_0, n} \cap c_n = \{P_n\}.$$

Пошто је $P_n \in c_n$, а $X \cap c_n = \emptyset$, имамо

$$P_n \notin X.$$

Како је $P_n \in b_{\alpha_0, n}$, а права $b_{\alpha_0, n}$ пролази кроз B , из $P_n \notin X$ следи

$$P_n \notin \Omega_B.$$

Заиста, када би било $P_n \in \Omega_B$, имали бисмо

$$P_n \in b_{\alpha_0, n} \cap \Omega_B \subseteq K_{b_{\alpha_0, n}} \subseteq X,$$

што је контрадикција. Слично, пошто је $P_n \in b_{\alpha_0, n}$, а $Y \cap b_{\alpha_0, n} = \emptyset$, имамо

$$P_n \notin Y.$$

Како је $P_n \in c_n$, а права c_n пролази кроз C , из $P_n \notin Y$ следи

$$P_n \notin \Omega_C.$$

Заиста, када би било $P_n \in \Omega_C$, имали бисмо

$$P_n \in c_n \cap \Omega_C \subseteq K_{c_n} \subseteq Y,$$

што је контрадикција. Пошто је

$$\mathbb{R}^2 = \Omega_A \cup \Omega_B \cup \Omega_C,$$

а показали смо да

$$P_n \notin \Omega_B \quad \text{и} \quad P_n \notin \Omega_C,$$

мора важити

$$P_n \in \Omega_A$$

за свако $n < \omega$. Сада користимо Чевину теорему у троуглу ABC . Права BP_n сече дуж CA у односу

$$1 : u_{\alpha_0} v_n,$$

а права CP_n сече дуж AB у односу

$$t_0 v_n : 1.$$

По Чединој теореме, права AP_n сече дуж BC у односу

$$u_{\alpha_0} : t_0.$$

Овај однос не зависи од n . Зато све праве AP_n пролазе кроз исту тачку дужи BC , па су све тачке P_n колинеарне са тачком A . Са друге стране, тачке P_n су међусобно различите. Заиста, праве c_n су међусобно различите, јер су бројеви v_n међусобно различити. Ако би за $m \neq n$ важило $P_m = P_n$, онда би кроз две тачке C и P_n пролазиле две различите праве c_m и c_n , што је немогуће. Дакле, добили смо праву кроз A која садржи бесконачно много тачака

$$P_0, P_1, P_2, \dots$$

из облака Ω_A . То је контрадикција са тим да је Ω_A облак око A . Према томе, претпоставка

$$|\mathbb{R}| \geq \aleph_2$$

није могућа. Како је скуп реалних бројева непребројив, имамо

$$|\mathbb{R}| = \aleph_1.$$

Дакле важи хипотеза континуума. □

Литература

- [1] K. Hrbacek and T. Jech, *Introduction to Set Theory*, Third Edition, Revised and Expanded, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 220, Marcel Dekker, New York–Basel, 1999.
- [2] P. Komjáth and V. Totik, *Problems and Theorems in Classical Set Theory*, Problem Books in Mathematics, Springer Science+Business Media, New York, 2006.
- [3] M. Hils and F. Loeser, *A First Journey through Logic*, Student Mathematical Library 89, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2019.
- [4] З. Петровић и Ж. Мијајловић, *Математичка логика: елементи теорије скупова*, Математички факултет, Београд.
- [5] B. Bašić, *An unexpected connection between a prisoners-and-hats puzzle and set theory*, Novi Sad Conference in Set Theory and General Topology, Novi Sad, Serbia, August 20, 2024.
- [6] P. Erdős and P. Komjáth, *Countable Decompositions of R^2 and R^3* , Discrete & Computational Geometry 5, 325–331, 1990.
- [7] P. Komjáth, *Three clouds may cover the plane*, Annals of Pure and Applied Logic 109, 71–75, 2001.
- [8] M. H. Baker, *Uncountable Sets and an Infinite Real Number Game*, Mathematics Magazine 80, no. 5, 377–380, 2007.