

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Екстремална теорија скупова и ограничени пресеци

Ученик
Вук Ристић, IVд

Ментор
др Милош ЂОРИЋ

Београд, 28. мај 2026.

Садржај

1	Увод	1
2	Класични резултати екстремалне теорије скупова	3
2.1	Шпернерова теорема и „LYM” неједнакост	3
2.2	Ердеш–Ко–Радо теорема	5
2.3	Теорема о сунцокрету	7
3	Линеарно-алгебарске методе	9
3.1	Основне чињенице из линеарне алгебре	9
3.2	„Oddtown” проблем	10
3.3	Проблем са ученицима и групама	12
3.4	Неуниформна Фишера неједнакост	14
4	„Eventown” проблем	17
4.1	Ортогоналност и тотално изотропни потпростори	17
4.2	„Eventown”	19
5	Полиномијална метода	23
5.1	Мултилинеарни полиноми	24
5.2	Франкл–Вилсон теорема	24
5.3	Реј–Чодури–Вилсон теорема	27
6	Спољашњи производ и Болобашове теореме	29
6.1	k -линеарне антисиметричне функције	29
6.2	Спољашњи производ	31
6.3	Превођење скупова у спољашње производе	33
6.4	Болобашова теорема	34
7	Закључак	36
	Литература	37

1

Увод

Екстремална теорија скупова развијала се као део комбинаторике који проучава колико велике могу бити фамилије скупова ако се на њих наметну одређена ограничења. Иако су питања често формулисана врло једноставно, њихова решења су током времена довела до развоја веома различитих метода: од чисто комбинаторних аргумената, преко линеарне алгебре, до полиномијалних метода и спољашње алгебре.

Шпернерова теорема из 1928. године се сматра једним од почетних резултата екстремалне теорије скупова и показала је да се структура фамилија подскупова може прецизно ограничити ако се забрани појављивање одређених односа инклузије. Касније су Љубел, Јамамото и Мешалкин дали јачу форму овог резултата, познату као „LYM” неједнакост.

Средином двадесетог века пажња се све више усмеравала ка фамилијама скупова са ограниченим пресецима. Ердеш, Ко и Радо доказали су 1961. године један од најпознатијих резултата у овој области, који се бави униформним фамилијама чији се свака два члана секу. Ердеш и Радо су такође увели и теорему о сунцокрету. Ови резултати су важни јер су показали да велике комбинаторне структуре често морају имати унутрашњи ред.

Истовремено, слична питања појављивала су се и у другим областима математике, посебно у статистици. Р. А. Фишер је, проучавајући дизајн експеримената, дошао до неједнакости која је касније добила важну комбинаторну интерпретацију. Касније је Р. К. Бозе 1949. године објавио кратак, али веома утицајан рад у часопису *Annals of Mathematical Statistics*. У њему је препознао да се ФишEROVA идеја може посматрати шире, као резултат о фамилијама скупова чији су пресеци исте величине. Још важније, Бозеов доказ је увео такозвану *linear algebra bound* методу.

Основна идеја ове методе је да се комбинаторни објекти, као што су скупо-ви или фамилије скупова, представе векторима, матрицама или полиномима. Након тога се величина фамилије ограничава помоћу димензије неког векторског простора, ранга матрице или линеарне независности. Овај приступ је посебно важан зато што се сложени услови о пресецима скупова често могу превести у једноставне алгебарске услове.

Један од најпознатијих примера таквог приступа је „Oddtown” теорема, где се услови о парности преводе у скаларне производе над пољем $\mathbb{F}_2$. Сродан пример је „Eventown” проблем, у коме се појављују ортогоналност и тотално изотропни потпростори. У овим доказима суштина није у директном пребројавању, већ у томе да број скупова не може прећи димензију одговарајућег алгебарског објекта.

Даљи развој ове идеје довео је до полиномијалних метода. Реј-Чодури и Вилсон су 1975. године доказали важан резултат о униформним фамилијама са ограниченим величинама пресека. Неколико година касније, Франкл и Вилсон су развили сродне методе које су постале изузетно утицајне у комбинаторици.

Још једна важна техника, која се природно надовезује на линеарну алгебру, јесте спољашњи производ. Он омогућава доказе разних теорема. Уместо да се директно анализирају пресеци скупова, они се преводе у питање да ли је одређени спољашњи производ једнак нули или није.

2

Класични резултати екстремалне теорије скупова

2.1 Шпернерова теорема и „LYM” неједнакост

Фамилија скупова $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ назива се антиланац ако за свака два различита скупа $A, B \in \mathcal{F}$ не важи $A \subset B$. Другим речима, ниједан скуп из фамилије није подскуп неког другог скупа из исте фамилије.

Теорема 2.1 („LYM” неједнакост). Ако је $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ антиланац, тада важи

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1.$$

Доказ. Посматрајмо све пермутације елемената скупа $[n]$. Свака пермутација $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ одређује један максимални ланац подскупова:

$$\emptyset \subset \{i_1\} \subset \{i_1, i_2\} \subset \dots \subset [n].$$

Дакле, свака пермутација даје ланац у коме се у сваком кораку додаје по један нови елемент. За фиксиран скуп $A \subseteq [n]$, нека је $|A| = k$. Питамо се у колико пермутација се скуп A појављује као један члан одговарајућег максималног ланца. То значи да првих k елемената пермутације морају бити управо елементи скупа A , у неком редоследу, а преосталих $n - k$ елемената морају бити елементи скупа $[n] \setminus A$, такође у неком редоследу. Зато је број пермутација чији максимални ланац садржи скуп A једнак $k!(n - k)!$. Укупан број пермутација скупа $[n]$ јесте $n!$. Сада пребројавамо парове (A, π) , где је $A \in \mathcal{F}$, а π пермутација чији максимални ланац садржи скуп A . Са једне стране, за сваки скуп $A \in \mathcal{F}$ таквих пермутација има

$$|A|!(n - |A|)!.$$

Зато је укупан број таквих парова једнак $\sum_{A \in \mathcal{F}} |A|!(n - |A|)!$. Са друге стране, пошто је $\mathcal{F}$ антиланац, један максимални ланац може садржати највише један скуп из $\mathcal{F}$. Заиста, ако би садржао два различита скупа из $\mathcal{F}$, они би били упоредиви по инклузији, јер су сви скупови у ланцу поређани један у другом. То је немогуће по дефиницији антиланца. Пошто постоји укупно $n!$ пермутација, добијамо

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} |A|!(n - |A|)! \leq n!.$$

Дељењем са $n!$ добијамо

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{|A|!(n - |A|)!}{n!} \leq 1.$$

Али

$$\frac{|A|!(n - |A|)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{|A|}}.$$

Зато важи

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1.$$

□

Теорема 2.2 (Шпернерова теорема). Ако је $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ антиланац, тада важи

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Доказ. Из „LYM” неједнакости имамо

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1.$$

За сваки $A \subseteq [n]$ важи

$$\binom{n}{|A|} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \implies \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \geq \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}.$$

Зато је

$$1 \geq \sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \geq \sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} = \frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}.$$

Дакле,

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

□

Пример 1. Граница је достижна. Довољно је узети све подскупове скупа $[n]$ који имају тачно $\lfloor n/2 \rfloor$ елемената.

2.2 Ердеш–Ко–Радо теорема

Сада посматрамо униформне фамилије. Фамилија $\mathcal{F}$ назива се k -униформна ако сваки скуп из $\mathcal{F}$ има тачно k елемената.

Теорема 2.3 (Ердеш–Ко–Радо). Нека је $k \leq n/2$ и нека је $\mathcal{F}$ k -униформна фамилија подскупова скупа $[n]$. Ако за свака два скупа $A, B \in \mathcal{F}$ важи

$$A \cap B \neq \emptyset,$$

онда је

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

Доказ. Прво ћемо доказати помоћно тврђење.

Тврдња 2.1. Нека је $k \leq n/2$. У цикличном распореду елемената скупа $[n]$ највише k интервала дужине k могу бити међусобно пресецајући.

Доказ. Распоредимо елементе скупа $[n]$ на круг. Посматрајмо све интервале дужине k на том кругу, којих има тачно n . Заиста, означимо изабране интервале њиховим почетним тачкама на кругу. Ако један интервал почиње у некој тачки, он заузима k узастопних места. Ако изаберемо један интервал који је најлевљи у неком пресеченом луку, сви интервали који га секу морају почињати унутар највише k могућих почетних позиција. Зато их може бити највише k . □

Посматрајмо све цикличне распореде елемената скупа $[n]$. Због тврдње, у сваком распореду највише $\frac{k}{n}$ свих интервала дужине k може бити из фамилије $\mathcal{F}$. Сада посматрајмо све k -точлане подскупове скупа $[n]$. Њих има $\binom{n}{k}$. Због симетрије, сваки k -точлани скуп појављује се као интервал у истом броју цикличних распореда. Зато, када посматрамо све цикличне распореде заједно, највише $\frac{k}{n}$ од свих k -точланих скупова може припадати фамилији $\mathcal{F}$. Дакле,

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{k}{n} \binom{n}{k}.$$

Коначно,

$$\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Зато је

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

□

Пример 2. Граница је достижна. Фиксирајмо један елемент, на пример 1, и узмимо све k -точлане подскупове који садрже елемент 1. Свака два таква скупа имају заједнички елемент 1, а број таквих скупова је

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

2.3 Теорема о сунцокрету

Фамилија скупова $A_1, A_2, \dots, A_s$ назива се сунцокрет са s латица ако за свака два различита индекса $i \neq j$ важи

$$A_i \cap A_j = K,$$

где је K исти скуп за све парове. Скуп K назива се језгро сунцокрета. Ако је $K = \emptyset$, онда су скупови $A_1, \dots, A_s$ међусобно дисјунктни.

Теорема 2.4 (Теорема о сунцокрету). Ако је $\mathcal{F}$ k -униформна фамилија са више од

$$k!(s-1)^k$$

скупова, тада $\mathcal{F}$ садржи сунцокрет са s латица.

Доказ. Доказујемо индукцијом по k . За $k = 1$, фамилија је састављена од једночланих скупова. Ако има више од

$$1!(s-1)^1 = s-1$$

скупова, онда има бар s различитих једночланих скупова. Они су међусобно дисјунктни, па чине сунцокрет са s латица и празним језгром. Претпоставимо сада да тврђење важи за $(k-1)$ -униформне фамилије. Нека је $\mathcal{F}$ k -униформна фамилија и нека је

$$|\mathcal{F}| > k!(s-1)^k.$$

Изаберимо максималну подфамилију

$$\mathcal{T} = \{A_1, A_2, \dots, A_r\} \subseteq \mathcal{F}$$

чији су чланови међусобно дисјунктни. Максимална значи да у $\mathcal{F}$ не постоји још један скуп који је дисјунктан са свим скуповима из $\mathcal{T}$. Ако је

$$r \geq s,$$

онда $A_1, \dots, A_s$ чине сунцокрет са s латица и празним језгром. Зато можемо претпоставити да је

$$r < s.$$

Нека је

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r.$$

Пошто су скупови $A_1, \dots, A_r$ међусобно дисјунктни и сваки има k елемената, важи

$$|B| = kr < k(s-1).$$

Због максималности фамилије $\mathcal{T}$, сваки скуп из $\mathcal{F}$ мора имати непразан пресек са B . Заиста, ако би постојао скуп $F \in \mathcal{F}$ такав да је $F \cap B = \emptyset$, онда би F био дисјунктан са сваким скупом A_i , па бисмо могли додати F у $\mathcal{T}$, што је супротно максималности. Дакле, сваки скуп из $\mathcal{F}$ садржи бар један елемент из B . По Дирихлејевом принципу, постоји елемент $x \in B$ који се налази у најмање $\frac{|\mathcal{F}|}{|B|}$ скупова фамилије $\mathcal{F}$. Пошто је

$$|\mathcal{F}| > k!(s-1)^k$$

и

$$|B| < k(s-1),$$

добивамо

$$\frac{|\mathcal{F}|}{|B|} > \frac{k!(s-1)^k}{k(s-1)} = (k-1)!(s-1)^{k-1}.$$

Посматрајмо сада фамилију

$$\mathcal{F}(x) = \{F \setminus \{x\} : F \in \mathcal{F}, x \in F\}.$$

Сваки скуп у $\mathcal{F}(x)$ има $k-1$ елемената, па је $\mathcal{F}(x)$ $(k-1)$ -униформна фамилија. Такође,

$$|\mathcal{F}(x)| > (k-1)!(s-1)^{k-1}.$$

По индуктивној претпоставци, $\mathcal{F}(x)$ садржи сунцокрет са s латица. Нека су његови чланови

$$G_1, G_2, \dots, G_s.$$

Тада постоје скупови

$$F_1, F_2, \dots, F_s \in \mathcal{F}$$

такви да је

$$G_i = F_i \setminus \{x\}.$$

Пошто $G_1, \dots, G_s$ чине сунцокрет, постоји скуп K такав да за све $i \neq j$ важи

$$G_i \cap G_j = K.$$

Тада за одговарајуће скупове F_i важи

$$F_i \cap F_j = K \cup \{x\}.$$

Дакле, $F_1, F_2, \dots, F_s$ чине сунцокрет са s латица у фамилији $\mathcal{F}$.

□

3

Линеарно-алгебарске методе

3.1 Основне чињенице из линеарне алгебре

У доказима који следе користићемо неколико стандардних чињеница.

- 1) У векторском простору димензије n не може постојати више од n линеарно независних вектора. Другим речима, ако у простору димензије n имамо $n + 1$ вектора, они морају бити линеарно зависни.

- 2) Вектори $v_1, v_2, \dots, v_m$ су линеарно независни ако једначина

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$$

има само тривијално решење, односно ако из ове једнакости следи

$$\lambda_i = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

- 3) Ако је A матрица, ранг матрице A , у ознаци $\text{rank}(A)$, јесте димензија простора генерисаног њеним врстама, односно колона. Важи

$$\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$$

за сваку $m \times n$ матрицу.

- 4) За производ матрица важи

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A).$$

Посебно, ако је $A = MM^T$, тада је

$$\text{rank}(A) \leq \text{rank}(M).$$

- 5) Квадратна матрица A реда m је инвертибилна ако и само ако је

$$\det A \neq 0.$$

У том случају важи

$$\text{rank}(A) = m.$$

3.2 „Oddtown” проблем

Претпоставимо да у граду постоји више клубова грађана. Сваки клуб има непаран број чланова, а свака два различита клуба имају паран број заједничких чланова. Питање је колико највише скупова може имати фамилија $\mathcal{F}$, односно колико највеће може бити m .

Теорема 3.1 („Oddtown” теорема). Ако је $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ фамилија подскупова скупа $[n]$ таква да сваки скуп има непаран број елемената, а свака два различита скупа имају паран број заједничких елемената, тада важи

$$m \leq n.$$

Доказ. Нека је

$$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$$

фамилија подскупова скупа $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Услови проблема су:

$$|A_i| \equiv 1 \pmod{2} \quad i = 1, \dots, m$$

$$|A_i \cap A_j| \equiv 0 \pmod{2} \quad \forall i, j, \quad i \neq j.$$

Сваком скупу A_i придружимо његов карактеристичан вектор

$$v_i = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_2^n,$$

где је

$$x_k = \begin{cases} 1, & k \in A_i, \\ 0, & k \notin A_i. \end{cases}$$

Кључна веза између комбинаторике и линеарне алгебре јесте следећа:

$$v_i \cdot v_j \equiv |A_i \cap A_j| \pmod{2}.$$

Где је скаларни производ дефинисан као

$$v_i \cdot v_j = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Из услова да сваки скуп A_i има непаран број елемената добијамо

$$v_i \cdot v_i = 1.$$

Са друге стране, из услова да два различита скупа имају паран број заједничких елемената добијамо

$$v_i \cdot v_j = 0, \quad i \neq j.$$

Дакле,

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Сада ћемо показати да су вектори $v_1, v_2, \dots, v_m$ линеарно независни у простору $\mathbb{F}_2^n$. Претпоставимо да постоји линеарна комбинација

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F}_2.$$

Узмимо скаларни производ обе стране са неким фиксираним вектором v_k . Добијамо

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m) \cdot v_k = 0.$$

По линеарности скаларног производа:

$$\lambda_1 (v_1 \cdot v_k) + \lambda_2 (v_2 \cdot v_k) + \dots + \lambda_m (v_m \cdot v_k) = 0.$$

Међутим, због претходно добијене особине, сви производи $v_i \cdot v_k$ једнаки су нули осим када је $i = k$. Зато остаје само

$$\lambda_k (v_k \cdot v_k) = 0.$$

Како је

$$v_k \cdot v_k = 1,$$

добиамо

$$\lambda_k = 0.$$

Пошто је k био произвољан, следи да су сви коефицијенти једнаки нули:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0.$$

Дакле, вектори $v_1, v_2, \dots, v_m$ су линеарно независни. Али простор $\mathbb{F}_2^n$ има димензију n , па у њему не може постојати више од n линеарно независних вектора. Зато мора важити

$$m \leq n.$$

□

Пример 3. Посматрајмо фамилију $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$. Сваки скуп у овој фамилији има непаран број елемената, јер је $|\{i\}| = 1$. Са друге стране, свака два различита скупа су дисјунктна, па је

$$\{i\} \cap \{j\} = \emptyset$$

за $i \neq j$. Дакле,

$$|\{i\} \cap \{j\}| = 0,$$

што је паран број.

Зато ова фамилија задовољава услове „Oddtown” теореме и има тачно n скупова. Тиме се види да је граница из „Oddtown” теореме оштра.

3.3 Проблем са ученицима и групама

Следећи проблем показује да иста идеја може да се примени и у ситуацијама које на први поглед не изгледају као проблеми о фамилијама скупова.

Задатак 1. У школи има n ученика. Ученици одлазе у групама од бар два ученика. После $k > 1$ одлазака важи да је сваки пар ученика био заједно у групи тачно једном. Доказати да је

$$n \leq k.$$

Решење 1. За сваког ученика направићемо вектор који бележи у којим је групама учествовао. Нека је

$$v_i \in \mathbb{R}^k$$

вектор који одговара i -том ученику, при чему је j -та координата једнака 1 ако је тај ученик био у j -тој групи, а 0 иначе. Услов да су свака два ученика била заједно тачно једном значи да за $i \neq j$ важи

$$v_i \cdot v_j = 1.$$

Прво приметимо да је сваки ученик морао бити у бар две групе. Ако би неки ученик био у само једној групи, онда би сви остали ученици морали бити у тој истој групи са њим, јер сваки пар ученика мора бити заједно тачно једном. Тада би та група већ садржала све ученике, па ниједна друга група од бар два ученика не би могла постојати без понављања неког пара. То је немогуће јер је $k > 1$. Дакле,

$$v_i \cdot v_i \geq 2$$

за сваки i . Показаћемо да су вектори

$$v_1, \dots, v_n$$

линеарно независни у простору $\mathbb{R}^k$. Претпоставимо да постоји линеарна релација

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0.$$

Означимо

$$S = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Узмимо скаларни производ ове релације са v_j . Добијамо

$$\alpha_1(v_1 \cdot v_j) + \dots + \alpha_n(v_n \cdot v_j) = 0.$$

Пошто је $v_i \cdot v_j = 1$ за $i \neq j$, а $v_j \cdot v_j \geq 2$, добијамо

$$\sum_{i \neq j} \alpha_i + \alpha_j(v_j \cdot v_j) = 0.$$

Како је

$$\sum_{i \neq j} \alpha_i = S - \alpha_j,$$

следи

$$S - \alpha_j + \alpha_j(v_j \cdot v_j) = 0.$$

Дакле,

$$S + \alpha_j(v_j \cdot v_j - 1) = 0.$$

Означимо

$$d_j = v_j \cdot v_j - 1.$$

Тада је $d_j > 0$, па претходна једнакост постаје

$$S + \alpha_j d_j = 0,$$

односно

$$\alpha_j = -\frac{S}{d_j}.$$

Ако би било $S \neq 0$, онда сабирањем једнакости

$$\alpha_j = -\frac{S}{d_j}$$

по свим j добијамо

$$S = -S \sum_{j=1}^n \frac{1}{d_j}.$$

Ако је $S \neq 0$, дељењем са S добијамо

$$1 = -\sum_{j=1}^n \frac{1}{d_j},$$

што је немогуће јер је десна страна негативна. Зато мора бити

$$S = 0.$$

Онда из

$$S + \alpha_j d_j = 0$$

добијамо

$$\alpha_j = 0$$

за сваки j . Дакле, вектори $v_1, \dots, v_n$ су линеарно независни. Пошто се налазе у простору $\mathbb{R}^k$, који има димензију k , мора важити

$$n \leq k.$$

3.4 Неуниформна Фишера неједнакост

Посматрајмо фамилију подскупова $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ скупа $[n]$ са особином да за свака два различита скупа важи

$$|C_i \cap C_j| = \lambda, \quad 1 \leq \lambda < n.$$

Питање је колико највише скупова може имати оваква фамилија.

Теорема 3.2 (Неуниформна Фишера неједнакост). Ако за свака два различита скупа из фамилије $\mathcal{F}$ важи $|C_i \cap C_j| = \lambda$, онда важи:

$$m \leq n.$$

Доказ. Сваком скупу C_i придружимо његов карактеристични вектор $v_i \in \mathbb{R}^n$. Нека је

$$M = \begin{pmatrix} - \\ v_1 \\ - \\ v_2 \\ - \\ \vdots \\ - \\ v_m \\ - \end{pmatrix}$$

матрица чији су редови карактеристични вектори скупова. Посматрајмо матрицу

$$A = MM^T.$$

Елемент на позицији (i, j) једнак је скаларном производу вектора v_i и v_j , па важи

$$A_{ij} = v_i \cdot v_j = |C_i \cap C_j|.$$

Због услова задатка добијамо:

$$A_{ij} = \begin{cases} |C_i|, & i = j, \\ \lambda, & i \neq j. \end{cases}$$

Нека је $\gamma_i = |C_i| - \lambda$. Ако је $|C_i| = \lambda$, тада из услова $|C_i \cap C_j| = \lambda$ следи да је $C_i \subseteq C_j$ за сваки $j \neq i$. У том случају се проблем може посебно завршити једноставним пребројавањем. Зато у наставку можемо претпоставити да је $|C_i| > \lambda$ за сваки i , па је $\gamma_i > 0$.

Да бисмо завршили доказ, довољно је да покажемо да је матрица A инвертибилна, односно да је

$$\det A \neq 0.$$

Уместо директног рачунања детерминанте матрице A , посматрајмо проширену матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda + \gamma_1 & \lambda & \cdots & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda + \gamma_2 & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda + \gamma_m \end{pmatrix}.$$

Развијањем детерминанте по првој колони добијамо

$$\det B = \det A.$$

Сада од сваке врсте, осим прве, одузмимо λ пута прву врсту. Ова операција не мења детерминанту. Добијамо матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\lambda & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda & 0 & 0 & \cdots & \gamma_m \end{pmatrix}.$$

Затим, користећи дијагоналне елементе $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, поништавамо елементе $-\lambda$ у првој колони. За сваку врсту $i = 2, \dots, m+1$ додамо првој врсти одговарајући умножак те врсте, тако да се елементи испод првог елемента прве колоне уклоне. Ове операције такође не мењају детерминанту. Добија се горњетроугаона матрица чији су дијагонални елементи

$$1 + \lambda \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \cdots + \frac{1}{\gamma_m} \right), \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m.$$

Зато је

$$\det A = \det B = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m \left(1 + \lambda \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \cdots + \frac{1}{\gamma_m} \right) \right).$$

Пошто су

$$\lambda > 0 \quad \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m > 0,$$

сви фактори у овом производу су позитивни. Зато је

$$\det A > 0.$$

Дакле,

$$\det A \neq 0,$$

па је матрица A инвертибилна. Одатле следи

$$\operatorname{rank}(A) = m.$$

Пошто је

$$A = MM^T,$$

добивамо

$$m = \operatorname{rank}(A) \leq \operatorname{rank}(M).$$

Како матрица M има n колона, важи

$$\operatorname{rank}(M) \leq n.$$

Коначно,

$$m \leq n.$$

□

Пример 4. Један од најпознатијих примера у вези са Фишеровом неједнакошћу јесте Фаноова равна. Она има 7 тачака и 7 правих, при чему свака права садржи тачно 3 тачке, а сваке две праве се секу у тачно једној тачки. Праве можемо записати као скупове:

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{1, 4, 5\}, \quad \{1, 6, 7\},$$

$$\{2, 4, 6\}, \quad \{2, 5, 7\}, \quad \{3, 4, 7\}, \quad \{3, 5, 6\}.$$

Свака два од ових скупова имају пресек величине 1. Дакле, имамо фамилију од 7 скупова над скупом од 7 елемената. Зато је у овом примеру

$$m = n = 7,$$

па се види да једнакост у Фишеровој неједнакости заиста може да се достигне.

4

„Eventown” проблем

4.1 Ортогоналност и тотално изотропни потпростори

Нека је W векторски простор димензије n над неким пољем $\mathbb{F}$. Претпоставимо да је на W дата симетрична билинеарна форма

$$\beta : W \times W \rightarrow \mathbb{F}.$$

То значи да је β линеарна по обе променљиве и да за све $u, v \in W$ важи

$$\beta(u, v) = \beta(v, u).$$

За векторе $u, v \in W$ кажемо да су ортогонални ако је

$$\beta(u, v) = 0.$$

Ако је $U \leq W$ потпростор, његов ортогонални комплемент дефинишемо као

$$U^\perp = \{x \in W : \beta(x, u) = 0 \text{ за свако } u \in U\}.$$

Дакле, $U^\perp$ је скуп свих вектора из W који су ортогонални на сваки вектор из U . У даљем раду користићемо случај када је билинеарна форма недегенерисана. То значи да не постоји ненулти вектор који је ортогоналан на све векторе простора W . Другим речима,

$$W^\perp = \{0\}.$$

Тврдња 4.1. Нека је W векторски простор димензије n са недегенерисаном симетричном билинеарном формом. Ако је $U \leq W$, тада важи

$$\dim U + \dim U^\perp = n.$$

Доказ. Нека је

$$u_1, \dots, u_k$$

база потпростора U . Тада је

$$\dim U = k.$$

Вектор $x \in W$ припада простору $U^\perp$ ако и само ако је ортогоналан на све векторе из U . Довољно је проверити ортогоналност на базним векторима, па услов $x \in U^\perp$ постаје систем једначина:

$$\beta(x, u_1) = 0,$$

$$\beta(x, u_2) = 0,$$

$$\vdots$$

$$\beta(x, u_k) = 0.$$

Дакле, $U^\perp$ је простор решења хомогеног система од k линеарних једначина у простору димензије n . Показаћемо да су ове једначине линеарно независне. Претпоставимо да постоји линеарна комбинација ових једначина која је једнака нули, тј. да постоје скалари

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k$$

такви да за свако $x \in W$ важи

$$\lambda_1 \beta(x, u_1) + \lambda_2 \beta(x, u_2) + \dots + \lambda_k \beta(x, u_k) = 0.$$

Због линеарности форме β по другој променљивој, ово можемо записати као

$$\beta(x, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k) = 0$$

за свако $x \in W$. Означимо

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k.$$

Тада важи

$$\beta(x, u) = 0$$

за свако $x \in W$. Пошто је форма недегенерисана, следи

$$u = 0.$$

Али $u_1, \dots, u_k$ су линеарно независни, па мора бити

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Дакле, једначине су линеарно независне. Зато систем има ранг k , па је димензија простора решења једнака

$$n - k.$$

Односно,

$$\dim U^\perp = n - \dim U.$$

Дакле,

$$\dim U + \dim U^\perp = n.$$

□

Сада уводимо појам који ће бити кључан за следећи доказ.

Дефиниција 4.1. Потпростор $U \leq W$ назива се тотално изотропан ако је сваки вектор из U ортогоналан на сваки вектор из U . Другим речима,

$$\beta(u, v) = 0 \quad \text{за све } u, v \in U.$$

Услов да је U тотално изотропан еквивалентан је инклузији

$$U \subseteq U^\perp.$$

У простору $\mathbb{F}_2^n$ користићемо стандардну билинеарну форму

$$\beta(u, v) = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n \pmod{2}$$

4.2 „Eventown”

Сада посматрамо проблем сличан „Oddtown” проблему, али са другачијим условима. Нека је

$$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$$

фамилија подскупова скупа $[n]$. Кажемо да фамилија $\mathcal{F}$ задовољава „Eventown” услове ако за све i, j важи

$$|A_i \cap A_j| \equiv 0 \pmod{2}.$$

Посебно, за $i = j$ добијамо

$$|A_i| \equiv 0 \pmod{2},$$

па сваки скуп из фамилије има паран број елемената.

Теорема 4.1 („Eventown” теорема). Ако је $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ фамилија под-скупова скупа $[n]$ таква да за све i, j важи

$$|A_i \cap A_j| \equiv 0 \pmod{2},$$

онда важи

$$m \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Доказ. Сваком скупу A_i придружујемо његов карактеристични вектор

$$v_i \in \mathbb{F}_2^n.$$

Као и раније, за карактеристичне векторе важи

$$v_i \cdot v_j \equiv |A_i \cap A_j| \pmod{2}.$$

Због „Eventown” услова добијамо

$$v_i \cdot v_j = 0, \quad \forall i, j.$$

Нека је $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ и нека је $U = \text{span}(S)$. Пошто је сваки вектор из S ортогоналан на сваки вектор из S , из линеарности скаларног производа следи да је сваки вектор из U ортогоналан на сваки вектор из U . Дакле, U је тотално изотропан потпростор. Пошто је U тотално изотропан, важи

$$U \subseteq U^\perp.$$

Зато је

$$\dim U \leq \dim U^\perp.$$

Са друге стране, из претходно доказане формуле за ортогонални комплемент имамо

$$\dim U + \dim U^\perp = n.$$

Зато добијамо

$$2 \dim U \leq n,$$

односно

$$\dim U \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Пошто је

$$S \subseteq U,$$

имамо

$$m = |S| \leq |U|.$$

Дакле,

$$m \leq |U| = 2^{\dim U} \leq 2^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

□

Једна природна конструкција која достиже ову границу добија се када је n паран. Посматрајмо парове елемената

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{n-1, n\}.$$

Узмимо све скупове који су уније неких од ових парова. Другим речима, за сваки избор парова узимамо скуп који садржи оба елемента из сваког изабраног пара. Тада сваки такав скуп има паран број елемената, а пресек свака два таква скупа опет је унија неких парова, па има паран број елемената. Дакле, добијамо „Eventown” фамилију. Пошто постоји $n/2$ парова, а сваки пар можемо или изабрати или не, број скупова у овој фамилији једнак је

$$2^{n/2}.$$

То показује да је граница из „Eventown” теореме за парно n достижна. Ако је n непаран, исти поступак примењујемо на првих $n-1$ елемената, док последњи елемент не користимо, па добијамо $2^{(n-1)/2} = 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ скупова. Занимљиво је да се заправо свака „Eventown” фамилија може проширити до максималне.

Теорема 4.2. Сваки максималан тотално изотропан потпростор простора $\mathbb{F}_2^n$ има димензију

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Доказ. Нека је U тотално изотропан потпростор простора $\mathbb{F}_2^n$, то јест

$$U \subseteq U^\perp.$$

Претпоставимо да је

$$\dim U \leq \frac{n-2}{2}.$$

Тада је

$$\dim U^\perp \geq \frac{n+2}{2},$$

па имамо

$$\dim(U^\perp) - \dim(U) \geq 2.$$

Зато можемо изабрати векторе $u, v \in U^\perp$, тако да ниједна нетривијална линеарна комбинација вектора u и v не припада простору U .

Ако је неки од вектора u, v или $u+v$ изотропан, тада смо завршили, јер бисмо тај вектор могли додати простору U и добити већи тотално изотропан потпростор.

Претпоставимо зато да ниједан од вектора $u, v, u+v$ није изотропан. Пошто радимо над пољем $\mathbb{F}_2$, то значи да важи

$$u \cdot u = 1, \quad v \cdot v = 1.$$

Посматрамо сада вектор $u + v$. Имамо:

$$(u + v) \cdot (u + v) = u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v.$$

Над пољем $\mathbb{F}_2$ важи

$$u \cdot v + v \cdot u = 2u \cdot v = 0,$$

па зато

$$(u + v) \cdot (u + v) = 1 + 1 = 0.$$

Дакле, $u + v$ је изотропан вектор који не припада простору U .

Тада је

$$\text{span}(U, u + v)$$

тотално изотропан потпростор који правилно садржи U . То значи да U није максималан. Према томе, ако је U максималан, мора важити

$$\dim U = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

□

Последица 1. Свака „Eventown” фамилија може се допунити до максималне.

Доказ. Нека је U линеарни омотач карактеристичних вектора скупова из дате фамилије. Као у доказу теореме, U је тотално изотропан потпростор простора $\mathbb{F}_2^n$. Ако U није максималан, проширимо га до максималног тотално изотропног потпростора U' . Свим векторима из U' придружимо одговарајуће подскупове скупа $[n]$. Пошто је U' тотално изотропан, пресеци свака два добијена скупа имају паран број елемената. Тако добијамо већу, односно максималну, „Eventown” фамилију која садржи почетну. □

5

Полиномијална метода

У претходним поглављима посматрали смо фамилије скупова са различитим ограничењима на пресеке. Са друге стране, у многим проблемима дозвољено је више различитих величина пресека. То води до појма L -пресецајућих фамилија. Нека је

$$L = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_s\}$$

скуп ненегативних целих бројева. Кажемо да је фамилија $\mathcal{F}$ L -пресецајућа ако за свака два различита скупа $A, B \in \mathcal{F}$ важи

$$|A \cap B| \in L.$$

Теорема 5.1 (Реј–Чодури–Вилсон). Нека је $L = \{\ell_1, \dots, \ell_s\}$ и нека је $\mathcal{F}$ k -униформна L -пресецајућа фамилија подскупова скупа $[n]$. Тада важи

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{s}.$$

Касније су Франкл и Вилсон показали знатно општији резултат у коме униформност више није потребна.

Теорема 5.2 (Франкл–Вилсон). Нека је

$$L = \{\ell_1, \dots, \ell_s\}$$

и нека је $\mathcal{F}$ L -пресецајућа фамилија подскупова скупа $[n]$. Тада важи

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \dots + \binom{n}{0}.$$

У наставку ћемо доказати обе теореме истовремено. Доказ Реј–Чодури–Вилсон теореме добиће се као мало појачање идеје коришћене у доказу Франкл–Вилсон теореме.

5.1 Мултилинеарни полиноми

Нека је

$$\Omega = \{0, 1\}^n.$$

Полином називамо мултилинеарним ако се у сваком моному свака променљива појављује највише на први степен.

Теорема 5.3 (Мултилинеаризација). Нека је f полином степена највише s у променљивама

$$x_1, \dots, x_n.$$

Тада постоји мултилинеарни полином $\tilde{f}$ степена највише s такав да за сваки

$$x \in \Omega$$

важи

$$f(x) = \tilde{f}(x).$$

Доказ. На скупу Ω свака координата задовољава

$$x_i^2 = x_i.$$

Зато се у сваком моному сваки степен x_i^t може заменити са x_i . Понављањем овог поступка добијамо мултилинеарни полином који има исте вредности као почетни полином на свим тачкама скупа Ω . $\square$

Сада ћемо прећи на доказ Франкл–Вилсон теореме.

5.2 Франкл–Вилсон теорема

Теорема 5.4 (Франкл–Вилсон). Нека је $L = \{\ell_1, \dots, \ell_s\}$ и нека је $\mathcal{F}$ L -пресецајућа фамилија подскупова скупа $[n]$. Тада важи

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} + \dots + \binom{n}{0}.$$

Доказ. Нека је

$$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}.$$

Сваком скупу A_i придружимо његов карактеристични вектор

$$v_i \in \{0, 1\}^n.$$

Подсетимо да за карактеристичне векторе важи

$$v_i \cdot v_j = |A_i \cap A_j|.$$

За сваки индекс i дефинишемо полином

$$f_i(x) = \prod_{\ell_t < |A_i|} (v_i \cdot x - \ell_t).$$

Овде производ иде преко свих бројева из скупа L који су строго мањи од $|A_i|$. Пошто скуп L има s елемената, сваки полином f_i има степен највише s . Посматрајмо сада вредности ових полинома на карактеристичним векторима v_j . Ако је

$$j < i,$$

онда због услова L -пресецајуће фамилије имамо

$$|A_i \cap A_j| \in L.$$

Дакле, један фактор у производу постаје нула, па је

$$f_i(v_j) = 0.$$

Са друге стране,

$$f_i(v_i) = \prod_{\ell_t < |A_i|} (|A_i| - \ell_t).$$

Ниједан фактор није једнак нули, па важи

$$f_i(v_i) \neq 0.$$

Дакле,

$$f_i(v_j) = \begin{cases} \neq 0, & j = i, \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

Сада мултилинеаризујемо све полиноме f_i . Добијамо мултилинеарне полиноме $\tilde{f}_i$ истог степена, при чему остају исте вредности на свим карактеристичним векторима. Показаћемо да су полиноми $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m$ линеарно независни. Претпоставимо да постоји релација

$$\lambda_1 \tilde{f}_1 + \dots + \lambda_m \tilde{f}_m = 0.$$

Нека је t најмањи индекс за који је

$$\lambda_t \neq 0.$$

Уврстимо сада

$$x = v_t.$$

Тада сви чланови са индексом већим од t нестају због особине

$$\tilde{f}_i(v_t) = 0 \quad (t < i),$$

па остаје

$$\lambda_t \tilde{f}_t(v_t) = 0.$$

Али

$$\tilde{f}_t(v_t) \neq 0,$$

па следи

$$\lambda_t = 0,$$

што је контрадикција. Дакле, полиноми $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m$ су линеарно независни. Сада користимо чињеницу да простор свих мултилинеарних полинома степена највише s има димензију

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{s}.$$

Заиста, база овог простора састоји се од свих монома облика

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_t}, \quad t \leq s.$$

Број таквих монома једнак је управо

$$\sum_{t=0}^s \binom{n}{t}.$$

Пошто имамо m линеарно независних полинома у простору ове димензије, добијамо

$$m \leq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{s}.$$

□

5.3 Реј–Чодури–Вилсон теорема

Теорема 5.5 (Реј–Чодури–Вилсон). Нека је $L = \{\ell_1, \dots, \ell_s\}$ и нека је $\mathcal{F}$ k -униформна L -пресецајућа фамилија подскупова скупа $[n]$. Тада важи

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{s}.$$

Доказ. Настављамо слично као и у предходном делу. Претпоставимо сада додатно да је фамилија $\mathcal{F}$ k -униформна. Тада за сваки скуп важи

$$|A_i| = k.$$

У том случају сви полиноми имају облик

$$f_i(x) = \prod_{t=1}^s (v_i \cdot x - \ell_t).$$

Дакле,

$$f_i(v_j) = \begin{cases} \neq 0, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Сада ћемо појачати претходни аргумент. За сваки подскуп $I \subseteq [n]$ дефинишемо моном

$$x_I = \prod_{i \in I} x_i.$$

Овај запис је користан зато што моном x_I проверава да ли дати скуп садржи све елементе скупа I . Наиме, ако је $J \subseteq [n]$, онда је

$$x_I(v_J) = \begin{cases} 1, & I \subseteq J, \\ 0, & I \not\subseteq J. \end{cases}$$

Посматрајмо сада функције

$$x_I \left(\sum_{j=1}^n x_j - k \right), \quad |I| \leq s-1.$$

Тврдимо да су све ове функције заједно са полиномима $f_1, \dots, f_m$ линеарно независне. Претпоставимо супротно:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i + \sum_{|I| \leq s-1} \mu_I x_I \left(\sum_{j=1}^n x_j - k \right) = 0.$$

Уврстимо

$$x = v_t.$$

Пошто је фамилија k -униформна,

$$\sum_{j=1}^n (v_t)_j = k,$$

па сви чланови из друге суме нестају. Као и раније, из прве суме остаје само члан

$$\lambda_t f_t(v_t),$$

па добијамо

$$\lambda_t = 0.$$

Дакле сви коефицијенти λ_i морају бити нула. Тада остаје релација само међу функцијама

$$x_I \left(\sum x_j - k \right).$$

Њихова линеарна независност следи из тога што се, после развијања, у сваком изразу појављује моном степена $|I|+1$, а највиши степени се не могу међусобно поништити на начин који би дао нулту функцију. Зато су и сви μ_I једнаки нули. Дакле, укупан број линеарно независних функција једнак је

$$m + \sum_{t=0}^{s-1} \binom{n}{t}.$$

Све ове функције представљене су полиномима степена највише s , па припадају простору димензије

$$\sum_{t=0}^s \binom{n}{t}.$$

Зато мора важити

$$m + \sum_{t=0}^{s-1} \binom{n}{t} \leq \sum_{t=0}^s \binom{n}{t}.$$

Одузимањем добијамо

$$m \leq \binom{n}{s}.$$

□

6

Спољашњи производ и Болобашове теореме

6.1 k -линеарне антисиметричне функције

Нека су W, T векторски простори над пољем $\mathbb{R}$. Посматрајмо функцију

$$f : W^k \rightarrow T.$$

Кажемо да је функција f k -линеарна ако је линеарна по свакој променљивој посебно. Другим речима, за сваки индекс $i \in \{1, \dots, k\}$, за све векторе $u, v, w_1, \dots, w_k \in W$ и за све скаларе $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, важи

$$\begin{aligned} & f(w_1, \dots, w_{i-1}, \lambda u + \mu v, w_{i+1}, \dots, w_k) \\ &= \lambda f(w_1, \dots, w_{i-1}, u, w_{i+1}, \dots, w_k) + \mu f(w_1, \dots, w_{i-1}, v, w_{i+1}, \dots, w_k). \end{aligned}$$

Кажемо да је k -линеарна функција f антисиметрична ако је њена вредност једнака нули сваки пут када се међу аргументима појаве два једнака вектора. Прецизније,

$$w_i = w_j, \quad i \neq j \quad \implies \quad f(w_1, \dots, w_k) = 0.$$

Из ове особине следи да замена места два аргумента мења знак функције:

$$f(\dots, w_i, \dots, w_j, \dots) = -f(\dots, w_j, \dots, w_i, \dots).$$

Зато се овакве функције називају антисиметричне. Једна важна последица антисиметричне особине јесте следећа.

Тврдња 6.1. Ако су вектори $w_1, \dots, w_k$ линеарно зависни, онда за сваку антисиметричну k -линеарну функцију f важи

$$f(w_1, \dots, w_k) = 0.$$

Доказ. Пошто су вектори линеарно зависни, један од њих може се изразити као линеарна комбинација осталих. Без губитка општости, нека је

$$w_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j w_j.$$

Због линеарности функције f по i -тој променљивој, добијамо

$$f(w_1, \dots, w_i, \dots, w_k) = \sum_{j \neq i} \lambda_j f(w_1, \dots, w_j, \dots, w_k),$$

где се у сваком члану суме вектор w_j појављује два пута: једном на свом старом месту, а једном на i -том месту. Пошто је f антисиметрична, сваки такав члан једнак је нули. Зато је

$$f(w_1, \dots, w_k) = 0.$$

□

Најважнији пример антисиметричне мултилинеарне функције јесте детерминанта. Нека су $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n$. Тада можемо посматрати функцију

$$f(w_1, \dots, w_n) = \det \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Позната особина детерминанте сада постаје специјалан случај претходног тврђења: ако су вектори $w_1, \dots, w_n$ линеарно зависни, онда је

$$\det(w_1, \dots, w_n) = 0.$$

Обрнуто, ако су $w_1, \dots, w_n$ линеарно независни у простору $\mathbb{R}^n$, онда је

$$\det(w_1, \dots, w_n) \neq 0.$$

6.2 Спољашњи производ

Мотивација за увођење спољашњег производа долази управо из претходне везе између детерминанте и линеарне независности. Детерминанта нам омогућава да за n вектора у простору $\mathbb{R}^n$ проверимо да ли су линеарно независни. Међутим, у наредним доказима често ћемо имати k вектора, где k не мора бити једнако димензији простора. Зато уводимо објекат који се понаша као детерминанта за произвољан број вектора. Нека је W векторски простор димензије n . За сваки k , где је $0 \leq k \leq n$, постоји векторски простор

$$\bigwedge^k W,$$

који називамо k -ти спољашњи степен простора W . Спољашњи производ k вектора $w_1, \dots, w_k \in W$ означавамо са

$$w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k.$$

Овај производ је елемент простора $\bigwedge^k W$. Најважније је да пресликавање

$$(w_1, \dots, w_k) \mapsto w_1 \wedge \dots \wedge w_k$$

јесте антисиметрична k -линеарна функција. То значи да важе следеће особине:

1. Спољашњи производ је линеаран по сваком аргументу. На пример:

$$w_1 \wedge \dots \wedge (\lambda u + \mu v) \wedge \dots \wedge w_k = \lambda(w_1 \wedge \dots \wedge u \wedge \dots \wedge w_k) + \mu(w_1 \wedge \dots \wedge v \wedge \dots \wedge w_k).$$

2. Ако се међу векторима појаве два једнака вектора, спољашњи производ је једнак нули:

$$w_i = w_j, \quad i \neq j \quad \implies \quad w_1 \wedge \dots \wedge w_k = 0.$$

3. Замена места два вектора мења знак:

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_i \wedge \dots \wedge w_j \wedge \dots \wedge w_k = -w_1 \wedge \dots \wedge w_j \wedge \dots \wedge w_i \wedge \dots \wedge w_k.$$

Као и код детерминанте, најважнија последица је веза са линеарном независношћу:

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_k \neq 0$$

ако и само ако су вектори $w_1, \dots, w_k$ линеарно независни. Ако су вектори линеарно зависни, ова чињеница следи директно из претходне особине антисиметричних k -линеарних функција. Обрнути смер је део основне конструкције спољашњег производа: спољашњи производ линеарно независних вектора представља ненулти елемент простора $\bigwedge^k W$.

У случају $k = n$, спољашњи производ је директно повезан са детерминантом. Ако је

$$W = \mathbb{R}^n$$

и ако су $w_1, \dots, w_n \in W$, тада се $w_1 \wedge \dots \wedge w_n$ може поистоветити са детерминантом матрице чији су редови ти вектори. Зато спољашњи производ можемо схватити као уопштење детерминанте на произвољан број вектора. Сада ћемо описати димензију простора $\bigwedge^k W$, јер ће управо она дати горње границе у наредним теоремама. Нека је

$$e_1, \dots, e_n$$

база простора W . Тада базу простора $\bigwedge^k W$ чине сви вектори облика

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k},$$

где је

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n.$$

Другим речима, бирамо k различитих базних вектора од укупно n . Зато је

$$\dim \bigwedge^k W = \binom{n}{k}.$$

Ова формула је кључна: ако успемо да покажемо да се у простору $\bigwedge^k W$ налази m линеарно независних вектора, тада аутоматски следи

$$m \leq \binom{n}{k}.$$

6.3 Превођење скупова у спољашње производе

Сада објашњавамо како се претходна теорија користи за скупове. Нека је X коначан скуп и нека сваком елементу $x \in X$ придружимо вектор

$$w_x \in \mathbb{R}^{r+s}.$$

Претпостављамо да су ови вектори у општем положају, што значи да је сваких $r + s$ међу њима линеарно независно. Ако је

$$A = \{a_1, \dots, a_r\} \subseteq X,$$

дефинишемо

$$w_A = w_{a_1} \wedge w_{a_2} \wedge \dots \wedge w_{a_r}.$$

Дакле, сваком r -елементном скупу придружујемо један вектор у простору

$$\bigwedge^r \mathbb{R}^{r+s}.$$

Ако су

$$|A| = r, \quad |B| = s,$$

онда посматрамо производ

$$w_A \wedge w_B.$$

Ако је

$$A \cap B \neq \emptyset,$$

онда се неки елемент x налази и у A и у B . Због тога се вектор w_x појављује два пута у спољашњем производу, па је

$$w_A \wedge w_B = 0.$$

Са друге стране, ако је

$$A \cap B = \emptyset,$$

онда се у производу

$$w_A \wedge w_B$$

појављује укупно $r + s$ различитих вектора. Пошто су вектори w_x у општем положају, тих $r + s$ вектора су линеарно независни. Зато је

$$w_A \wedge w_B \neq 0.$$

Дакле, добијамо основно правило:

$$w_A \wedge w_B \begin{cases} \neq 0, & A \cap B = \emptyset, \\ = 0, & A \cap B \neq \emptyset. \end{cases}$$

Ово правило је срж методе. Услов о томе да се два скупа секу или не секу преводимо у услов о томе да ли је одговарајући спољашњи производ једнак нули.

6.4 Болобашова теорема

Теорема 6.1 (Болобашова теорема). Нека су $A_1, \dots, A_m$ скупови са r елемената и нека су $B_1, \dots, B_m$ скупови са s елемената. Претпоставимо да важи:

1)

$$A_i \cap B_i = \emptyset, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

2)

$$A_i \cap B_j \neq \emptyset, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, m\}, \quad i < j.$$

Тада важи

$$m \leq \binom{r+s}{r}.$$

Доказ. Нека је X коначан скуп који садржи све елементе свих скупова A_i и B_i . Сваком елементу $x \in X$ придружимо вектор

$$w_x \in \mathbb{R}^{r+s}$$

тако да су сваких $r + s$ ових вектора линеарно независни. За сваки скуп A_i дефинишемо

$$w_{A_i} = \bigwedge_{x \in A_i} w_x.$$

Пошто сваки A_i има r елемената, сви вектори w_{A_i} припадају простору

$$\bigwedge^r \mathbb{R}^{r+s}.$$

Димензија овог простора је

$$\binom{r+s}{r}.$$

Показаћемо да су вектори $w_{A_1}, w_{A_2}, \dots, w_{A_m}$ линеарно независни. Тада ће одмах следити

$$m \leq \dim \bigwedge^r \mathbb{R}^{r+s} = \binom{r+s}{r}.$$

Претпоставимо да постоји линеарна релација

$$\lambda_1 w_{A_1} + \lambda_2 w_{A_2} + \dots + \lambda_m w_{A_m} = 0.$$

Нека је t највећи индекс за који је

$$\lambda_t \neq 0.$$

Помножимо целу релацију спољашњим производом са w_{B_t} . Добијамо

$$\lambda_1 w_{A_1} \wedge w_{B_t} + \dots + \lambda_t w_{A_t} \wedge w_{B_t} = 0.$$

За сваки индекс $i < t$ важи

$$A_i \cap B_t \neq \emptyset,$$

јер је $i < t$. Зато је

$$w_{A_i} \wedge w_{B_t} = 0.$$

Са друге стране, по услову теореме важи

$$A_t \cap B_t = \emptyset.$$

Зато је

$$w_{A_t} \wedge w_{B_t} \neq 0.$$

Дакле, претходна релација се своди на

$$\lambda_t w_{A_t} \wedge w_{B_t} = 0.$$

Пошто је

$$w_{A_t} \wedge w_{B_t} \neq 0,$$

добивамо

$$\lambda_t = 0,$$

што је контрадикција са избором индекса t . Зато су вектори

$$w_{A_1}, \dots, w_{A_m}$$

линеарно независни. Како припадају простору димензије

$$\binom{r+s}{r},$$

следи

$$m \leq \binom{r+s}{r}.$$

□

7

Закључак

У овом раду приказали смо како се проблеми екстремалне теорије скупова могу посматрати кроз различите методе комбинаторике и линеарне алгебре. Први део рада показује снагу класичних комбинаторних аргумената, као што су пребројавање, пермутације и индукција, који се јављају у доказима Шпернерове теореме, Ердеш–Ко–Радо теореме и теореме о сунцокрету. Након тога видели смо да се многи проблеми о ограниченим пресецима могу природно превести у језик алгебре.

Кроз наведене примере види се да се комбинаторни проблеми, иако често формулисани једноставним језиком скупова и њихових пресека, могу решавати различитим методама: директним комбинаторним доказима, али и помоћу алгебарских структура. Управо та веза између скупова, вектора, матрица, полинома и спољашњих производа чини линеарну алгебру једним од најважнијих алата у савременој екстремалној комбинаторици.

Литература

- 1) L. Babai, P. Frankl, *Linear Algebra Methods in Combinatorics*, The University of Chicago, 1992.
- 2) B. Bollobás, *Combinatorics: Set Systems, Hypergraphs, Families of Vectors and Combinatorial Probability*.
- 3) L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises*.
- 4) J. H. van Lint, R. M. Wilson, *A Course in Combinatorics*.
- 5) E. Sperner, *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge*, Math. Z. **27** (1928), 544–548.
- 6) D. Lubell, *A short proof of Sperner's lemma*, J. Combin. Theory **1** (1966), 299.
- 7) P. Erdős, C. Ko, R. Rado, *Intersection theorems for systems of finite sets*, Quart. J. Math. Oxford Ser. **12** (1961), 313–320.
- 8) R. C. Bose, *A note on Fisher's inequality for balanced incomplete block designs*, Ann. Math. Statist. **20** (1949), 619–620.
- 9) D. K. Ray-Chaudhuri, R. M. Wilson, *On t -designs*, Osaka J. Math. **12** (1975), 737–744.
- 10) P. Frankl, R. M. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica **1** (1981), 357–368.
- 11) N. Alon, L. Babai, H. Suzuki, *Multilinear polynomials and Frankl–Ray–Chaudhuri–Wilson type intersection theorems*, J. Combin. Theory Ser. A **58** (1991), 165–180.
- 12) P. Frankl, V. Rödl, *Forbidden intersections*, Trans. Amer. Math. Soc. **300** (1987), 259–286.