

Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
-из примењене физике-

Квантно плетенично рачунарство

Ученик:

Вукан Јанковић IVe

Ментор:

др Александра Гочанин

Београд, мај 2022.

Сиже

Тополошко квантно рачунарство се већ пар деценија развија као један од метода конструисања функционалних квантних рачунара. Теорија на којој се ова идеја заснива бави се изучавањем ениона, квазичестица чија мерена вредност зависи од облика њихове путање. Њихова светска линија кроз $2 + 1$ димензију има тополошку структуру плетенице која у квантним протоколима омогућава смањење декохеренције, јер су алгоритми конструисани од тополошких квазичестица имуни, то јест 'потпуно глуви' на декохеренцију. Сматра се да су ениони добар кандидат за квантно рачунање и остваривање квантне надмоћи управо због те специфичне топологије кретања. Овај рад уводи групе плетеница и њихове репрезентације, као и основне појмове и алгоритме квантног рачунарства. На крају се ове две области сједињују у саму тему овог рада где се описује модерна теорија овог младог, неистраженог поља науке.

Кључне речи: енион, група плетеница, квантни алгоритми, декохеренција

Abstract

Topological quantum computing has been in development for the past few decades as one of the methods for constructing a functional quantum computer. The base theory which covers the foundations of this idea is concerned with the study of anyons, quasiparticles whose measurable qualities depend upon their trajectory. The world line of anyons through $2 + 1$ dimensions possesses the topological structure of a braid, which in quantum protocols enables drastic reductions in quantum decoherence, because quantum algorithms that operate on topological quasiparticles are immune, even 'deaf' to decoherence. It is believed that anyons have a fighting chance at being a decent candidate for constructing functional, low leakage, quantum computers and reaching quantum supremacy. This paper introduces the main concepts and principles of braid groups and their representations, and also defines quantum computation and quantum algorithms. In the final chapter these two sections combine into the main theme of this paper, describing the modern theory of this uncharted, brand new field.

Key words: anyon, braid group, quantum algorithm, decoherence

Садржај

1	Увод	1
2	Теорија плетеница	2
2.1	Група плетеница и њене особине	2
2.2	Везе, чворови и затварање плетеница	4
2.3	Матричне репрезентације	5
2.4	Темперли-Либ алгебра	6
2.5	Плетенични полиноми	7
3	Квантно рачунарство	8
3.1	Кубити и њихове особине	8
3.2	Квантни оператори	9
3.3	Квантна логичка кола	11
3.4	Квантни алгоритми	12
3.5	Квантна фаза и ениони	13
4	Квантно плетенично рачунарство	14
4.1	Физичка имплементација	14
4.2	Фузија честица	15
4.3	Модел ениона	16
5	Закључак	17
	Литература	18

1 Увод

Појам плетеница увео је Емил Артин¹ у Немачкој почетком треће деценије XX века као чисто геометријске фигуре. У свом раду "Theorie der Zöpfe" ("Теорија Плетеница") 1947. доказао је да плетенице имају и алгебарске експлицитне презентације, што Артина чини оснивачем алгебарске теорије плетеница. Постоје разне интерпретације група плетеница, овај рад се бави Артиновим групама плетеница, дефинисаних у одељку 2.1. В. Бурау² је мало пре Артинове опште дефиниције плетеница, прецизније 1930, увео своје две, редуковану и нередуквану, матричну репрезентације плетеница (одељак 2.3). Тек 39 година касније Џон Конвеј је, већ познат, Александров чворни полином представио преко клупчаних релација и тиме је основао нову врсту репрезентација плетеница - полиномску (одељак 2.5). Додуше, интерес за истраживањем плетеничних полинома се није распленио све до 1983. године, када је В. Џоунс дефинисао, по њему званом, Џоунсов полином. Почетком 21. века, осам научника генерализовало је Александар-Конвејев и Џоунсов полином, створивши HOMFLYPT полином, назван као акроним презимена тих научника. Касел и Турајев су 2008. године објединили све најважније теореме и појмове теорије плетеница у књигу "Групе плетеница" [2].

Упоред истраживању плетеничних полинома почела је да се развија идеја о квантном рачунарству. Године 1981. Ричард Фајнман³ у свом раду "Simulating Physics with Computers" први разматра могућност постојања квантних рачунара, као и проблеме које би такав рачунар могао да реши, а класичан рачунар не би. Убрзо, научници су креирали разне квантне алгоритме који доказују Фајнманову претпоставку. Давид Дојч и Ричард Јожа су 1992. први доказали квантну надмоћ, то јест креирали су квантни алгоритам који брже решава проблем паралелног процесовања од класичног (одељак 3.4). Питер Шор⁴ је 1994. конструисао ефикасни квантни алгоритам факторизације природних бројева, а Лов Гровер⁵ је 1996. направио алгоритам брзе претраге базе података. Најзад, 1998. године, Исак Чуанг, Нил Гершенфелд и Марк Кубинек направили су први двокубитни квантни компјутер који је могао да прима информације и даје резултате. Самим почетком 21. века, Мајкл Нилсен и Исак Чуанг објавили су, сада већ стандардни, уџбеник "Квантно програмирање и квантна информација" [7].

Иако је веома скупо и компликовано конструисати квантни рачунар, још теже је учинити га ефикасним. Главни проблем модерног квантног рачунарства је минимизација квантне декохеренције. Како су се крајем 20. века бурно развијале и истраживале компутабилне репрезентације плетеница и теорија квантног програмирања, 1997, Алексеј Китајев⁶ је увео идеју квантног тополошког програмирања које би "не само направило квантни систем бешумним, већ потпуно глумим, имуним на узроке декохеренције". Тополошки квантни рачунар не троши енергију на оптимизацију алгоритама на квантни шум, јер су тополошки системи стабилнији од квантних, па шума ни нема. Претходно овоме, Френк Вилчек је 1982. године поставио фракциону статистику специфичних квазичестица у две димензије - ениона. Испоставља се да ове честице, које постоје само у две димензије простора, док се крећу кроз време остављају светску линију која не само да изгледа, већ и јесте плетеница (одељак 3.5). Исте године су Даниел Цуи и Хорст Строммер доказали постојање ениона у фракционом квантном Холовом ефекту. Китајев је управо овакве енионе користио у доказу своје идеје и ујединио теорију плетеница и квантно рачунарство у теорију квантног плетеничног рачунарства. Математику Фибоначи ениона су 2005. поставили Николас Бонстил и Лејла Армоци [14], а 2009. су је генерализовали за неке системе [16]. Уопштени генерализовани модел кодирања енионских система у квантни логички још увек није дефинисан. Креирање таквог модела, његовог алгоритма превођења, као и конструкције рачунара који може да изводи такве подухвате је један од главних нерешених проблема модерног квантног рачунарства.

¹Emil Artin (1898-1962) - аустријски математичар, оснивач модерне апстрактне алгебре

²Warner Burau (1906-1994) - немачки математичар

³Rishard Feynman (1918-1988) - амерички физичар, добитник Нобелове награде 1965. за свој допринос у дефинисању квантне електродинимике

⁴Peter Shor (1959) - амерички математичар, професор на универзитету MIT

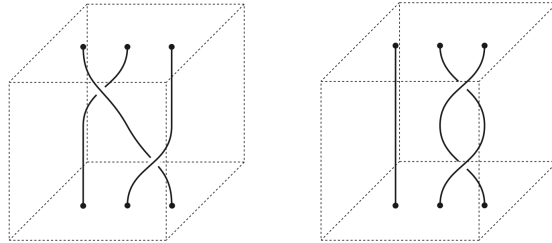
⁵Lov Kumar Grover (1961) - индијски и амерички информатичар

⁶Алексеј Јурьевич Китаев (1963) - руски и амерички физичар, оснивач квантног плетеничног рачунарства

2 Теорија плетеница

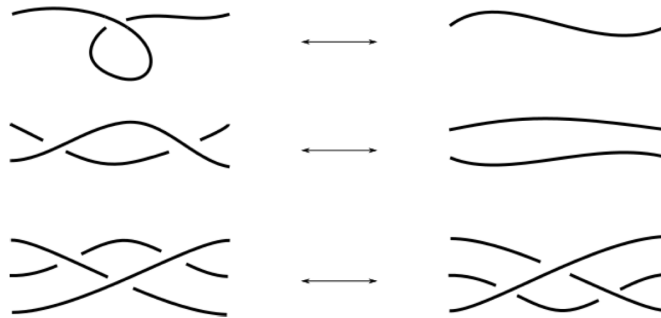
2.1 Група плетеница и њене особине

На јединичну коцку поставимо n нити које задовољавају услове: све нити се налазе унутар коцке; свака нит d_i почине на горњој страници у тачки P_i и завршава се на доњој у тачки K_i ; никоје две нити се не секу и ниједна нит нема хоризонтални сегмент (ниједна нит се не враћа горе). Добијена фигура назива се n -плетеница (слика 1). Скуп свих n -плетеница је скуп \mathcal{B}_n .



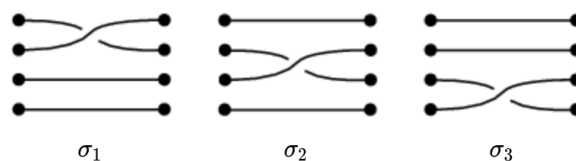
Слика 1: Пример плетеница из скупа \mathcal{B}_3

Две плетенице β_1 и β_2 су **хомотропне**, у ознаци $\beta_1 \sim \beta_2$, ако постоји коначан скуп **Рајдемастерових**⁷ **потеза** (слика 2) којим се једна плетеница преведе у другу. Рајдемастерови потези одржавају координате почетака и крајева сваке нити.



Слика 2: Рајдемастерови потези (RI): савијање једне нити (RII): померање једне нити преко друге (RIII): померање једне нити преко/испод пресека друге две нити

Тривијална или инваријантна плетеница је $\mathbf{1}_n$ која сваки почетак P_i спаја са крајем K_i правом линијом d_i . **Композиција** плетеница је операција $\circ : \mathcal{B}_n^2 \rightarrow \mathcal{B}_n$ која спаја две плетенице надовезивајући другу на прву $\beta_1 \circ \beta_2 = \beta_1\beta_2$. **Инверз** плетенице β је плетеница β' ако и само ако $\beta \circ \beta' \sim \mathbf{1}_n$. **Група плетеница** са n нити је $B_n := \mathcal{B}_n / \sim$. Класа еквиваленције групе плетеница је **преплет** σ_i који означава да је плетеница са почетком P_i прешла испод плетенице P_{i+1} , заменивши крајеве K_{i+1} и K_i (слика 3). Инверз преплета σ_i је преплет σ_i^{-1} код кога почетак P_{i+1} прелази испод почетка P_i . **Генератрисе** (генераторске плетенице) групе B_n су све просте плетенице $[\beta] \sim \sigma_i$ које преплићу нит $i + 1$ преко нити i . Ред било којег преплета неке групе плетеница је бесконачан. Све групе плетеница B_n за $n \geq 2$ су бесконачне кардиналности.



Слика 3: Генератрисе групе B_4

⁷Kurt Werner Friedrich Reidemeister (1893-1971) - немачки математичар и филозоф

Група плетеница би се онда преко Рајдемастерових потеза алгебарски дефинисала:

$$B_n = \begin{cases} \sigma_i \sigma_i^{-1} = 1 & , i \in \{1, \dots, n-1\} \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & , i, j \in \{1, \dots, n-1\} \wedge |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & , i \in \{1, \dots, n-1\} \end{cases} \quad (1)$$

Плетеница може да се представи канонским обликом као производ преплета $\beta = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$ који узима вредности $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n-1$ и $\epsilon_i = \pm 1$ за $1 \leq i \leq k \in \mathbb{N}$. Репрезентација сваке плетенице канонским обликом назива се **реч**. Скуп свих речи, то јест репрезентација плетеница, чини један **алфавет**. **Базу** групе плетеница чини коначан уређен скуп речи $B_n = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$, $k \leq n$. **Супротна** реч речи w је $rev(w) = \sigma_{i_k}^{\epsilon_k} \dots \sigma_{i_1}^{\epsilon_1}$. Важи $rev(w_1 w_2) = rev(w_2) rev(w_1)$. **Позитивна** плетеница је плетеница са свим експонентима $+1$ у ознаци β^+ .

Комутатор групе је оператор $[a, b] = a^{-1} b^{-1} a b$. **Мапа** ϕ за $1 \leq m \leq n$ је хомоморфизам $\phi : B_m \rightarrow B_n$, $\phi(\sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}) = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$ где су $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$ генератрисе B_m , а $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ генератрисе B_n . Пошто је ϕ инјективно, B_m је подгрупа B_n .

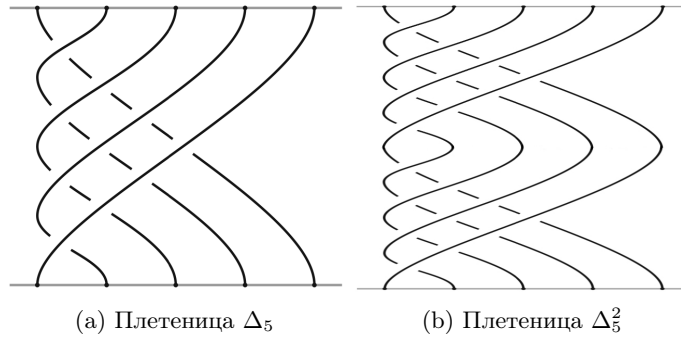
За $\beta \in \mathcal{B}_n$ и нит d_i која повезује P_i са $K_{i(j)}$, $1 \leq i \leq n$, дефинише се **пермутација** плетеница $\pi : B_n \rightarrow S_n$ као $\pi(\beta) : i \mapsto j(n)$, где је S_n симетрична група. Пермутација плетеница је хомоморфизам.

Природна инклузија је мономорфизам $\iota : B_n \rightarrow B_{n+1}$ који сваки преплет слика самог у себе при промени базе $\iota : \sigma_i \mapsto \sigma_i$. На овај начин се добија бесконачан низ $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$

За скуп X мапа $\chi : \mathcal{B}_n \rightarrow X$ је **инваријанта** плетенице ако $\beta_1 \sim \beta_2 \Rightarrow \chi(\beta_1) = \chi(\beta_2)$. За групу G , хоморфизам $f : B_n \rightarrow G$ и мапу $\delta_n : \mathcal{B}_n \rightarrow B_n$ из β у $[\beta]$, мапа $f \circ \delta_n : \mathcal{B}_n \rightarrow G$ је инваријанта. Мапа $\pi \circ \delta_n$ је такође инваријанта. Сума експонената плетенице је хомоморфизам $exp : B_n \rightarrow \mathbb{Z}$ чија је вредност $exp(\beta) = \sum_{i=1}^k \epsilon_i$, па је мапа $exp \circ \delta_n$ инваријанта.

Чиста плетеница β је плетеница код које свака нит d_i почиње у P_i и завршава у K_i , то јест $\pi(\beta) = 1$. Група чистих плетеница C_n је језгро пермутације плетенице $C_n = Ker(\pi : B_n \rightarrow S_n)$, то јест $B_n/C_n \cong S_n$. Увођењем потеза $\sigma_i^2 = \mathbf{1}_n$ (уместо $\sigma_i \sigma_i^{-1} = 1$) за $1 \leq i \leq n-1$ групе B_n дефинише се **количник** групе $B_n(k) := B_n / \langle \sigma_i^k \rangle$. Важи $B_n(2) \cong S_n$.

Центар групе G је њена подгрупа $Z(G)$ коју чине сви елементи $g \in G$ за које важи $gx = xg$ за свако $x \in G$. За групе плетеница димензија $n \geq 3$ центар $Z(B_n) = Z(C_n)$ је бесконачна циклична група генерисана елементом Δ_n^2 . **Герсајдова** плетеница Δ_n (слика 4а) добија се када ред почетака нити стоји у месту а на ред крајева се примени полузавртај (ротација за угао π). Плетеница Δ_n^2 (слика 4б) је онда случај када се полузавртај примени два пута. Алгебарски $\Delta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$, а $\Delta_n^2 = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n$. Важе $\sigma_i \Delta_n = \Delta_n \sigma_{n-i}$, $\sigma_i \Delta_n^2 = \Delta_n^2 \sigma_i$ и $rev(\Delta_n) = \Delta_n$.



Слика 4: Герсајдове плетенице

Унутрашњи аутоморфизам групе плетеница је пресликавање $\tau : B_n \rightarrow B_n$ које шаље σ_i у σ_{n-i} за $1 \leq i \leq n-1$, $\tau(\beta) = \Delta_n^{-1} \beta \Delta_n$. Ако је β позитивна плетеница, онда је и $\tau(\beta)$ позитивна. За непаран цео број m важи $\beta \Delta_n^m = \Delta_n^m \tau(\beta)$. За $1 \leq i \leq n-1$ и позитивну реч w_i важи $\Delta_n = w_i \sigma_i = \sigma_i rev(w_i)$, па се свака β плетеница може представити преко позитивне плетенице T као $\beta = \Delta_n^r T$, за $r \in \mathbb{Z}$.

Максимална, инваријантна, вредност броја $r > l$ за коју се плетеница β не може изразити преко неке позитивне је **инфимум** те плетенице $inf(\beta)$. **Супскрипт** речи $w = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$ је уређена k -торка $s(w) = (i_1, \dots, i_k)$. За плетеницу $\beta \in B_n$ записану као $\beta = \Delta_n^{inf(\beta)} T$ и коначан скуп $\{Z_0, Z_1, \dots, Z_k\}$ позитивних речи еквивалентних постоји реч Z_j са најкраћим супскриптом. **Нормална форма** плетенице β је $\Delta_n^{inf(\beta)} Z_j$. [1 стр. 20-61][2 стр. 1-46]

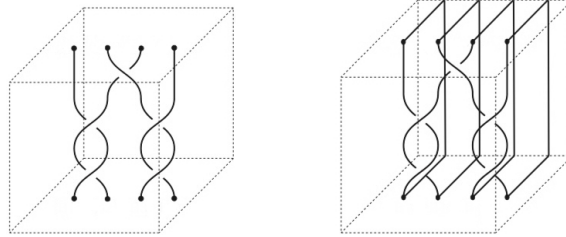
2.2 Везе, чворови и затварање плетеница

За тродимензионалну многострукост M са границом ∂M **веза** у M је локално равна затворена једнодимензиона подмногострукост од M . С обзиром да је веза затворена једнодимензиона многострукост мора бити хомоморфна јединичном кругу $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Сваки простор хомоморфан \mathbb{S}^1 зове се **тополошки круг**. Веза која се састоји од $n \geq 1$ кругова зове се **n-компонентна** веза. Једнокомпонентне везе су **чворови**, то јест многострукости $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$. **Нечвор** или тривијални чвор је многострукост просторно изотропна кругу. Нечвор $K \equiv \bigcirc$ је јединични елемент операције суме чворова \amalg над скупом чворова \mathcal{K} . Две везе L_1 и L_2 из скупа веза \mathcal{L} су **изотропне** $L_1 \sim L_2$ ако L_1 може да се деформише у L_2 изотропијом из M у M . n-компонентна веза је **уређена** ако су њени компоненти нумерисани. **Оријентација** везе L тродимензионалне многострукости M је оријентација унутрашње једнодимензионалне многострукости L .

Нека су L_1 и L_2 одвојени оријентисани чворови, и за уређену оријентисану двокомпонентну везу $L_1 \amalg L_2$ ознака l^+ (l^-) представља број пута када нит L_1 пређе преко L_2 слева надесно (здесна налево). Тада је **везивни број** $lk(L_1, L_2) = l^+ - l^- \in \mathbb{Z}$ инваријанта на изотропијама и оријентисаним Рајдемастеровим потезима дијаграма. Па је $lk(L_1, L_2)$ добро дефинисана изотропија инваријанте везе $L_1 \amalg L_2$. За $\beta \in \mathcal{B}_n$ се дефинише инваријанта $p(\beta) = 1 - n + lk(L_1, \dots, L_n) = 1 - n + l^+ - l^-$.

За темена $A_i := (\frac{1}{2}, \frac{i}{n+1}, 1)$ и $B_i := (\frac{1}{2}, \frac{i}{n+1}, 0)$ где $1 \leq i \leq n$, **затварање** $\tilde{\beta}$ плетенице β (слика 5) представља спајање темена изломљеном линијом c_i коју чине:

- (i) права $c_{i,1}$ од A_i до $(0, \frac{i}{n+1}, 1)$
- (ii) права $c_{i,2}$ од $(0, \frac{i}{n+i}, 1)$ до $(0, \frac{i}{n+i}, 0)$
- (iii) права $c_{i,3}$ од $(0, \frac{i}{n+i}, 0)$ до B_i



Слика 5: Затварање плетенице $\beta = \sigma_2^{-1}\sigma_1^2\sigma_3^2$

Директна оријентација плетенице је у смеру P_i ка K_i , **индиректна** у супротном. Оријентација затварања плетенице је самоодређена. Затварање n-плетенице представља везу са највише n компонената.

Александрова⁸ теорема: За оријентисану везу L постоји број $n \in \mathbb{N}$ n-плетенице $\beta \in B_n$ таква да су везе еквивалентне $L \approx_l \tilde{\beta}$. Другим речима свака оријентисана веза је изотропна одређеној затвореној плетеници.

Марковљев⁹ потез типа I (M1): конјугација замењује n-плетеницу β са речју $\gamma\beta\gamma^{-1}$, где је γ било која n-плетеница. Инверз $M1^{-1}$ мења β речју $\gamma^{-1}\beta\gamma$.

Марковљев потез типа II (M2): десна стабилизација замењује n-плетеницу β (n+1)-плетеницом $\beta\sigma_n^{\pm 1}$. Инверз $M2^{-1}$ мења (n+1)-плетеницу $\beta\sigma_n^{\pm 1}$ n-плетеницом β .

Две плетенице $\beta_1 \in B_n$ и $\beta_2 \in B_m$ су **еквивалентне по Маркову** $\beta_1 \sim_M \beta_2$ ако постоји коначан низ Марковљевих покрета који преводe β_1 у β_2 .

Марковљева теорема: Нека су $\beta_1 \in B_n$ и $\beta_2 \in B_m$, тада је $\tilde{\beta}_1 \approx_l \tilde{\beta}_2$ ако и само ако $\beta_1 \sim_M \beta_2$. Другим речима две различите плетенице могу имати иста затварања.

Марковљева функција у E је низ $f_n : B_n \rightarrow E$ који задовољава:

- (i) $(\forall n \geq 1) (\forall \beta_1, \beta_2 \in B_n) f_n(\beta_1\beta_2) = f_n(\beta_2\beta_1)$
- (ii) $(\forall n \geq 1) (\forall \beta \in B_n) f_n(\beta) = f_{n+1}(\sigma_n\beta)$ и $f_n(\beta) = f_{n+1}(\sigma_n^{-1}\beta)$ [1 стр. 62-75][2 стр. 47-91]

⁸James Waddell Alexander II (1888 - 1971) - амерички математичар, професор и припадник 'Принстоншке тополошке елите'

⁹Андрей Андреевич Марков (1903 - 1979) - совјетски математичар, син истоименог оца математичара, оснивач конструктивизма

2.3 Матричне репрезентације

Плетенична матрица је репрезентација плетенице добијена као производ свих матрица преплета те плетенице.

За $n \geq 2$ и $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ дефинише се матрица димензије $n \times n$ на прстену $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$

$$U_i = \begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

где I_k представља јединичну матрицу $k \times k$. Сменом $t = 1$ добија се пермутација $n \times n$ матрица, па низ U_1, \dots, U_{n-1} може да се гледа као деформација матрица једног параметра. U представља централни део сваке матрице. Пошто за сваку матрицу M димензије $n \times n$ над пољем Λ важи $M^2 - \text{tr}(M)M + |M|I_n = 0$, за ове матрице важи $U^2 - (1-t)U - tI_2 = 0$ и $U_i^2 - (1-t)U_i - tI_n = 0$. Што може да се запише и као $U_i(U_i - (1-t)I_n) = tI_n$, па U_i има инверз:

$$U_i^{-1} = t^{-1}(U_i - (1-t)I_n) = \begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 1-t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Ове матрице задовољавају својства $U_i U_j = U_j U_i$ за свако i, j тавко да $|i-j| \geq 2$ и $U_i U_{i+1} U_i = U_{i+1} U_i U_{i+1}$ за $i = \{1, 2, \dots, n-2\}$. Дефинише се хомоморфизам $\psi_n(\sigma_i) = U_i$ група $\psi_n : B_n \rightarrow GL_n(\Lambda)$ за $i = \{1, 2, \dots, n-1\}$ и $n \geq 2$. Ова функција зове се **Буроова репрезентација** групе плетеница B_n . Пошто је $|U_i| = -t$ за свако i , за свако $\beta \in B_n$ важи $|\psi_n(\beta)| = (-t)^{\langle \beta \rangle}$, где је $\langle \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ слика β хомоморфизма $B_n \rightarrow \mathbb{Z}$ која шаље све генератрисе $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ у 1. Буроове репрезентације $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ су компатибилне са природним инклузијама $i : B_n \rightarrow B_{n+1}$ тако да за све $n \geq 1$ и $\beta \in B_n$ важи $\psi_{n+1}(i(\beta)) = \begin{pmatrix} \psi_n(\beta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

За $n \geq 3$ матрице V_1, \dots, V_{n-1} димензија $(n-1) \times (n-1)$ као:

$$V_1 = \begin{bmatrix} -t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-3} \end{bmatrix} V_i = \begin{bmatrix} I_{i-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-i-2} \end{bmatrix} V_{n-1} = \begin{bmatrix} I_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & -t \end{bmatrix} \quad (4)$$

где је V_i за $1 < i < n-1$. Тада за свако $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ важи $K^{-1}U_i K = \begin{pmatrix} V_i & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$, где је K матрица димензије $n \times n$ са јединицама на и изнад главне дијагонале, а испод нулама, а $*i$ је ред дужине $n-1$ једнак $(0, \dots, 0, 1)$. Хомоморфизам $\psi_n^R(\sigma_i) = V_i$ група $\psi_n^R : B_n \rightarrow GL_{n-1}(\Lambda)$ је **редукована Буроова репрезентација** за коју важи $K^{-1}\psi_n(\beta)K = \begin{pmatrix} \psi_n^R(\beta) & 0 \\ * & \beta \end{pmatrix}$. За $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ и a_i i -ти ред матрице $\psi_n^R(\beta) - I_{n-1}$, члан $*\beta$ се израчунава преко релације $-(1+t+\dots+t^{n-1})*\beta = \sum_{i=1}^{n-1} (1+t+\dots+t^i)a_i$. Буроове репрезентације плетеница су матрице преплета. [2 стр. 91-111]

Малинсва репрезентација је плетенична матрица $\Psi(\beta) = \prod \Psi(\sigma_i)$ димензије $2n \times 2n$ плетенице $\beta = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$ где се сваки преплет $\sigma_i \in B_{n+1}$ може изразити као матрица:

$$\Psi(\sigma_i) = \begin{bmatrix} I_i & O_i \\ R_i & J_i \end{bmatrix} \quad (5)$$

где I_i представља јединичну матрицу, O_i нула матрицу, R_i је нула матрица осим члана $(i, i) = 1$ и J_i је јединична матрица осим у i -том реду у коме су чланови $(i, i-1) = 1$ и $(i, i+1) = -1$, то јест $J_i = \psi_n^R(\sigma_i)$ за $t = -1$. Дефинише се инваријанта $C(\beta) = i^{p(\beta)} |R_\beta|$ за плетеницу $\beta \in \mathcal{B}_{n+1}$. [3] Као пример дат је преплет σ_2 групе B_4 .

$$\Psi(\sigma_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 Темперли-Либ алгебра

За цео број $n \geq 2$ и цео број $a \neq 0$ **Темперли¹⁰-Либ¹¹ алгебра** $A_n(a)$ је \mathbb{C} -алгебра генерисана $n - 1$ елементима e_1, \dots, e_{n-1} , дефинисана:

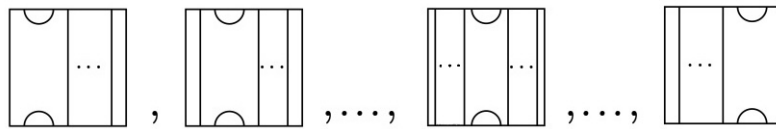
$$A_n(a) = \begin{cases} e_i^2 = ae_i & , i \in \{1, \dots, n-1\} \\ e_i e_j = e_j e_i & , i, j \in \{1, \dots, n-1\} \wedge |i-j| \geq 2 \\ e_i e_j e_i = e_i & , i, j \in \{1, \dots, n-1\} \wedge |i-j| = 1 \end{cases} \quad (6)$$

Свака реч $e_{i_1} \dots e_{i_r}$ алфабета $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ представља елемент $A_n(a)$. Највећи генератор те речи је елемент са највећим од свих индекса. Свака непразна реч $w = e_{i_1} \dots e_{i_r}$ од $A_n(a)$ представља скаларни умножилац речи у којој се највећи генератор појављује тачно једном. Скуп редукованих речи покрива $A_n(a)$. Графички приказано, Темперли-Либ алгебра је структура налик плетеници, са два изузетка: не долази до преплитања нити и нити смеју да имају хоризонталне сегменте, то јест нит d_i може да почне у почетку P_i (или крају K_i) и заврши се у почетку P_j (крају K_j). На (слици 6) приказани су сви могући елементи алгебре са три нити.



Слика 6: Елементи групе $A_3(a)$

Први график са слике 6 је тривијална алгебра, други и трећи су генератрисе $A_3(a)$, у ознаци редом e_1 и e_2 . Последња два графика представљају композицију генератриса, редом $e_1 e_2$ и $e_2 e_1$. Свака друга композиција генератора би довела до неке од ових пет структура, па су то сви могући елементи алгебре $A_3(a)$. Генератрисе e_1, \dots, e_{n-1} опште алгебре $A_n(a)$ су приказане на слици на (слици 7).



Слика 7: Генератрисе алгебре $A_n(a)$

Каталонски број је кардиналност скупа редукованих речи $|E_n| = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Димензија $A_n(a)$ није већа од каталонског броја за n . Број изотропских класа простог n -дијаграма Темперли-Либ алгебре једнак је каталонском броју од n .

Марковљев траг је мапа $Tr_n : A_n(a) \rightarrow \mathbb{C}$ која задовољава:

- (i) $Tr_n(1) = 1$
- (ii) $(\forall \alpha_1, \alpha_2 \in A_n(a)) Tr_n(\alpha_1 \alpha_2) = Tr_n(\alpha_2 \alpha_1)$
- (iii) $(\forall \alpha \in A_n(a)) Tr_{n+1}(\alpha e_n) = \frac{1}{a} Tr_n(\alpha)$

са вредношћу $Tr_n(\alpha) = a^{l-n}$ за $\alpha \in A_n(a)$ где је l број чворова добијених затварањем α . Марковљев траг је инваријанта алгебре $A_n(a)$.

За бесконачни комплексни векторски простор V са задатим базисом, матрица $R : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ је инверзибилно решење **Јанг¹²-Бакстерове¹³ једначине**

$$(R \otimes I)(I \otimes R)(R \otimes I) = (I \otimes R)(R \otimes I)(I \otimes R) \quad (7)$$

где је I идентитет у V . R -матрица даје локалну репрезентацију групе B_n .
[2 стр. 222-237][4 стр. 1-15][5]

¹⁰Harold Neville Vazeille Temperley (1915 - 2017) - професор примењене математике у статистичкој механици, члан 'Друштва британске академије'

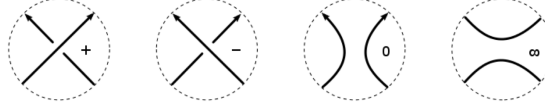
¹¹Elliott Hershel Lieb (1932) - амерички математички физичар, професор на Принстону

¹²Yáng Zhènníng (1922) - кинески физичар, добитник Нобелове награде 1957. за откриће неконзервације парности у слабој нуклеарној сили

¹³Rodney James Baxter (1940) - аустралијски физичар, специјализован у пољу ивичних модела, члан 'Краљевског друштва Лондона' и 'Аустралијске академије наука'

2.5 Плетенични полиноми

Клупчана релација је однос у коме могу бити три различите везе које се разликују само у једном преплету. За везе $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3 \in \mathcal{B}_n$ које се разликују само у преплету $\sigma_i \in B_n$, то јест имају вредност тог преплета редом σ_i, σ_i^{-1} и 0 (нити се не преплићу), вредности клупчане релације су редом L_+, L_- и L_0 , зване **Конвејева¹⁴ тројка** (слика 8). За Темперли-Либ алгебре уводи се вредност клупчане релације L_∞ .



Слика 8: Клупчане релације

Полином који је инваријанта неке плетенице рекурзивно се може дефинисати преко клупчаних релација свих преплета те плетенице као:

$$f(L_-, L_0, L_+) = 1 \quad (8)$$

$$f(L_-(x), L_0(x), L_+(x), x) = 0 \quad (9)$$

$$Af(L_+) + Bf(L_-) = Cf(L_0) + Df(L_\infty) \quad (10)$$

Кауфманова¹⁵ инваријанта је оператор $\langle \cdot \rangle$ затворених Темперли-Либ алгебра:

$$\langle \bigcirc \rangle = 1 \quad (11)$$

$$L_+ = AL_\infty + A^{-1}L_0 \quad (12)$$

$$L_- = A^{-1}L_\infty + AL_0 \quad (13)$$

$$\langle \bigcirc \amalg L \rangle = (-A^2 - A^{-2})\langle L \rangle \quad (14)$$

Александар-Конвејев полином веза је мапа ∇ оријентисаних веза $L \subset \mathbb{R}^3$ $\nabla(L) \in \mathbb{Z}[s, s^{-1}]$ дефинисана као:

$$\nabla(\bigcirc) = 1 \quad (15)$$

$$\nabla(L_+) - \nabla(L_-) = (s^{-1} - s)\nabla(L_0) \quad (16)$$

са инваријантом $\tilde{f}(L) = f_n(\beta)$ за Марковљеову функцију $\{f_n : B_n \rightarrow \mathbb{Z}[s, s^{-1}]\}_{n \geq 1}$ са вредношћу $f_n(\beta) = (-1)^{n+1} \frac{s^{-\langle \beta \rangle} (s-s^{-1})}{s^n - s^{-n}} g(\det(\Psi_n^R(\beta) - I_{n-1}))$ где је g хомоморфизам прстенова $g : \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[s, s^{-1}]$ који слика t у s^2 . Другачије записано $|\psi_{n+1}^R - I_n| = (1+t+t^2+\dots+t^{n-1})\nabla(\beta)$. За $s = 2i$ важи $C(\beta) = \nabla(\tilde{\beta})$.

НОМФЛУРТ полином или **Џонсов¹⁶ полином** плетеница са два параметра је проширење Александар-Конвејевог и Џонсовог полинома:

$$P(\bigcirc) = 1 \quad (17)$$

$$lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0 \quad (18)$$

$$P(L) = \frac{-(l+l^{-1})}{m}P(L_1)P(L_2) \quad (19)$$

за који се тројка (L_+, L_-, L_0) може заменити тројком (L'_+, L'_-, L'_0) где је $L'_+ = \widetilde{\alpha\sigma_i\beta}$, $L'_- = \widetilde{\alpha\sigma_i^{-1}\beta}$ и $L'_0 = \widetilde{\alpha\beta}$. [2 str. 111-175][6 str. 1-41]

¹⁴John Horton Conway (1937 - 2020) - британски математичар и информатичар, иако допринео многим пољима науке, познат је постао због своје 'Игре живота', члан 'Краљевског друштва Лондона'

¹⁵Louis Hirsch Kauffman (1945) - амерички математичар, професор топологије и кибернетике

¹⁶Sir Vaughan Frederick Randal Jones (1952 - 2020.) - математичар са Новог Зеланда, добитник Филдсове медаље 1990. за проналажење везе између фон-Нојманових алгебри и геометријске топологије - Џонсов полином, члан 'Краљевског друштва Лондона' и 'Аустралијске академије наука'

3 Квантно рачунарство

3.1 Кубити и њихове особине

У квантној механици векторски простори записују се Дираковом¹⁷ бра $\langle\psi| = (a^* \ b^*)$ и кет $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ нотацијом, за $a, b \in \mathbb{C}$ где је z^* комплексни коњугат броја z . Скаларни производ вектора $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ и $|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ је бракет $\langle\psi|\varphi\rangle$ (из Енглеског *bracket*, заграда). Векторски производ та два вектора је оператор кетбра $|\psi\rangle\langle\varphi|$. Тензорски производ тих вектора је $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle = |\psi\rangle|\varphi\rangle$.

$$\langle\psi|\varphi\rangle = a^*c + b^*d, \quad |\psi\rangle\langle\varphi| = \begin{pmatrix} ac^* & ad^* \\ bc^* & bd^* \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle = |\psi\rangle|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix} \quad (20)$$

Оператори у квантној механици су унитарне матрице, то јест матрице за које важи $U^{-1} = U^\dagger$. Оператори делују здесна налево на кет векторе и слева надесно на бра векторе. Скаларни производ са оператором $\langle\psi|A|\varphi\rangle$ је скаларни производ између вектора $|\psi\rangle$ и $A|\varphi\rangle$ или вектора $A^\dagger|\psi\rangle$ и $|\varphi\rangle$. За свака два вектора важе својства $(|\psi\rangle\langle\varphi|)^\dagger = |\varphi\rangle\langle\psi|$, $\langle\psi|A^\dagger|\varphi\rangle = (\langle\varphi|A|\psi\rangle)^\dagger$ и $(A \otimes B)(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = A|\psi\rangle \otimes B|\varphi\rangle$.

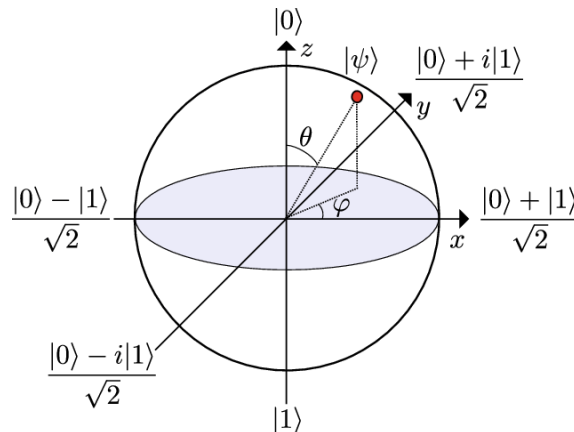
Спектрална форма оператора A је $A = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$ где вектори $|i\rangle$ формирају ортогонални скуп својствених вектора A , а λ_i су одговарајуће својствене вредности. Комутатор оператора A и B је операција $[A, B] = AB - BA$.

Основна јединица информације квантног компјутера је кубит (*quantum binary digit*). Основна стања кубита су базисни вектори $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. За разлику од класичног бита, који може да узима само стања $|0\rangle$ или $|1\rangle$, кубит може заузети и стање које је линеарна комбинација та два $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Вероватноћа да ће се један од базиса измерити је редом $|\langle\psi|0\rangle|^2 = |\alpha|^2$ и $|\langle\psi|1\rangle|^2 = |\beta|^2$ при чему те две вредности чине потпун систем догађаја мерења кубита, то јест $\langle\psi|\psi\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Мерење кубита је операција конвертовања једног кубита у пробабилистички класични бит који управо узима вредности базиса са датим вероватноћама. Пошто су вероватноће исхода комплексни бројеви, кубит се може представити као

$$|\psi\rangle = e^{i\delta} \left(\cos\frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \quad (21)$$

при чему члан $e^{i\delta}$ не утиче на изход мерења, па се може занемарити. Тиме се са Декартовог координатног система са параметрима α и β прелази на сферни са параметрима θ и φ , чији је модел Блохова¹⁸ сфера. Вредности кубита приказаних на слици 9 на x и y оси се означавају, слева надесно, редом $|-\rangle$, $|+\rangle$, $|i-\rangle$ и $|i+\rangle$.



Слика 9: Блохова сфера

¹⁷Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) - један од најбитнијих британских физичара XX века, добитник Нобелове награде 1933. за нова открића у квантној механици и атомској теорији, члан 'Краљевског друштва Лондона'

¹⁸Felix Bloch (1905-1983) - шведски физичар, добитник Нобелове награде 1952. за развиће нових метода прецизних нуклеарних магнетних мерења

Систем од два кубита $|\psi_1\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ и $|\psi_2\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$ пре мерења је **суперпозиција** та два кубита, то јест њихов тензорски производ $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle$. Ако после мерења први кубит има вредност $|0\rangle$ (које заузима са вероватноћом $|\alpha\gamma|^2 + |\alpha\delta|^2$), стање система постаје $|\psi\rangle = \frac{\alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle}{\sqrt{|\alpha\gamma|^2 + |\alpha\delta|^2}}$, вероватноћа да други кубит такође заузме стање $|0\rangle$ је $\frac{|\alpha\gamma|^2}{|\alpha\gamma|^2 + |\alpha\delta|^2}$. На исти начин се понаша систем од више кубита.

За групу кубита који међуделују на начин такав да се стање једног кубита не може утврдити независно од стања свих осталих каже се да су **квантно спрегнути**. Дакле, стања спрегнутих кубита A и B су повезана $|\psi\rangle_{AB} \neq |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$. У систему од два спрегнута кубита мерење првог аутоматски колапсује стање другог на једини могући исход. Један од најпознатијих примера кванто спрегнутих кубита је **Белово**¹⁹ **стање** $\beta_{00} = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$. Видљиво, у овом стању вредност другог кубита директно зависи од вредности првог кубита (иако први кубит узима вредности $|0\rangle$ и $|1\rangle$ са вероватноћом 0.5, други кубит ће узети вредности $|0\rangle$ и $|1\rangle$ са вероватноћом 1 сваки пут). [7 стр. 13-28][8 стр. 8-21]

3.2 Квантни оператори

Како се над класичним битовима операције врше логичким капијама које представљају логичке операције, тако се над квантним битовима операције врше **квантим логичким капијама** које представљају операторе. Суштина квантног програмирања своди се на конструкцију квантних логичких кола и њихово кодирање. Унарне операције над кубитима врше унитарне матрице. Једне од најзначајнијих унитарних матрица су **Паулијеве**²⁰ **матрице** (I , X , Y и Z) које поредстављају потпун систем базе векторског простора матрица 2×2 . Та генератриса зове се Паулијева група n кубита: $G_1 \equiv \{\pm I, \pm iI, \pm X, \pm iX, \pm Y, \pm iY, \pm Z, \pm iZ\}$ и дефинисана је за операцију множења матрица. Постоји више база Паулијеве групе попут $G_1 = \langle X, Y, Z \rangle = \langle X, Z, iI \rangle$. На Блоховој сфери Паулијеве матрице представљају редом коинциденцију, ротирање за π степени око x , y и z осе.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Још један битан унитарни оператор је Адамарова²¹ капија H која од стања $|0\rangle$ даје $|+\rangle$, а од $|1\rangle$ даје $|-\rangle$. Битне бинарне операције над кубитима одређују $SWAP$ матрица која размењује стања два кубита и $CNOT$ капија која за вредност $|1\rangle$ првог кубита примењује X на други кубит, а за вредност $|0\rangle$ првог кубита примењује I .

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad SWAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Преко Пулијевих матрица могуће је извести матрице ротација око x , y и z осе, као и матрице фазног прелаза:

$$R_x(\theta) = e^{-\frac{i\theta X}{2}}, \quad R_y(\theta) = e^{-\frac{i\theta Y}{2}}, \quad R_z(\theta) = e^{-\frac{i\theta Z}{2}}, \quad Ph(\theta) = e^{i\theta I} \quad (22)$$

Па се свака унарна капија може се представити и као производ три ротационе матрице:

$$U = Ph(\alpha)R_z(\beta)R_y(\gamma)R_z(\delta) = e^{i\alpha} \begin{bmatrix} e^{-\frac{i\beta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\beta}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\gamma}{2} & -\sin\frac{\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\frac{i\delta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\delta}{2}} \end{bmatrix} \quad (23)$$

¹⁹John Stewart Bell (1928-1990) - ирски физичар, члан 'Краљевског друштва Лондона'

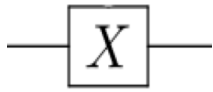

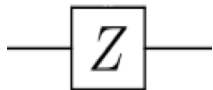
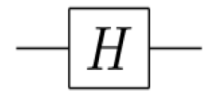
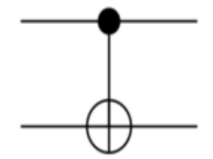
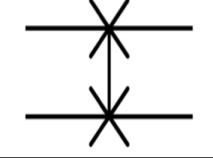
²⁰Wolfgang Ernst Pauli (1900-1958) - аустријски физичар, добитник Нобелове награде 1945. за откриће Паулијевог ексклузионог принципа

²¹Jacques Salomon Hadamard (1865-1963) - француски математичар, специјализован у пољу комплексне анализе и диференцијалне геометрије, члан 'Краљевског друштва Лондона'

У општем случају **контролне** капије су све капије *controlled* – U_n које делују на n кубита и повезане су са $(n + 1)$. контролним кубитом, за вредност $|1\rangle$ контролног кубита капија U_n се примењује на n кубита, за вредност $|0\rangle$ не. Контролне капије имају облик:

$$\text{controlled} - U_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & U_n \end{bmatrix}$$

Спектрална декомпозиција оператора A је поступак превођења оператора A из матричне у спектралну форму. Спектар оператора служи као математички приказ како оператор делује на сваки кубит (сваку могућу комбинацију кубита). Ако неки оператор A може да се растави у облик $A = |\alpha\rangle\langle\gamma| + |\beta\rangle\langle\delta|$, то значи да стања $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ преводи редом у стања $|\gamma\rangle$ и $|\delta\rangle$. Приказ поменутих најважнијих оператора и њихових матричних и спектралних форми је на табели 1.

Назив	Симбол	Опертор	Спектрална форма
Паули X		$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$ 0\rangle\langle 1 + 1\rangle\langle 0 $
Паули Y		$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$	$i(1\rangle\langle 0 - 0\rangle\langle 1)$
Паули Z		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$ 0\rangle\langle 0 - 1\rangle\langle 1 $
Адамарова		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}[0\rangle(\langle 0 + \langle 1) + 1\rangle(\langle 0 - \langle 1)]$
CNOT		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$ 00\rangle\langle 00 + 01\rangle\langle 01 + 10\rangle\langle 11 + 11\rangle\langle 10 $
SWAP		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$ 00\rangle\langle 00 + 01\rangle\langle 10 + 10\rangle\langle 01 + 11\rangle\langle 11 $

Табела 1: Најважније капије и њихове особине

Корисно је знати идентитете квантних кола попут:

$$XYX = -Y, HXH = Z, HZH = X, HYH = -Y \tag{24}$$

Најважнија капија у квантом програмирању је **капија мерења**, једина капија која није матрица, јер преводи квантни у пробабилистички класичан бит. Мерење квантног стања колапсира таласну функцију стања, те је капија мерења ирверзибилна и као вредности даје вероватноће мерења стања $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Улаз у капију мерења (слика 10) је једна линија, представљајући кубит, а излаз је дупла линија која представља две вредности вероватноћа стања. [7 стр. 60-78][8 стр. 52-110]



Слика 10: Капија мерења квантног системa

3.3 Квантна логичка кола

Квантна логичка кола конструишу се редним и паралелним везивањем квантних логичких капија. С обрзом на то да су класична кола дефинисана логичким операцијама (редно везивање представља конјункцију, а паралелно дисјункцију), повезивање капија у квантним колима представљаће матричне операције. Капије A и B које делују на кубит ψ повезују се редно у коло C матричним производом $A \times B = C$. Исте две капије A и B које редом делују на кубите ψ и φ повезују се паралелно у коло D Кронекеровим производом $(A \otimes B)|\psi \otimes \varphi\rangle = D$. **Кронекеров производ** матрица $A_{m \times n}$ и $B_{p \times q}$ је матрица

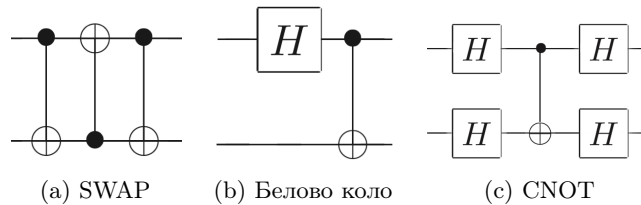
$$A_{m \times n} \otimes B_{p \times q} = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}_{pm \times nq} \quad (25)$$

Матрица добијена Кронекеровим производом две унитарне матрице је унитарна матрица. Инверз матрице $A \otimes B$ је матрица $A^\dagger \otimes B^\dagger$. Паралелни утицај n унарних матрица U на n кубита обележава се $U^{\otimes n}$.

NOT операција $A \oplus B$ над системом два кубита $|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$ активира оператор A за стање кубита $|0\rangle$, а оператор B за $|1\rangle$, то јест $(A \oplus B)|\psi\rangle = |0\rangle \otimes A(a|0\rangle + b|1\rangle) + |1\rangle \otimes B(c|0\rangle + d|1\rangle)$. Оператор $A \oplus B$ може се представити матрицом:

$$A_{m \times n} \oplus B_{p \times q} = \begin{bmatrix} A & O_{m \times q} \\ O_{p \times n} & B \end{bmatrix} \quad (26)$$

Може се доказати да је *SWAP* капија између кубита $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ једнака трострукој примени *CNOT* капије, редом на $|\psi_2\rangle$, $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ (слика 11а). Испоставља се да се свако квантно логичко коло може конструисати коначном комбинацијом *CNOT* и унарних капија. Белова стања могу се добити применом H на први кубит и *CNOT* на други (слика 11б). Применом H на оба кубита $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$, па примена *CNOT* на $|\psi_2\rangle$ и поновна примена H на оба кубита једнака је примени *CNOT* на кубит $|\psi_1\rangle$ (слика 11с). Капија може да има и више контролних кубита, као што има Тофолијева T капија, позната као и *CCNOT* капија. Још једна корисна капија је Фредкинова F или *CSWAP* капија.



Слика 11: Графички приказ поменутих кола

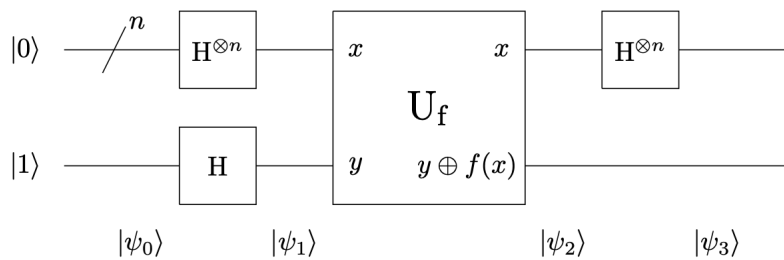
Квантни паралелизам квантних логичких кола је својство истовременог израчунавања вредности функције $f(x)$ за више променљивих x . За функцију дефинисану над битовима $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ могуће је трансформисати квантно коло из стања $|x, y\rangle$ у стање $|x, y \oplus f(x)\rangle$ коначном применом квантних капија, збирно названих U_f . Ако се у улазу у коло налазе два $|0\rangle$ кубита, од којих је на први примењена H капија, применом U_f на овај пар добија се стање $\frac{|0, f(0)\rangle + |1, f(1)\rangle}{\sqrt{2}}$. Овај процес може се генерализовати за n кубита **Адамаров трансформацијом** где паралелни утицај H капија на n кубита може да се запише у облику $H^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$. Примена H на један кубит може се представити као $H|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{z=0}^1 (-1)^{xz} |z\rangle$. За $n = 2$, са почетним стањима кубита $|0\rangle$, трансформација има облик $\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle}{2}$. Применом U_f на коло после Адамарове трансформације добија се стање $\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle |f(x)\rangle$ које описује све вредности функције у зависности од променљиве. [7 стр. 30-39][8 стр. 123-140]

3.4 Квантни алгоритми

Квантни паралелализам производи стање које описује функцију $f(x)$ за све њене параметре, али мерењем овог кола добија се само једно стање $|x, f(x)\rangle$ од могућих 2^n . Један од првих алгоритама квантног рачунарства, који решава овај проблем, назива се **Дојч²²-Јожин²³ алгоритам**. Функција $f(x)$, $x \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ може бити или **балансирана** (половина параметара заузима вредности 0, друга половина вредности 1) или **константна** (сви параметри заузимају исту вредност). Дојч-Јожин алгоритам одређује којој од те две групе $f(x)$ припада. Дојч-Јожин алгоритам (слика 12) гласи:

1. улазно стање је $|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes n}|1\rangle$
2. примена H на све параметре даје стање $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$
3. примена U_f даје стање $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$ и издрачунава вредност f
4. примена H на првих n кубита даје стање $|\psi_3\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{z=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)+xz} |z\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$

Мерењем стања $|\psi_3\rangle$ могуће је закључити каква је задата функција $f(x)$. За измерену вредност $|0\rangle^{\otimes n}$ функција је константна, да ли су сви параметри 0 или 1 зависи од коефицијента уз измерено стање који може бити $+1$ или -1 . За све друге измерене вредности функција је балансирана.



Слика 12: Коло Дојч-Јожиног алгоритма

Иако нема корисне примене, овај алгоритам показује квантну надмоћ, то јест показује да квантни рачунар једном евалуацијом решава проблем док би класични рачунар исти проблем требало $2^n - 1$.

Теоријски, квантни алгоритми драстично су ефикаснији од класичних код великог броја проблема, та ефикасност се губи при физичкој имплементацији квантних рачунара. Примена великог броја оператора на кубите доводи до њихвог **декохеренције** и **квантног шума**. Већ пар деценија ради се на оптимизацији квантних кола, тако да имају што неприметнији шум. Чињеница да је оптимизација таквих система веома скупа и захтевна, у скороје време поткрепила је потрага за физичким имплементацијама квантних рачунара који у потпуности избегавају квантни шум, уместо да га оптимизују. Један од могућих кандидата за бешумни квантни систем је енионски квантни рачунар. [7 стр. 29-36 и 171-215][8 стр. 35-48]

²²David Elieser Deutsch (1953) - британски физичар, пионер квантног рачунарства и предлагач интерпретације више светова квантне механике, члан 'Краљевског друштва Лондона'

²³Richard Jozsa (1953) - аустралијски математичар и информатичар, кооснивач теорије квантне телепортације, члан 'Краљевског друштва Лондона'

3.5 Квантна фаза и ениони

Сваки **Ермитски** оператор (оператор облика $A = A^\dagger$) може се представити преко својствених вредности и вектора као $H|\psi_\lambda\rangle = \lambda|\psi_\lambda\rangle$. Како све унитарне матрице U имају облик $U = e^{iH}$, могуће их је записати као $U|\psi_\lambda\rangle = e^{i\lambda}|\psi_\lambda\rangle$. Матрица U је већ дефинисана матрица фазног прелаза, а њена својствена вредност $e^{i\lambda}$ назива се **квантна фаза** система $|\psi_\lambda\rangle$.

У квантном систему са две исте честице у стањима ψ_1 и ψ_2 , стање система је $|\psi_1\psi_2\rangle$. Ако се применом неког оператора U промене стања те две честице, стање система ће бити $U|\psi_1\psi_2\rangle = e^{i\theta}|\psi_2\psi_1\rangle$. Поновном применом оператора добија се стање $U^2|\psi_1\psi_2\rangle = e^{2i\theta}|\psi_1\psi_2\rangle$. Пошто та два стања не смеју имати мерну разлику, вредност фазе мора бити $e^{2i\theta} = 1$. У димензијама $n > 2$ постоје само два могућа решења за θ : π и 2π . Честице чија је вредност фазе 1 се зову **бозони**, а они чија је вредност фазе -1 су **фермиони**.

У дводимензионалном систему могуће је добити разна рационална решења која зависе од квантног спина s честице, тј $\theta = 2\pi s$. Квазичестице са квантним фазом различитом од бозонске и фермионске се зову **ениони** (из Енглеског *anyon*, апу-све, јер могу да имају сваку вредност фазе).

Како су оператори бозона и фермиона у $3 + 1$ простору једнодимензионални представници пермутационе групе S_n са n истих честица простора таласних функција тог стања, тако су оператори $e^{i\theta}$ ениона једнодимензионални представници плетеничне групе B_n са n истих честица простора таласних функција истог стања. Дакле, стање система више ениона је изоморфно плетеници њихове замишљене светске линије кроз две димензије. У зависности од инваријанте светске линије, измерени ениони ће давати различите вредности од почетних. Одређене плетенице неког система ениона су изоморфне квантним логичким капијама, пример једне такве плетенице дат је на слици 13.

$$\approx \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Слика 13: Паули Y матрица симулирана преплетима Фибоначи ениона

Ениони тиме повезују теорију плетеница са квантним програмирањем. Поставља се питање да ли је уопште могуће конструисати физички систем који имплементира енионе и који модели ениона дефинишу комплетан систем. Одговор на то питање даје се у глави 4. [7 стр. 93-96][8 стр. 349-365][9 стр. 1-12][10 стр. 6-40]

4 Квантно плетенично рачунарство

4.1 Физичка имплементација

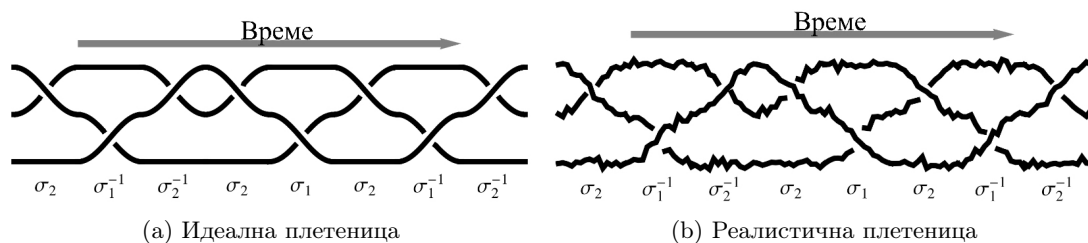
Сваки систем који на неки начин физички имплементира квантно рачунарство мора да испуњава следеће услове:

1. темељна репрезентација квантне информације
2. примена универзалне породице унитарних матрица
3. могућност припреме поузданог почетног стања
4. мерљивост крајњег стања

Темељна репрезентација квантне информације захтева коначан и симетричан базис стања, попут квантног спина или поларизације фотона. Универзална породица оператора представља најчешће Паулијеве и *CNOT* матрице, али неки системи могу имати неке друге, ефикаснијим за руковање базисе. Свакако мора постојати начин да се у коначном времену тај базис преведе у универзални. Квантни систем мора да омогућава бесконачно много понављања истог експеримента, са истим почетним условима; без доследности немогуће је ишта доказати, те би недоследан систем био безвредан. Најпоузданији систем у теорији има нула ентропију. Мерљивост квантног система је могућност добијања тачне вредности вероватноћа колапсирања стања. Дobar индикатор ефикасне мерљивости је однос јачине сигнала и квантног шума - тачнији системи имају мање вредности тог односа. [7 стр. 277-283]

На веома ниским температурама, а и у присуству јаког магнетног поља, одређени агрегати јако интерагујућих честица самопобуђују специфичне особине попут нецелобројног наелектрисања и квантног спина. Како је могуће представити кретање ениона фазном капијом, поставља се питање могућности представљања ениона комбинацијом других, некомутативних унитарних матрица. Испоставља се да је могуће. Ениони који се могу представити само преко коначне комбинације унитарних матрица, од којих је бар једна некомутативна, називају се **неабеловски**.

Светске линије кретања групе ениона дефинишу плетеницу, те могу дефинисати и квантну капију. Самим тим реално кретање ениона у две димензије није од екстремне важности, докле год су сви ениони довољно удаљени међусобно, могуће је добити тражену светску линију у $2+1$ димензија. Управо из непотребности регуларности путања појединачних ениона произилази отпорност декохеренцији квантних тополошких кола. Дат је пример једнакости теоријске (слика 14a) и реалне (слика 14b) плетенице светских линија ениона.



Слика 14: Приказ енионске отпорности на декохеренцију

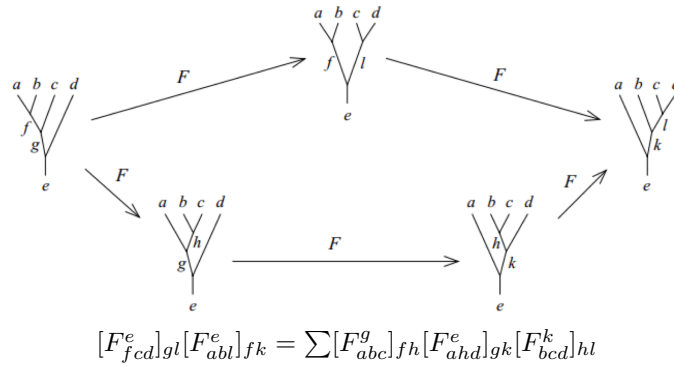
У општем случају, матрична репрезентација плетенице ениона једнака је производу преплета у матричном облику редом временске линије. Квантни оператор добијен израчунавањем стања ениона једнак је Ψ^{-1} . [8 стр. 642-644]

4.2 Фузија честица

Фузија је операција дефинисана над честицама (које могу бити различитих типова: на пример a, b, c, \dots) као спајање две честице и стварање треће, записа $a \times b = c$. **Цепање** честице је супротан процес $c = a \times b$. **Идентитет вакуума** је израз $a \times I = I \times a = a$ и представља спајање честице типа a ни са чим. **Уништење** честице a долази када се она судари са својом античестицом \bar{a} , облика $a \times \bar{a} = I$. Фузија са више **фузионих канала** је појава да две честице могу да се споје у више различитих честица, са одређеном вероватноћом, $a \times b = c + d + \dots$. Спајање античестица са више фузионих канала може резултовати у идентитету вакуума, али и не мора $a \times \bar{a} = I + e$.

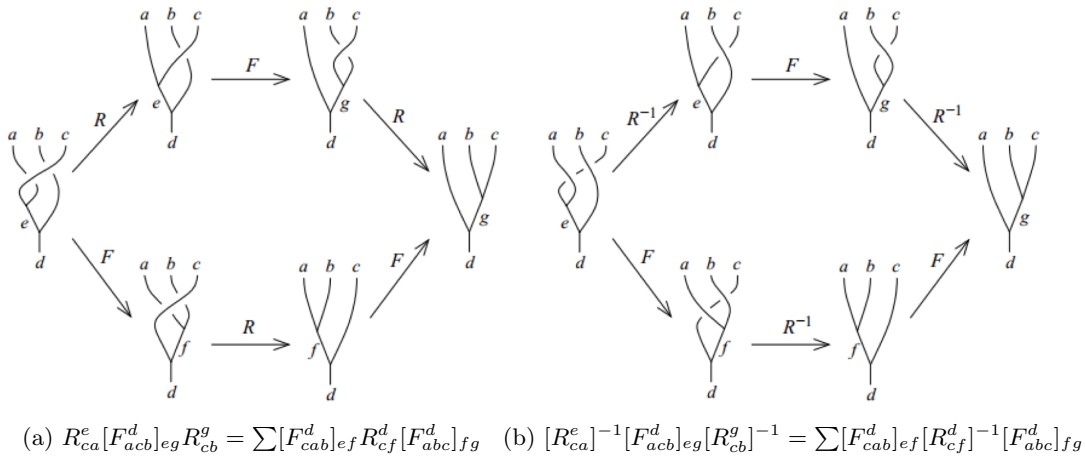
Сва остала правила везана за фузију специфичних честица зову се **фузиона правила** за тај скуп честица. Фузиона правила одређују димензију Хилбертовог простора \mathcal{H}_n у којем се налази n честица. Фузија честица у општем облику дефинисана је као $a \times b = \sum N_{ab}^c c$, где је N_{ab}^c **фузиона матрица** честица a и b у c . Важе својства $N_{ab}^c = N_{ba}^c$ и $N_{a\bar{a}}^I = 1$. Фузионе матрице су асоцијативне; $a \times b \times c = e$ неvezано на који од два начина се рачуна фузија $\sum N_{ab}^d N_{cd}^e = \sum N_{cb}^f N_{af}^e$, а матрице N_a и N_c комутирају $[N_a, N_c] = 0$.

Матрица промене базиса је матрица F која једно асоцијативно стање пребацује у друго, за пример фузије три честице то је матрица $[F_{abc}]_{df}$ и важи $\sum N_{ab}^d N_{cd}^e = \sum [F_{abc}]_{df} N_{cb}^f N_{af}^e$. Фузију четири честице могуће је извршити на пет различитих начина, па тај систем дефинише пет матрица, које су повезане релацијом приказаној на слици 15.



Слика 15: Графички приказ свих фузионих канала четири честице - велики пентагон

Матрица самопреплета је матрица R која дефинише један позитиван преплет спарених ениона пре него што се споје у трећи $\sum N_{ab}^c = \sum R_{ab}^c N_{ba}^c$, на један кубит делује $R(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha R_{aa}^I |0\rangle + \beta R_{aa}^a |1\rangle$. Фузију три честице које могу да се преплићу могуће је извршити на шест различитих начина, а за тај систем постоје две породице од по шест матрица које га дефинишу, повезане релацијама датим на сликама 16а и 16б. [10 стр. 52-62][11 стр. 67-96]



Слика 16: Графички прикази свих фузионих канала три преплетене честице - велики хексагони

4.3 Модели ениона

Фибоначи ениони су ениони са специфичним спинским квантним бројем званим **q-спин**. Понаособ ениони имају q-спин вредности 1, а њихове комбинације заузимају вредности вакуума 0 и ениона 1. Фузија ениона у честицу q-спина a означава се $(\bullet, \bullet)_a$. Фузионо правило Фибоначи ениона гласи: $1 \times 1 = 0 + 1$. Фузиона матрица Фибоначи ениона дата је N_1 , матрица промене базиса F (где је $\tau = \frac{1}{\phi}$), а матрица самопреплета R (израчунате применом великих пентагона и хексагона).

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \tau & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & -\tau \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} e^{-\frac{4\pi i}{5}} & 0 \\ 0 & -e^{-\frac{2\pi i}{5}} \end{bmatrix}$$

Димензија Хилбертовог простора n Фибоначи ениона $\dim(\mathcal{H}_n)$ једнака је $(n+1)$ -ом Фибоначијевом броју, одакле су ови ениони и добили име. Велики Хилбертов простор даје могућност процесовања огромне количине кватне информације, што чини Фибоначи енионе добрим кандидатом за квантно програмирање. Како Фибоначи ениони имају само једно фузионо правило, онда су они и најпростији.

Простор са два Фибоначи ениона је дводимензионалан, са базисима $|0\rangle = |(\bullet, \bullet)_0\rangle$ и $|1\rangle = |(\bullet, \bullet)_1\rangle$; простор са три је тродимензионалан, са базисима $|((\bullet, \bullet)_0, \bullet)_1\rangle$, $|((\bullet, \bullet)_1, \bullet)_1\rangle$ и $|((\bullet, \bullet)_1, \bullet)_0\rangle \dots$

Логички кубити су они чија је вредност q-спина 1 (збирни кубити укупне вредности q-спина 0 виртуелно не постоје, то јест спајају се у вакуум). У тродимензионалном случају то су $|0_L\rangle = |((\bullet, \bullet)_0, \bullet)_1\rangle$ и $|1_L\rangle = |((\bullet, \bullet)_1, \bullet)_1\rangle$, док је треће стање $|NC\rangle$ занемарљиво.

$$|0_L\rangle = \begin{array}{c} \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \end{array} \bullet_0 \quad |1_L\rangle = \begin{array}{c} \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \end{array} \bullet_1 \bullet_1 \quad |NC\rangle = \begin{array}{c} \bullet \\ \circlearrowleft \\ \bullet \end{array} \bullet_1 \bullet_0$$

Тродимензионалност ових ениона допушта два могућа преплета: σ_1 који преплиће пар ениона и σ_2 који преплиће два неспарена ениона, са матричним приказима:

$$\sigma_1 = \left[\begin{array}{cc|c} e^{-\frac{4\pi i}{5}} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\frac{2\pi i}{5}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & -e^{-\frac{2\pi i}{5}} \end{array} \right] \quad \sigma_2 = \left[\begin{array}{cc|c} -\tau e^{-\frac{\pi i}{5}} & -i\sqrt{\tau}e^{-\frac{\pi i}{10}} & 0 \\ -i\sqrt{\tau}e^{-\frac{\pi i}{10}} & -\tau & 0 \\ \hline 0 & 0 & -e^{-\frac{2\pi i}{5}} \end{array} \right]$$

Горњи блок ових матрица димензије 2×2 има q-спин вредности 1 па је једнак датим преплетима, остатак је занемарљив, па важе $\sigma_1 = R$ и $\sigma_2 = F^{-1}RF$. Овим поступком могуће је добити све три Паулијеве матрице, као и $CNOT$ оператор, па је онда могуће конструисати и сваки други унитарни оператор.

Одређивање вредности Фибоначи ениона након преплетања врши се фузијом два најлевља ениона $|0_L\rangle$ и $|1_L\rangle$, јер се разликују за базисе $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Вредност q-спина од 0 означава могућност фузије, док вредност 1 забрањује. Како Фибоначи ениони испуњавају сва четири услова квантног рачунарског система, добар су кандидат за конструкцију квантног топлошког рачунара. [8 стр. 645-649][12 стр. 19-32][13 стр. 40-62][14]

Фибоначи ениони су најпростији модел ениона, па се сви њихови преплети могу израчунати помоћу правила великог пентагона и хексагона. Сложенији модели ениона захтевају примену матричних репрезентација плетеница дефинисаних у одељку 2.3. Декодирање квантних кола система ениона врши се преко квантних плетеничних инваријанти, то јест HOMFLYPT полинома дефинисаног у одељку 2.5. Тренутни отворен проблем квантног плетеничног програмирања је управо креирање алгоритама који би сложеније системе ениона превели у облик квантних логичких кола, као и физичка конструкција таквих система, попут у [15][16].

5 Закључак

Кроз овај рад упознали смо се са основама квантног плетеничног рачунарства: области која повезује нискодимензиону топологију плетеница, чворова и веза са квантним рачунарством.

На почетку овог рада алгебарски смо дефинисали групу плетеница и њена основна својства, конструишући формалним путем нормалну форму плетенице. Затим смо одвојено увели везе као експлицитно затварање плетеница и Темперли-Либ алгебру која је произишла из теорема статистичке механике. Циљ овог уводног дела био је проучавање основне математике потребне за даље заснивање матричних и полиномских репрезентација плетеница помоћу којих се може формирати релација са квантним операторима.

У другој целини најзад се сусрећемо са физиком. Појаснили смо линеарну алгебру потребну за баратање са кубитима и дали примере најзначајнијих квантних логичких капија. Помињемо проста квантна логичка кола и анализирамо принцип рада Дојч-Жожиног алгоритма, увидевши један од првих доказа квантне надмоћи. На крају бавили смо се енионима, њиховим својствима и приказали њихову путању кроз $2 + 1$ димензију.

Главна и последња целина овог рада фокусира се на ефикасну физичку имплементацију квантног плетеничног рачунара преко модела ениона. Овде смо објаснили какви физички модели долазе у обзир и шта их тачно чини ефикасним. Прешли смо преко феномена фузије малог скупа честица. Приметимо да за систем од већег броја честица није могуће користити графички приказане фузионе формуле, већ је потребно применити раније дефинисане плетеничне матрице, не би ли решили проблем преплетања. На самом крају ставили смо посебан акценат на Фибоначи енионе и показали да су они добар кандидат имплементације квантног тополошког рачунара.

Свима онима којима је овај рад привукао бар имало пажње препоручујем књиге [1] и [2] за детаљнији опис теорије плетеница и књиге [7] и [8] као темељан увод у квантно рачунарство. Што се тиче квантног плетеничног рачунарства и рада са енионима, скрипте [11] и [13] дају добру основу, али ни приближно не описују овај целокупан феномен и ја лично препоручујем читаоцу да самостално заплочи у воде ове узбудљиве области.

Искористио бих ову прилику да се захвалим свом ментору др Александри Гочанин на сарадњи и помоћи при писању овог рада, као и на њеном одвојеном времену, уложеном труду и веома корисним конструктивним критикама. Поготово желим да јој се завалим на инспиративним предавањима о квантном рачунарству у Истраживачкој станици 'Петница', због којих сам се заинтересовао за ову област и одлучио њоме да се бавим у овом раду. Такође бих хтео да се захвалим својој професорки Ивани Стојиљковић за претходне две године часова физике и за савете који су естетски и садржајно побољшали овај рад.

Литература

- [1] Chiodo, M. (2005) 'An Introduction to Braid Theory' [Online] Доступно на: https://www.dpmms.cam.ac.uk/~mcc56/research/An_Introduction_to_Braid_Theory.pdf
- [2] Kassel, C, Turaev, V. (2008) 'Braid Groups' Graduate Texts in Mathematics
- [3] Mullins, D. (1996) 'A Braid Representation and Corresponding Closed Braid Invariant' Journal of Knot Theory and Its Ramifications Volume 5, Number 6 стр. 867-875
- [4] Abramsky, S. (2009) 'Temperley-Lieb Algebra: From Knot Theory to Logic and Computation via Quantum Mechanics'
- [5] Lomonaco, S. J. Jr. i Kauffman, L. H. (2006) 'Topological Quantum Computing and the Jones Polynomial' Quantum Information and Computation IV
- [6] Tomotada, O. (2002) 'Quantum Invariants: A Study of Knots, 3-Manifolds and Their Sets' World Scientific, Series on Knots and Everything Volume 29
- [7] Nielsen, M. A, Chuang, I, L. (2010) 'Quantum Computation and Quantum Information' 10th Anniversary Edition, Cambridge University Press
- [8] Williams, C, P. (2011) 'Explorations in Quantum Computing' Texts in Computer Science
- [9] Gaudreau, R, Ledvinka, D. (2019) 'Knot Theory and Quantum Computing'
- [10] Kauffman, L. H, Lomanco, S, J, Jr. 'Topological Quantum Information Theory' University of Illinois at Chicago
- [11] Simon, S. (2016) 'Topological Quantum: Lecture Notes' Доступно на: <http://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/SteveSimon/topological2016/TopoBook.pdf>
- [12] Delaney, C, Rowell, E, C, Wang, Z. (2016) 'Local Unitary Representation of the Braid Group and Their Applications to Quantum Computing'
- [13] Preskill, J. (2004) 'Lecture Notes for Physics 219: Quantum Computation' CalTech
Доступно на: <http://theory.caltech.edu/~preskill/ph219/topological.pdf>
- [14] Bonesteel, N, E, Harmoni, L, Zikos, G. (2005) 'Braid Topologies for Quantum Computation' Physical Review Letters Volume 95
- [15] Xu, H. i Wan, X. (2008) 'Constructing functional braids for low-leakage topological quantum computing' Physical Review A 78
- [16] Bonesteel, N, E, Harmoni, L, Simon, S, H. (2009) 'Topological Quantum Computing for Read-Reyazi States' Physical Review Letters Volume 103