IX **Кавкаска математичка олимпијада**
Мајкоп, 11.–16. март 2024. године

Caucasus Mathematical Olympiad | Кавказская математическая олимпиада

Сениори. Дан 1.

12. март

1. Нека су a, b, c, d позитивни реални бројеви. Познато је да важи бар једна од неједнакости:
$$ab > \min\left\{\frac{c}{d}, \frac{d}{c}\right\}, \quad cd > \min\left\{\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right\}.$$
Доказати да важи бар једна од неједнакости:
$$ac > \min\left\{\frac{b}{d}, \frac{d}{b}\right\}, \quad bd > \min\left\{\frac{a}{c}, \frac{c}{a}\right\}.$$

2. У оштроуглом троуглу ABC дуж BL је симетрала угла, а дуж BK је висина. Праве BL и BK по други пут секу описану кружницу троугла ABC у тачкама W и T, редом. Испоставило се да је $BC = BW$. Доказати да је $TL \perp BC$.

3. Нека је n неки d-цифрени (тј. који има d цифара у децималном приказу) природан број који није дељив са 10. Записујући све цифре броја n у обрнутом редоследу, добијамо број n'. Да ли децимални приказ производа nn' може да се састоји само од цифара “8”, ако је **(а)** $d = 9998$; **(б)** $d = 9999$?

4. Јаша уписује у поља табеле 99×99 све природне бројеве од 1 до 99^2 (сваки број једанпут). Гриша гледа у табелу и бира неколико поља, међу којима никоја два немају заједничку страницу, а затим сабира бројеве у свим изабраним пољима. Какав највећи збир Гриша може гарантовано постићи?