



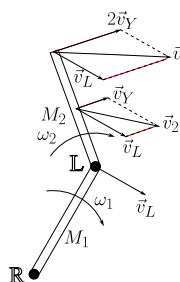
Решење задатка 1

- (а) Убрзање тела је $a = \frac{F}{m}$ **0,2п**, па је брзина тела при избацивању $v = at$ **0,1п**. Одатле је $v = \frac{F\tau}{m}$ **0,2п**.
- (б) Брзина тела при избацивању је $v = l\omega$ **0,4п**, где је ω угаона брзина ротације руке. Кинетичка енергија система тело-рука у тренутку избацивања тела је $T = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$ **0,8п**, где је $I = \frac{1}{3}Ml^2$ момент инерције штапа у односу на осу која пролази кроз тачку L и нормална је на раван цртежа. Из закона одржања енергије је $A = T$ **0,3п**. Из претходних једначина налазимо $v = \sqrt{\frac{6A}{M+3m}}$ **0,5п**.
- (в) Према моделу из дела (а) константна је величина $c_a = mv$ **0,2п**, према моделу из дела (б) константна је величина $c_b = v^2 \cdot (M + 3m)$ **0,2п**. У доњој табели је приказана израчуната зависност ових величина од масе тела **0,5п**.

m (kg)	0,057	0,16	0,73	1,42	2,10	3,40
v (m/s)	20,0	17,5	13,2	10,4	8,5	7,2
c_a (kg · $\frac{m}{s}$)	1,1	2,8	9,6	14,8	17,9	24,5
c_b (kg · $\frac{m^2}{s^2}$)	868	760	730	677	600	632

На основу резултата приказаних у табели, видимо да је c_b много ближе константи него c_a . Зато закључујемо да модел (б) много боље описује зависност v од m **0,6п**.

- (г) Кинетичка енергија првог сегмента је $T_1 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2$, где је $I_1 = \frac{1}{3}M_1l_1^2$ момент инерције у односу на осу која пролази кроз тачку R и нормална је на раван цртежа, одакле је $T_1 = \frac{1}{6}M_1l_1^2\omega_1^2$ **0,5п**. Да бисмо нашли кинетичку енергију другог сегмента, потребно је да нађемо брзину његовог центра масе. Та брзина је једнака $\vec{v}_2 = \vec{v}_L + \vec{v}_Y$, где $\vec{v}_Y$ има правац нормалан на други сегмент, смер надесно, а по интензитету је једнак $v_Y = \frac{1}{2}l_2\omega_2$, док је $\vec{v}_L$ брзина лакта која има правац нормалан на први сегмент, смер надесно, а по интензитету је једнак $v_L = l_1\omega_1$ (видети слику 1). Одатле је $v_2^2 = v_L^2 + v_Y^2 + 2\vec{v}_L \cdot \vec{v}_Y$. Из геометрије проблема налазимо да је угао између $\vec{v}_Y$ и $\vec{v}_L$ једнак $\theta_1 + \theta_2$, одакле је $v_2^2 = l_1^2\omega_1^2 + \frac{1}{4}l_2^2\omega_2^2 + l_1\omega_1l_2\omega_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$ **1,2п**. Кинетичка енергија другог сегмента је тада $T_2 = \frac{1}{2}M_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2$ **0,3п**, где је $I_2 = \frac{1}{12}M_2l_2^2$. Користећи претходне једначине налазимо да је укупна кинетичка енергија $T = T_1 + T_2$, одакле је $T = \frac{1}{6}(M_1 + 3M_2)l_1^2\omega_1^2 + \frac{1}{6}M_2l_2^2\omega_2^2 + \frac{1}{2}M_2l_1\omega_1l_2\omega_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$ **1п**.



Слика 1: уз решење делова задатка (г) и (д).

- (д) Брзина тела при избачају је једнака брзини горњег краја другог сегмента и једнака је $\vec{v} = \vec{v}_L + 2\vec{v}_Y$ (слика 1) **0,5п**. Кинетичка енергија се може записати и као $T = \frac{1}{6}(M_1 + 3M_2)v_L^2 + \frac{1}{6}M_2(2\vec{v}_Y)^2 + M_2\vec{v}_L \cdot \vec{v}_Y$, одакле следи $T = \frac{1}{6}(M_1 + M_2)v_L^2 + \frac{1}{6}M_2v^2 + \frac{1}{6}M_2\vec{v} \cdot \vec{v}_L$. **1п** Угао α између вектора $\vec{v} = \vec{v}_L + 2\vec{v}_Y$ и $\vec{v}_L$ је мањи од угла између вектора $\vec{v}_L$ и $\vec{v}_Y$ (слика 1), који је једнак $\theta_1 + \theta_2$. С обзиром да је $\theta_1 < 45^\circ$ и $\theta_2 < 45^\circ$, следи да је угао α оштар, одакле је $\cos \alpha > 0$. Одатле је $T = \frac{1}{6}(M_1 + M_2)v_L^2 + \frac{1}{6}M_2v^2 + \frac{1}{6}M_2vv_L \cos \alpha$. **0,5п** Пошто су коефицијенти уз v_L^2 и v_L позитивни, следи да је кинетичка енергија минимална за $v_L = 0$, односно $\omega_1 = 0$.

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА МЕЂУНАРОДНА ТАКМИЧЕЊА
ШКОЛСКА 2024/25. ГОДИНА



Друштво физичара Србије и
Министарство просвете Републике Србије
РЕШЕЊА



Београд
20-21. мај 2025.

Тада је $\omega_2 = \frac{v}{l_2}$ **1п**. Резултат овог дела задатка оправдава модел коришћен у делу (б), пошто показује да се при ефикасном бацању тела креће само доњи део руке.

Ученике и наставнике заинтересоване за ову тему упућујемо на рад:

R. Cross, Am. J. Phys. 72, 305 (2004),

одакле је преузета идеја за овај задатак.

Задатак припремио: *др Ненад Вукмировић*, Институт за физику у Београду

Рецензент: *др Момир Арсенијевић*, Природно-математички факултет у Крагујевцу

Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Природно-математички факултет у Новом Саду