

Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
-из физике-

ПРИМЕНА НЕУРОНСКИХ
МРЕЖА У ПРЕДВИЋАЊУ
ПАРАМЕТАРА КОСОГ ХИЦА

Ученик:

Ђорђе Васић
4ц

Ментор:

Др Ненад Сакан
Виши научни сарадник
Института за физику у Београду

У Београду, Мај 2025.

Садржај

1	Увод	2
2	Коси хитац	3
2.1	Основне једначине	3
2.1.1	Почетни услови	3
2.1.2	Хоризонтално кретање	4
2.1.3	Вертикално кретање	4
2.2	Важни параметри кретања	4
2.2.1	Максимална висина	4
2.2.2	Домет	5
2.2.3	Време лета	5
2.3	Путања	5
2.4	Путања и одређивање параметара	6
3	Неуронске мреже	7
3.1	Дефиниција и историјски контекст	7
3.2	Структура перцептрона	7
3.2.1	Сензорни елементи (улазни слој)	7
3.2.2	Асоцијативни елементи (тежински слој)	8
3.2.3	Реакциони елементи (излазни слој)	8
3.3	Алгоритам учења перцептрона	9
3.4	Ограничења и значај	9
4	Резултати и дискусија	10
5	Закључак	17

1 Увод

Основна идеја овог рада је упознавање са принципима употребе неуронских мрежа, као главног правца вештачке интелигенције и њихова примена на решавање реалних физичких проблема.

У овом раду смо се водили идејом да је проблем који се јавља као једно од основних кретања тела са сталним убрзањем, коси хитац, довољно добар пример на којем може да се види функционисање неуронских мрежа. Такође да се одреди квалитет процене параметара путање, те да се на основу тога изврши поређење и избор топологије неуронске мреже која даје добра предвиђања параметара косог хица.

Коси хитац представља идеалан моделни систем за процену ефикасности неуронских мрежа због следећих карактеристика:

- Једноставна аналитичка решења која омогућавају прецизну проверу тачности
- Нелинеарна зависност путање од почетних услова
- Јасно дефинисани физички параметри (почетна брзина, угао, гравитација)

Идеја која је довела до реализације овог рада је била са циљем:

- Упознавања са основним архитектурама неуронских мрежа (перцептрон, MLP)
- Имплементације модела за предвиђање параметара косог хица
- Квалитативне и квантитативне анализе тачности различитих архитектура

Да би се постигао модел који је довољно једноставан за тренирање и обраду резултата поједноставили смо посматрани систем у односу на реални коси хитац тиме што смо смањили димензионалност система на минималне две димензије. Поред тога уведено је да је почетна и крајња висина трајекторије једнака, детаљније о овоме у поглављу 4, на страни 10.

На основу рада на решавању овог проблема као и резултата истраживања практично је приказана примена неуронских мрежа у физици, анализиране су предности и ограничења различитих архитектура и отворени су нови правци истраживања као и хибридне методе које нису биле покривене нити једним предметом у досадашњем школовању.

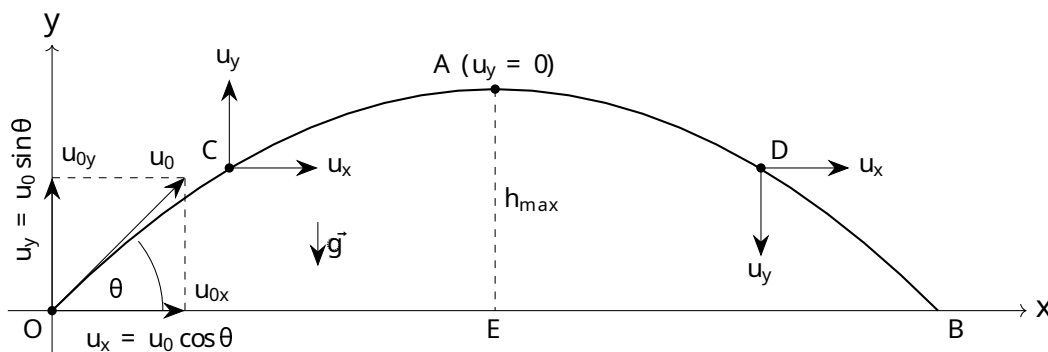
У раду су приказане основне једначине косог хица, [1], [2], приказане су најосновније карактеристике неуронских мрежа типа перцептрон, приказани су резултати тренирања и коришћења неуронских мрежа и урађена је анализа добијених резултата.

2 Коси хитац

У оквиру проблема кинематике први, посебно истакнути, реалан случај кретања тела је коси хитац. Такво кретање се у случају непостојања силе отпора средине одвија предвидљивом путањом, која се описује трајекторијом кретања косог хица, параболом [3], [4].

2.1 Основне једначине

Посматрамо тело бачено почетном брзином $\vec{u}_0$ под углом θ у односу на хоризонталну раван. На тело делује само гравитациона сила $\vec{g}$.



Слика 1: Коси хитац

2.1.1 Почетни услови

Компоненте почетне брзине су:

$$u_{0x} = u_0 \cos \theta$$

$$u_{0y} = u_0 \sin \theta$$

2.1.2 Хоризонтално кретање

У хоризонталном правцу нема убрзања:

$$a_x = 0$$

$$v_x = u_{0x} = \text{const}$$

$$x = u_{0x}t = u_0 \cos \theta \cdot t$$

2.1.3 Вертикално кретање

У вертикалном правцу делује гравитационо убрзање:

$$a_y = -g$$

$$v_y = u_{0y} - gt = u_0 \sin \theta - gt$$

$$y = u_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = u_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

2.2 Важни параметри кретања

2.2.1 Максимална висина

Максимална висина се достиже када је $v_y = 0$:

$$0 = u_0 \sin \theta - gt_{\max}$$

$$t_{\max} = \frac{u_0 \sin \theta}{g}$$

$$h_{\max} = u_0 \sin \theta \cdot \frac{u_0 \sin \theta}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{u_0 \sin \theta}{g} \right)^2$$

$$= \frac{u_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

2.2.2 Домет

Домет је хоризонтално растојање које тело пређе док не падне на тло ($y = 0$):

$$\begin{aligned} 0 &= u_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \\ t &= \frac{2u_0 \sin \theta}{g} \\ D &= u_0 \cos \theta \cdot \frac{2u_0 \sin \theta}{g} \\ &= \frac{u_0^2 \sin(2\theta)}{g} \end{aligned}$$

2.2.3 Време лета

Укупно време лета је двоструко време достизања максималне висине:

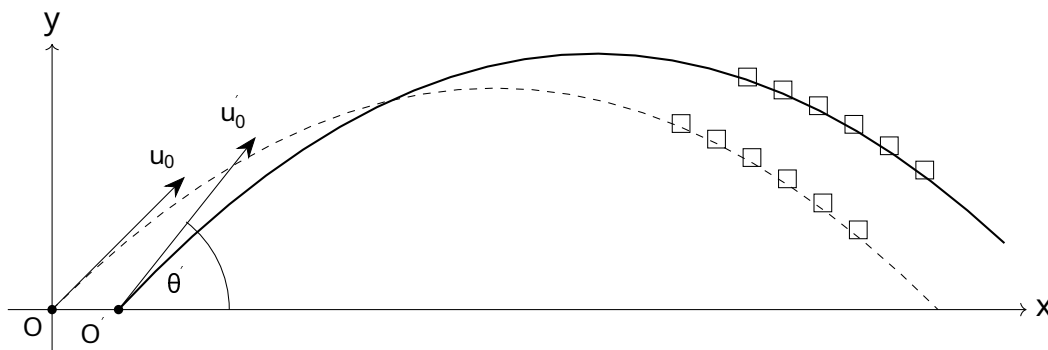
$$T = \frac{2u_0 \sin \theta}{g}$$

2.3 Путања

Елиминацијом времена t из једначина за x и y добијамо једначину путање:

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{u_0 \cos \theta} \\ y &= u_0 \sin \theta \cdot \frac{x}{u_0 \cos \theta} - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{u_0 \cos \theta} \right)^2 \\ &= x \tan \theta - \frac{gx^2}{2u_0^2 \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

Ово је једначина параболе са вертикалном осом симетрије.

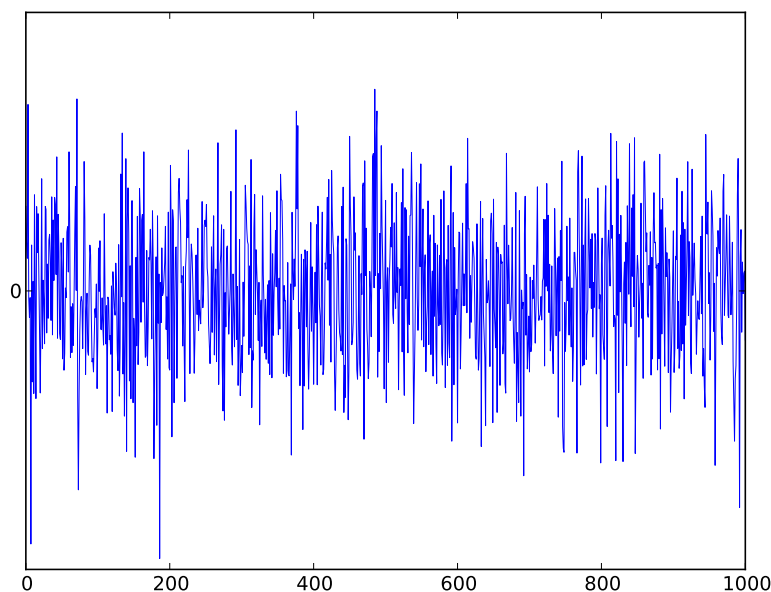


Слика 2: Путања са грешкама у одређивању параметара косог хитца

2.4 Путања и одређивање параметара

У модерним системима за одређивање параметара косог хитца користе се различите методе машинског учења. У овом раду је примењена вештачка неуронска мрежа (ANN) дубоког типа перцептрон, где се као улазни подаци користи 6 узастопних тачака путање приказаних на слици 2. Ове тачке представљају последња очитавања координата x и y путање пројектила.

Важно је напоменути да се сваки реални физички процес мерења одвија под утицајем шума. На слици 3 приказан је пример белог шума који је типично присутан у процесу мерења.



Слика 3: Пример белог шума у процесу мерења

На процену параметара путање значајно утичу два фактора:

- Позиција на трајекторији са које су узете датих шест тачака
- Количина шума присутна током мерења координата задатих тачака

Ови фактори могу довести до различитих процена параметара путање, чак и када се ради о истој трајекторији пројектила. Ово се посебно одражава на одређивање следећих почетних параметара кретања:

- Познавање x позиције почетне тачке путање O' која се мери просто координатом по x оси, x'

- Грешка у процени почетног угла $\theta' - \theta$
- Грешка у процени интензитета почетне брзине $|\vec{v}_0| - |\vec{v}_0'|$

Зато је важно узети у обзир ове утицаје при анализи резултата и калибрацији система за мерење.

Квалитет процене вештачке неуронске мреже ће се оцењивати на два начина:

1. На основу самосталних параметара ANN:
 - Конвергенција мреже
 - Грешка током тренирања
2. На основу грешке у процени физичког модела, односно параметара косог хица

3 Неуронске мреже

3.1 Дефиниција и историјски контекст

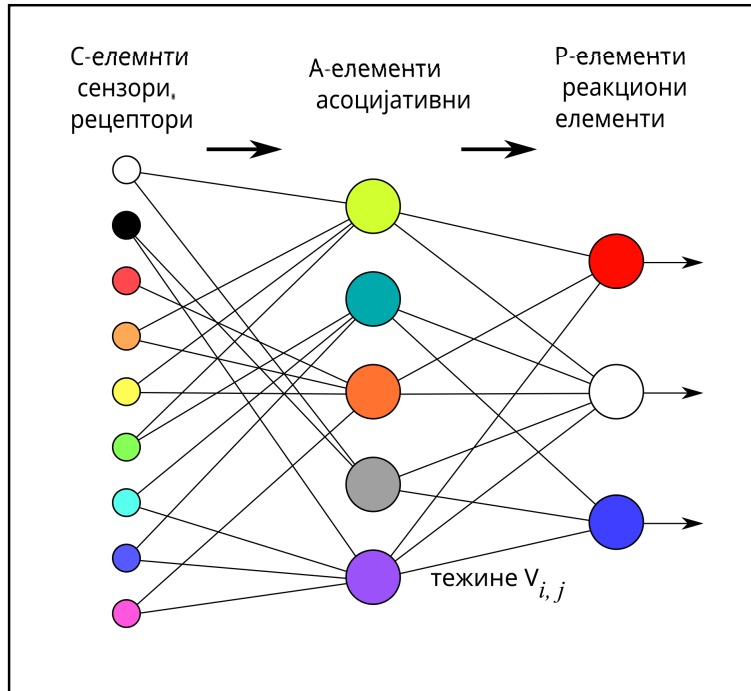
Перцептрон, један од најистакнутијих раних модела вештачких неуронских мрежа, представља математички модел инспирисан биолошким неуронима. Развио га је Френк Розенблат 1958. године, а прву практичну имплементацију остварио је кроз рачунар Mark-1. Перцептрон је основа модерне теорије дубоког учења, иако се данас класификује као једнослојна неуронска мрежа са функцијом прага (енгл. threshold activation function) и директним простирањем сигнала (feed-forward).

3.2 Структура перцептрона

Перцептрон се састоји од три кључна елемента:

3.2.1 Сензорни елементи (улазни слој)

- Примају улазне податке (нпр. особине података или сигнале са сензора).
- Сваки улаз x_i придружен је тежини w_i која одређује његов утицај на излаз.



Слика 4: Перцептрон

3.2.2 Асоцијативни елементи (тежински слој)

- Тежине w_i множе се са улазима и сумирају:

$$z = \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i + b \quad (\text{где је } b \text{ пристрасност/bias})$$

- Овај корак имитира процес интеграције сигнала у биолошком неурону.

3.2.3 Реакциони елементи (излазни слој)

- Излаз се генерише применом активационе функције $f(z)$:

$$y = f(z) = \begin{cases} 1 & \text{ако } z \geq \theta, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

где је θ праг активације. Модерни перцептрони често користе сигмоидну или ReLU функцију уместо прага.

За више детаља погледати [5], [6].

3.3 Алгоритам учења перцептрона

Перцептрон користи правило учења са надзором (supervised learning) кроз следеће кораке:

1. Иницијализација

- Тежине w_i и bias b се иницијализују насумичним вредностима.

2. Пропагација унапред (forward pass)

- Излаз y се израчунава на основу тренутних тежина.

3. Израчунавање грешке

- Грешка E је разлика између жељеног излаза d и предвиђеног y :

$$E = d - y$$

4. Ажурирање тежина (backward pass)

- Тежине се прилагођавају према формули:

$$w_i^{\text{ново}} = w_i^{\text{старо}} + \alpha \cdot E \cdot x_i$$

где је α стопа учења (енгл. learning rate).

5. Понављање

- Процес се понавља док грешка не постане занемарљива или док се не достигне максималан број итерација.

3.4 Ограничења и значај

- Перцептрон може да научи линеарно сепарабилне функције (нпр. логичко И или ИЛИ), али не и нелинеарне (нпр. XOR), што је показао Марвин Мински 1969. године.
- Иако једноставан, перцептрон је основа за разумевање сложенијих модела као што су вишеслојни перцептрони (MLP) и дубоке мреже.

4 Резултати и дискусија

У циљу изучавања понашања неуронских мрежа у процени карактеристика путање одређен је максимални интензитет брзине $|V_{max}^0| = 10 \text{ m/s}$.

На основу тога се добија максимална могућа досегнута висина за хитац право у вис $y_{max} = 5.1 \text{ m}$, док је максимални домет $r_{max} = 10.19 \text{ m}$ и он се постоји при $\theta = 45^\circ$. Максимална вредност угла је $\theta_{max} = 90^\circ$.

Резултати који су анализирани су добијени случајним избором параметара ко-сог хица, потом су на сваки временски узорак узимане координате трајекторије у датом тренутку времена. Због реалности симулације на ове координате је додан униформни шум. Изабране су само путање које имају преко шест временских узорака положаја.

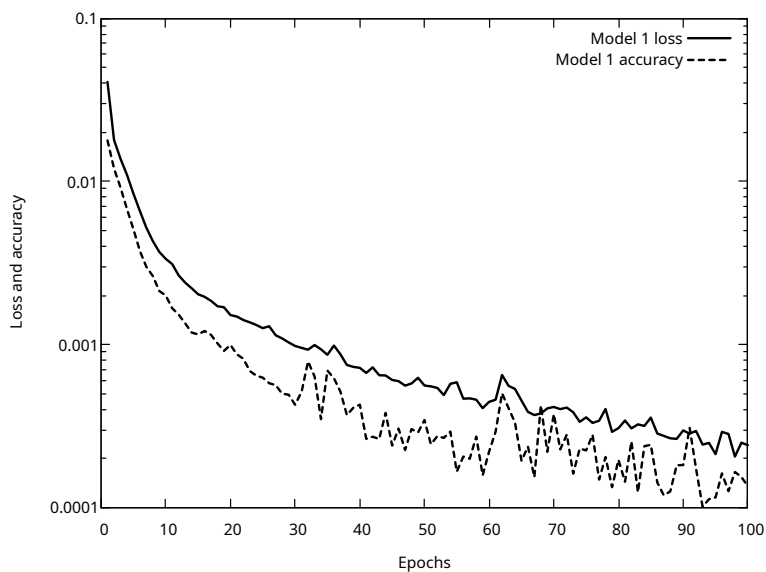
Због особености неуронских мрежа, са циљем тренирања и добијања мере квалитета њихове употребе, коришћен је нормиран сет положаја добијених предходно описаним поступком. Положаји су били нормирани и у неуринску мрежу су улазили као бездимензионе величине x/x_{max} и y/y_{max} , које могу да узимају вредности из опсега $[0, 1]$.

Анализирано је пет неуронских мрежа, свака је имала 12 улаза за шест тачака финалног дела трајекторије, и излазе који су почетна тачка трајекторије на хоризонталној оси, угао под којим је тело почело своје кретање и интензитет почетне брзине. На основу процене и познатих вредности за сваку од генерисаних трајекторија смо одређивали квалитет процене. Користили смо мреже:

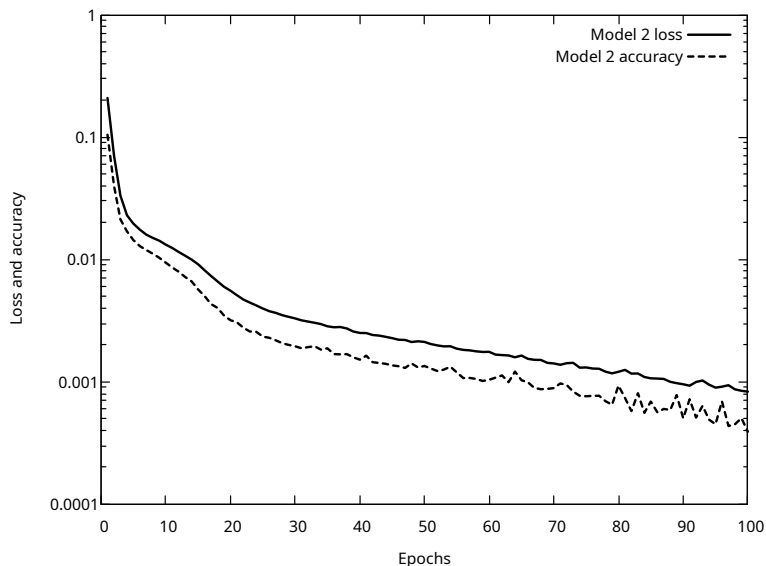
- Мрежа М1: састоји се од 3 скривена слоја са 128 неурона у првом, 64 у другом и 32 у трећем скривеном слоју.
- Мрежа М2: састоји се од 3 скривена слоја са 64 неурона у првом, 32 у другом и 16 у трећем скривеном слоју.
- Мрежа М3: састоји се од 3 скривена слоја са 21 неуроном у првом, 25 у другом и 7 у трећем скривеном слоју.
- Мрежа М4: састоји се од 2 скривена слоја са 64 неурона у првом и 32 у другом скривеном слоју.
- Мрежа М5: састоји се од једног скривеног слоја са 32 неурона.

На сликама 12 до 16 приказане су области углова домета и подељених са максималним вредностима, на апсиси r/r_{max} , а на ординати θ/θ_{max} .

На основу неконвергенције прецизности и губитака за сваку од неуронских мрежа посебно, графици 5 до 9, може да се закључи да ни једна неуронска није ушла у опсег нестабилности те да су све коректно научене.

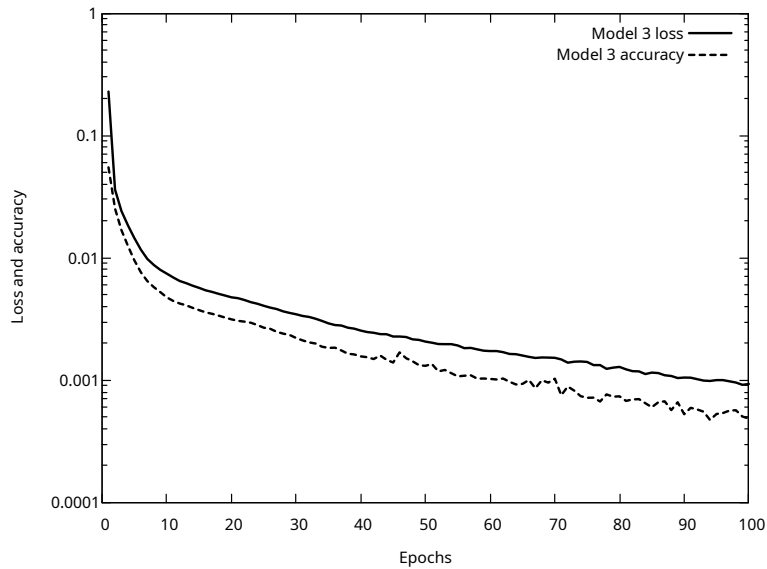


Слика 5: Губици и тачност неуронске мреже M1 током тренирања.

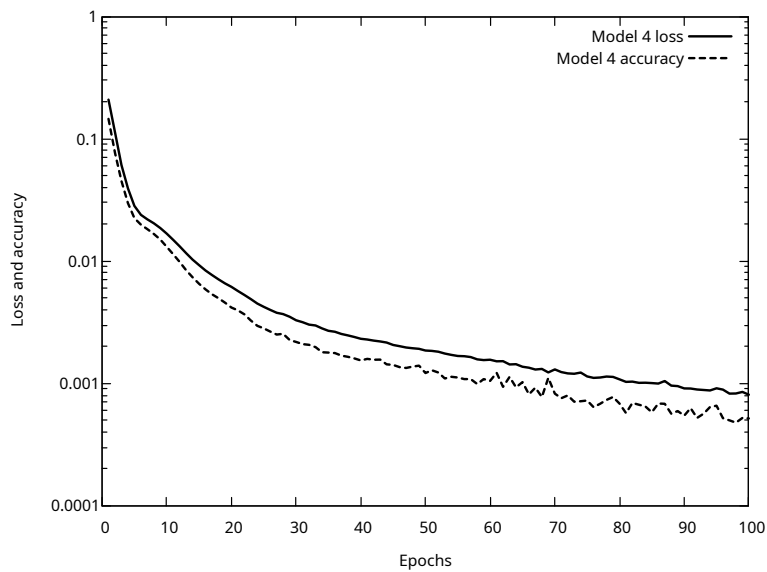


Слика 6: Губици и тачност неуронске мреже M2 током тренирања.

Са графика 10 се види да је неуронска мрежа M5 дала почетно веома брзу криву учења потом се показала као најмање употребљива. Њена предвиђања су најмање тачна од свих анализираних модела.



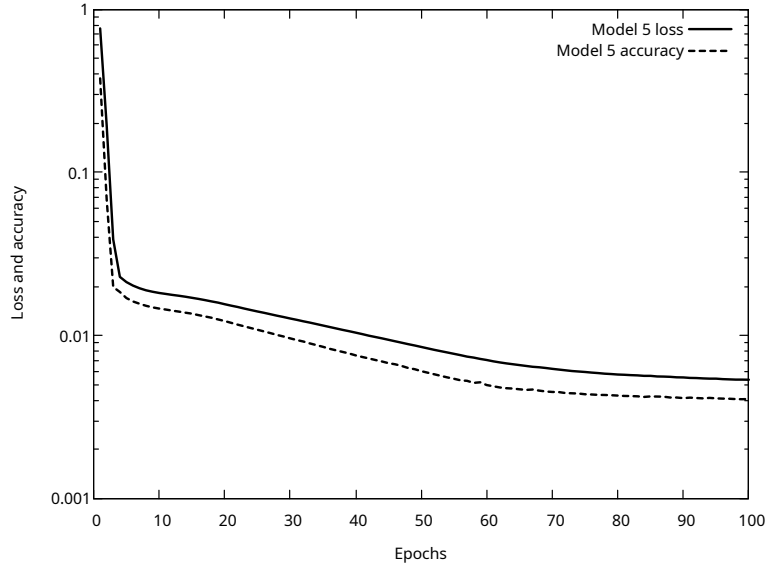
Слика 7: Губици и тачност неуронске мреже М3 током тренирања.



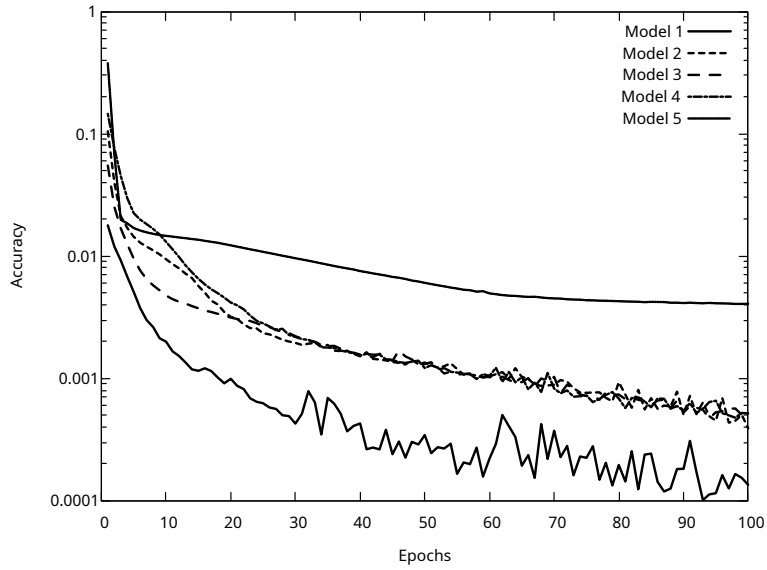
Слика 8: Губици и тачност неуронске мреже М4 током тренирања.

Такође је са графика 11 може да се закључи идентично као и са графика 10, и овим се само потврђује да није дошло до експлозије грешке или губитака које карактеришу преучену неуронску мрежу.

Поред овог поређења, које представља само грубу математичку оцену квалитета обучености неуронске мреже, кад се неуронске мреже примењују на релане физичке процеди веома је битно и у којим областима неуронске мреже дају добре процене карактеристика путање. У том циљу су направљени графици 12 до 16.



Слика 9: Губици и тачност неуронске мреже М5 током тренирања.

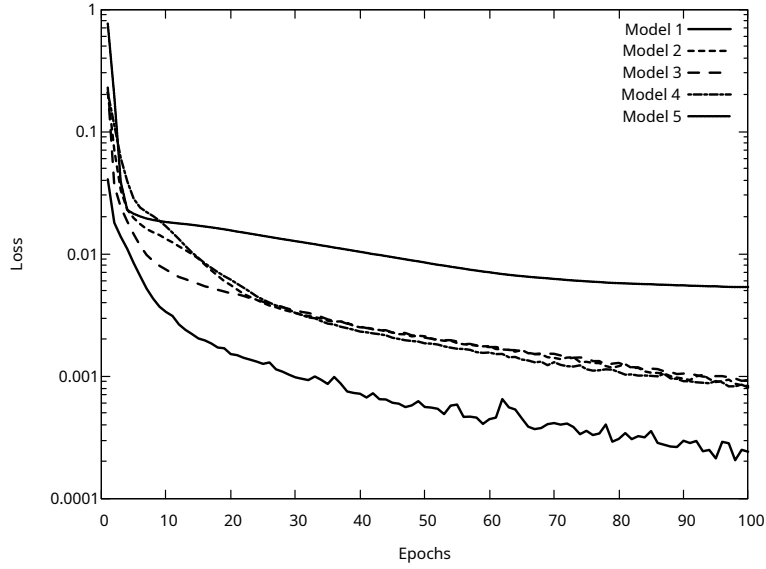


Слика 10: Поређење тачности неуронских мрежа М1 до М5 током тренирања.

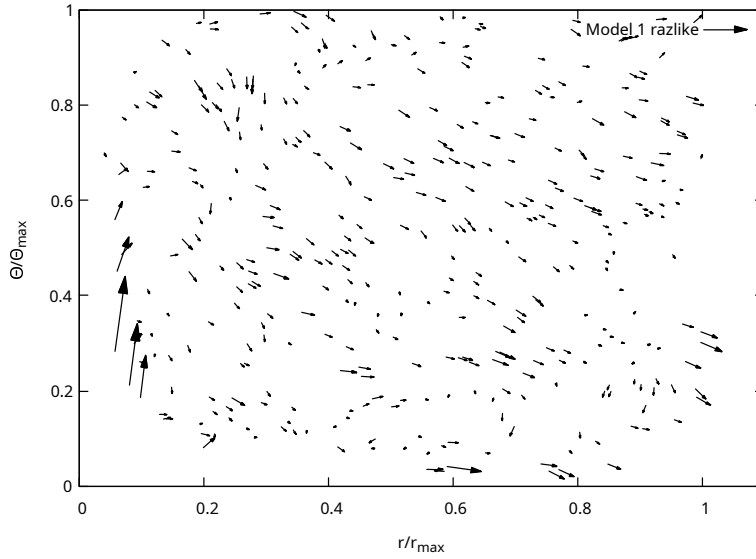
Векторима су назначене разлике између тачних и процењених вредности угла и домета.

На основу посматрања података о мрежи М1, приказаних на слици 12 види се да је само за мале домете $r/r_{max} \leq 0.1$ грешка веома велика. У свим другим опсезима домета је слика задовољавајуће добра.

На основу посматрања података о мрежи М2, приказаних на слици 13 види се да је само за домете $r/r_{max} \leq 0.3$ и за $\theta/\theta_{max} \leq 0.7$ грешка веома велика. У свим



Слика 11: Поређење губитака неуронских мрежа М1 до М5 током тренирања.

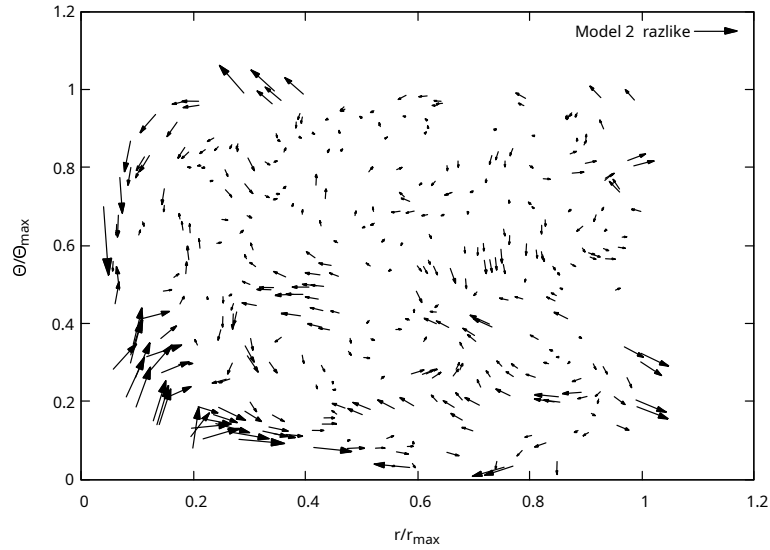


Слика 12: Векторско поље које приказије грешке процене модела 1.

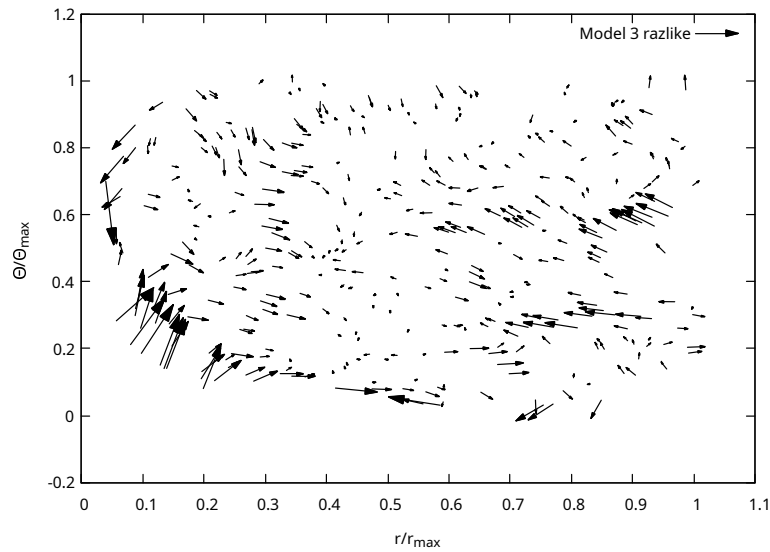
другим опсезима домета и угла је слика задовољавајуће добра.

На основу посматрања података о мрежи М3, приказаних на слици 14 види се да је само за домете $r/r_{\max} \leq 0.3$ и за $\theta/\theta_{\max} \leq 0.7$ грешка веома велика. У свим другим опсезима домета и угла је слика задовољавајуће добра.

На основу посматрања података о мрежи М4, приказаних на слици 15 види се да је само за домете $r/r_{\max} \leq 0.3$ и за $\theta/\theta_{\max} \leq 0.7$ грешка веома велика. У свим другим опсезима домета и угла је слика задовољавајуће добра.



Слика 13: Векторско поље које приказије грешке процене модела 2.

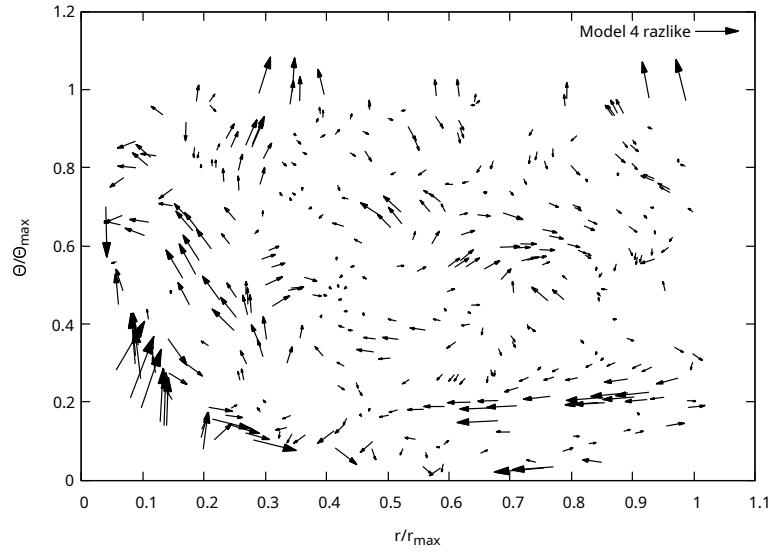


Слика 14: Векторско поље које приказије грешке процене модела 3.

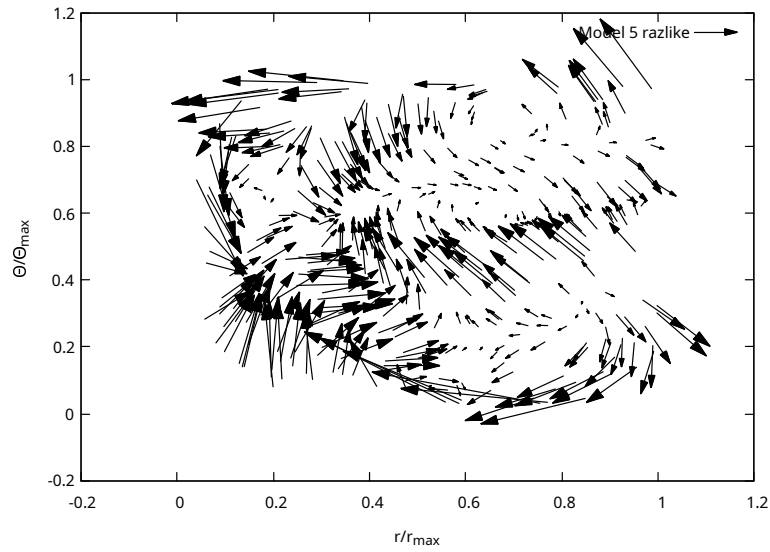
На основу посматрања података о мрежи М5, приказаних на слици 16 види се да је он скоро неупотребљив. Представља модел који се у решавању овог проблема избегава.

На основу приказаних резултата долазимо до закључка да је најквалитетнија процена неуронске мреже М1, као и да се при процени са овако уопштеном неуронском мрежом не може очекивати веома добра анализа нелинеарних система.

Из свега горе приказаног је јасно да је за добар опис нелинеарних система као што је то био случај за овде посматрано кретање материјалне тачке путањом косог



Слика 15: Векторско поље које приказије грешке процене модела 4.



Слика 16: Векторско поље које приказије грешке процене модела 5.

хица, боље да се користе дубоке неуронске мреже са густим првим скривеним слојем. Поред овога стиче се утисак да би требало да се истраживање настави путем неуронских мрежа које су свесне физике посматраног проблема (Physics-informed neural networks, PINNs).

5 Закључак

Предвиђање параметара трајекторије косог хица на основу шест последњих узастопних мерења положаја, помоћу неуронске мреже, се показао као веома интересантан модел за примену елемената машинског учења.

Како је трајекторија косог хица нелинеарна, хиперболична, овде се виде мане и предности примењених система машинског интелекта. Мрежа општег вида као што је то перцептрон не може да се користи генерално за системе који су нелинеарни у својој природи. Иако је дала добре резултате видно је да има процеса који морају да се третирају много сложенијим приступом, рецимо мрежама које су свесне физичког процеса.

Даљи развој описа овог релативно једноставног кретања и метода вештачког интелекта би могао да буде подела утренираних модела по опсезима области домета и углова. Да на основу анализираних опсега у којима је метод тачан одредимо границу примене једног модела за путање са већим дометима, а други модел за путање краћих домета, тиме би могло да се добије већа зона добро одређених карактеристика путањи. Такође, од великог интереса би био утицај нивоа шума на квалитет предвиђања, што обзиром на обим посла нисмо започели у овом кораку.

Приказаним истраживањем су само отворена врата у свет примене машинског интелекта у модерним физичким процесима и системима. Тиме се омогућава предвиђања решења сложених процеса једноставним и брзим методима. За сада се врши и примена на управљање сложеним процесима, као што је рецимо одржање услова термонуклеарне синтезе код система са магнетским конфинирањем плазме.

Може да се сумира да ова студија отвара три фундаментална правца истраживања:

- Теоријски: Развој хибридних модела који интегришу физичке законе у структуру мрежа.
- Методолошки: Квантификација утицаја шума на стабилност предвиђања.
- Примењени: Имплементација у реалним системима са ограничењима у реалном времену.

И теоријски и методолошки правац могу лако да буду реализовани у оквиру наредних истраживања.

За сада може само да се претпоставља куда могуће даље да одведу резултати овог правца истраживања, али једно је сигурно, како је машински интелект млада грана рачунарске науке и технике сигурно ће пред нама бити низ великих открића у примени ових техника на процесе моделирања, мерења и управљања у физици.

Литература

- [1] Милан Распоповић О. Физика 1 : за први разред гимназије. Завод за уџбенике Београд, 2018.
- [2] Наташа Чалуковић. Физика 1: уџбеник за први разред гимназије. Круг Београд, 2010.
- [3] Сивухин Д.В. Общий курс физики. Механика, volume Том 1. ФМЛ, 4 edition, 2005.
- [4] Matthew Sands Richard P. Feynman, Robert B. Leighton. The Feynman Lectures on Physics: Commemorative Issue Vol 1: Mainly Mechanics, Radiation, and Heat (v. 1). Addison Wesley, 1971.
- [5] Kilho Shin. Deep Learning Demystified: A Step-by-Step Introduction to Neural Networks. 2024.
- [6] Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, and Aaron Courville. Deep Learning. MIT Press, 2016. <http://www.deeplearningbook.org>.