

Математичка гимназија

Матурски рад
-из физике-

**Спонтани транспорт материје и
енергије у чврстим телима: класичан
поглед, карактеристичне величине и
границе важења**

Ученик:

Ења Вуковић, IVb

Ментор:

др Драган Маркушев, научни саветник,

Институт за физику, Београд

Београд, мај 2025.

Овај матурски рад урађен је у Лабораторији за фотоакустику Института за физику у Београду. Искористила бих ову прилику да се захвалим мом ментору, научном саветнику др Драгану Маркушеву на уложеном времену, сарадњи и помоћи при писању овог рада. Такође бих се захвалила свима који су ми давали подршку приликом израде овог рада, посебно члановима Лабораторије, научном сараднику др Драгани Маркушевој и истраживачу приправнику маг. физ. Славици Ковачевић, које су пажљиво читале овај рад и дале ми корисне примедбе и сугестије. Додатно се захваљујем мојој професорки физике Драгици Ивковић на пруженој подршци и инспирацији да се посветим физици.

Сажетак: Класична физика спонтани транспорт материје и енергије у чврстим телима описује процесима дифузије, у коме учествује огроман број сићушних градивних честица материје које се хаотично крећу. Посебно је интересантан процес топлотне дифузије као процес транспорта топлоте. Овај рад даје кратак преглед физичких и математичких основа транспорта топлоте у чврстим телима са освртом на карактеристичне физичке величине и методе карактеризације материјала, ограничења у примени закона класичне физике тог транспорта, као и на значај топлотних процеса у развоју различитих области науке и индустрије који се тичу стварању нових и унапређених материјала.

Садржај

Увод	1
Глава 1 Класична теорија транспортних процеса	2
1.1. Општа транспортна једначина	2
1.2. Дифузија	3
1.2.1. Први Фиков закон	3
1.2.2. Други Фиков закон	4
1.3. Транспорт честица	4
1.4. Транспорт топлоте	5
Глава 2 Математичко моделовање физичких система	6
2.1. Карактеристичне парцијалне диференцијалне једначине	7
2.1.1. Елиптичне једначине	7
2.1.2. Параболичне једначине	7
2.1.3. Хиперболичне једначине	8
Глава 3 Транспортни процеси у термалним системима	9
3.1. Теоријски модел	9
3.1.1. Хелмхолцова једначина	10
3.2. Врсте оптичке побуде.....	10
3.2.1. Површински апсорбер	10
3.2.2. Запремински апсорбер	11
3.2.3. Полупроводнички апсорбер.....	11
3.3. Карактеристичне величине и границе важења	12
Глава 4 Методологија карактеризације чврстих тела	14
4.1. Метод разлике температура	15
4.2. Метод карактеристичне фреквенције	15
4.3. Област примене.....	16
Закључак	18
Литература	19

Увод

Транспортне појаве у физици дефинишу се као механизми преноса неке физичке величине са једног места у простору на друго. Три основна транспортна механизма су: 1) провођење или кондукција; 2) струјање или конвекција; и 3) зрачење или радијација. Основне величине које се преносе овим механизмима су: маса, топлота и импулс. Транспортни процеси постоје само у случају када постоји разлика у вредности физичких величина на различитим местима у простору. За изучавање транспортних процеса највише се користе парцијалне диференцијалне једначине.

Са становишта класичне физике сви транспортни процеси су уско повезани са спонтаним и хаотичним кретањем градивних честица супстанце у било ком агрегатном стању – атомима и молекулима. Због тога је математичко описивање преноса физичких величина најједноставније у гасовима, а слично се описују и транспортни процеси у течностима и чврстим телима. Ако се ограничимо на чврста тела основни механизам транспорта је провођење. Овај механизам претпоставља да нема колективног кретања супстанце на макроскопском нивоу већ само на микроскопском. Процес који описује овакав транспорт назива се дифузија. У овом матурском раду, у оквиру четири поглавља биће обрађена тема спонтаног транспорта материје и енергије у чврстим телима из угла класичне физике.

У првој глави биће дате основе класичне теорије транспортних процеса засноване на молекулско-кинетичкој теорији, честичној природи супстанци и хаотичном кретању, преко основне транспортне једначине и описа процеса дифузије, са посебним освртом на транспорт честица и транспорт топлоте.

У другој глави ће бити дат осврт на то како се математички моделују физички системи, као и основни појмови које користимо у математичком описивању физичких система, првенствено дискретних и расподељених. Биће објашњено и то које су карактеристичне парцијалне диференцијалне једначине које користимо као математичку форму да опишемо физичке системе.

У трећој глави биће представљен основни теоријски модел транспортних процеса у термалним системима на основу кога се израчунавају најважнији термални параметри тог система, као што је температура у узорку и на његовим површинама, а преко којих можемо да успоставимо различите методе карактеризације материјала. Такође ће се дати једноставни примери периодичне побуде осветљавањем, које параболичне дифузионе једначине претварају у елиптичне Хелмхолцове, помоћу три најчешће коришћена модела апсорбера: површински, запремински и полупроводнички.

У четвртој глави ће бити представљени најновији методи карактеризације чврстих тела развијени у Лабораторији за фотоакустику Института за физику у Београду, где је овај рад и урађен. Показаће се да су ови методи погодни за анализу структуре различитих материјала преко топлотних карактеристика испитиваних узорака, а понајпре за утврђивање да ли је неки материјал добар топлотни проводник или изолатор. Те особине су изузетно важне када говоримо о широкој примени нових и унапређених материјала у различитим гранама науке и индустрије.

Глава 1 Класична теорија транспортних процеса

У 19. веку (1859) настала је Максвелова молекулско-кинетичка теорија гасова, заснована на атомској структури градивних честица материје које се хаотично крећу, покоравајући се Њутновим законима механике. То се најбоље види из дефиниције притиска у оквирима ове теорије, по којој је притисак једнак сили по јединици површине коју стварају појединачни атоми или молекули гаса (градивне честице) ударајући и одбијајући се од површине посуде у којој се гас налази. Ради једноставности, молекули су широко примењен термин за градивне честице материје у овој теорији.

На основу молекулско-кинетичке теорије гасова настала је и класична теорија транспортних процеса у физици. Ова теорија претпоставља да су преносиоци свих физичких величина у гасу његове градивне честице и интеракције међу њима: атоми, молекули, јони, електрони, шупљине,... На основу хаотичног кретања честица сви транспортни процеси у гасу описују се протоцима честица кроз јединичну површину, помоћу величине зване флуks. У зависности од тога која се физичка величина транспортује и преноси са једног места у гасу на друго, можемо говорити о флуksу масе или енергије (преко концентрације и топлоте), наелектрисања, итд. Транспортни процес који се описује овако дефинисаним флуksевима назива се дифузијом.

Све законитости и једначине транспортних процеса важе само ако у гасу постоји огроман број честица које се хаотично крећу. Поред гасова, исте једначине транспортних процеса се могу применити и на течности и на чврста тела.

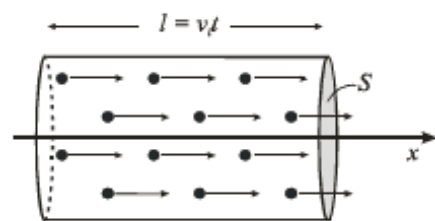
У овом раду фокусираћемо се на транспорту тј. протоцима масе и енергије на основу Максвелове молекулско-кинетичке теорије гасова. Проток тј. флуks масе ћемо описивати променама концентрације честица, а флуks енергије променама температуре у гасу.

1.1. Општа транспортна једначина

На основу молекулско-кинетичке теорије молекули гаса се у суду цилиндричног облика, попречног пресека S , крећу хаотично дуж x , y и z -осе. Ако је укупна концентрација молекула у суду једнака n , онда се дуж сваког правца креће $n/3$ молекула, а дуж сваког смера $n/6$.

Како би дефинисали транспортне процесе у физици, уводи се скаларна величина *флуks* (површинска густина протока) која представља број честица који у јединици времена прође кроз јединичну површину (брзина преноса масе). Флуks j_i једног броја честица Δn_i које крећу брзином v_i се дефинише као

$$j_i = \frac{1}{6} \Delta n_i v_i, \quad (1)$$



Слика 1. Суд цилиндричног облика са молекулама гаса који се крећу у једном смеру дуж x -осе.

где је Δn_i група молекула у суду која се креће брзином v_i . Ако сумирамо све флуkse по свим групама и свим брзинама које постоје у гасу, добијамо да је укупан флуks свих честица j једнак:

$$j = \sum j_i = \frac{1}{6} \langle v \rangle n_0, \quad (2)$$

где је $\langle v \rangle$ средња брзина, а n_0 укупна концентрација свих честица гаса. Флуks физичке величине G коју преносе честице гаса (G може бити било која физичка величина) дефинишемо као:

$$j_G = -\frac{1}{3} n_0 \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \frac{dG}{dx}, \quad (3)$$

где је $\langle \lambda \rangle$ средњи слободни пут молекула у гасу. Ова једначина представља израз за *општу транспортну једначину* величине G , и добијена је на основу претпоставке да је укупан флуks честица које пролазе кроз јединичну површину непосредно пре и после ње исти (стационарни процеси). Она нам говори да је брзина транспорта величине G у посматраном гасу, тј. флуks j_G , пропорционалан градијенту $\frac{dG}{dx}$ ове физичке величине.

1.2. Дифузија

Дифузија је природан и физички процес, који припада нестационарним процесима, и одвија се сам од себе, без мешања или утицаја са стране. То је процес при коме се градивне честице (молекули) и њихове физичке особине транспортују (преносе) у некој средини дуж одређеног правца – градијента неке физичке величине (концентрације, температуре, итд), за неко време. Зато се и каже да је дифузија молекулски транспорт масе или енергије. Чврста тела, течности и гасови подлежу процесу дифузије јер су молекули у стању да се крећу насумично, сударајући се једни са другима и мењајући свој правац.

Процес дифузије се описује првим и другим Фиковим законом. Историјски је прво дефинисан за транспорт масе преко концентрације молекула неке од компоненти раствора, а потом за транспорт енергије тј. топлоте у њему.

1.2.1. Први Фиков закон

Први Фиков закон односи се на дифузију тј. пренос масе неке компоненте у раствору (нпр. земље или мастила растворених у води). Захваљујући непрекидном хаотичном кретању, молекули посматране компоненте, који су на почетку процеса били сконцентрисани само у једном делу простора, током дифузије распоређују се равномерно по читавом простору. Када се достигне њихова равномерна расподела процес дифузије престаје у макроскопском смислу, али се наставља на микроскопском нивоу где, због хаотичног кретања, никако не престаје.

Фик је утврдио да број молекула компоненте који пролази кроз јединичну површину у јединици времена дефинише брзину дифузије тј. масени флуks j_n компоненте, који је пропорционалан градијенту $\frac{dn}{dx}$ њене концентрације n и коефицијенту дифузије D :

$$j_n = -D \frac{dn}{dx}. \quad (4)$$

Последња једначина представља општи облик првог Фиковог закона дифузије. Коефицијент дифузије D је изотропска величина – једнака у свим правцима, и зависи од величине молекула (већи молекули имају мањи коефицијент дифузије). Негативни предзнак са десне стране једнакости показује да се дифузија одвија у смеру опадања густине, тј. преласка из области веће у област мање концентрације честица.

1.2.2. Други Фиков закон

Други Фиков закон дефинише како дифузија мења концентрацију са временом. Он се добија комбинацијом првог Фиковог закона и закона одржања масе. Закон одржања масе нам говори да се у изолованом систему укупна маса током времена не мења. Језиком концентрације n посматране компоненте, закон одржања масе каже да било каква промена концентрације у времену мора изазвати промену флукса концентрације у простору:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j_n}{\partial x}. \quad (5)$$

тако да се општи облик другог Фиковог закона може написати у облику

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Ова једначина се зове и безизворна зато што подразумева да се извор молекула које се транспортују налази изван тела у коме се транспорт одвија.

1.3. Транспорт честица

Оба своја закона дифузије Фик је, као лекар и физиолог, добио на бази великог броја експеримената са различитим растворима. Његова генијалност је у томе да је он својим резултатима (1855) ударио темеље теорије транспортних процеса у физици, засноване на Максвеловој кинетичкој теорији гасова (1859). Најлакши пут добијања Фикових закона помоћу једначине (3) јесте да физичку величину G дефинишемо као бездимензионалну величину названу *уделом концентрације*. Ако посматрамо затворени суд у коме имамо мешавину две врсте молекула гаса 1 и 2, чије су концентрације n_1 и n_2 , онда је укупна концентрација молекула $n_0 = n_1 + n_2 = \text{const}$. Претпоставимо да се концентрације молекула n_1 и n_2 мењају само дуж x -осе: $n_1 = n_1(x)$ и $n_2 = n_2(x)$. Удео концентрације молекула 1 у односу на читав раствор се може дефинисати као $G = \frac{n_1(x)}{n_0}$, па је:

$$j_{n_1} = -1/3 \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \frac{dn_1(x)}{dx}, \quad (7)$$

док је за удео концентрације молекула 2 дефинисан са $G = \frac{n_2(x)}{n(x)}$, па је:

$$j_{n_2} = -1/3 \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \frac{dn_2(x)}{dx}. \quad (8)$$

Производ $\frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$ представља коефицијент дифузије D посматране компоненте. Видимо да ће за било коју компоненту раствора облик једначине бити исти, па у општем случају можемо да пишемо да је флукс честица j_n неке компоненте дуж једне координатне осе

$$j_n = -D \frac{dn(x)}{dx}, \quad (9)$$

што јесте Први Фиков закон дифузије молекула – градивних честица неке супстанце. Други Фиков закон се добија на исти начин као и у поглављу 1.2.2.

1.4. Транспорт топлоте

Уколико се физичка величина G односи на транспорт тј. провођење топлоте Q , онда говоримо о транспорту средње кинетичке енергије молекула гаса из једне тачке простора у другу. Сваки молекул појединачно преноси количину топлоте једнаку средњој кинетичкој енергији једног молекула: $G = (3/2)k_B T$. Када овај израз заменимо у једначину (3) добијамо флукс топлоте j_Q у облику:

$$j_Q = -\frac{1}{3} n \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \left(\frac{3}{2}\right) k_B \frac{dT(x)}{dx} = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho c_V \frac{dT(x)}{dx}, \quad (10)$$

где је ρ густина гаса, а c_V његова специфична топлота. Сада можемо да напишемо општи израз за флукс топлоте j_Q дуж x -осе као:

$$j_Q = -k \frac{dT(x)}{dx}. \quad (11)$$

где је $k = (1/3) \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho c_V$ тзв. коефицијент топлотне проводљивости гаса. Последња једначина представља *први Фиков закон транспорта топлоте*, још познат и као *Фуријеов закон провођења топлоте* (1822). Изведен је за гасове, али може се применити за било које агрегатно стање. Израз за коефицијент топлотне проводљивости гаса се може написати и као $k = D_T \rho c_V$ где је $D_T = (1/3) \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$ коефицијент топлотне дифузивности.

Комбинацијом израза за j_Q и закона одржања специфичне унутрашње енергије e ($e = \frac{U}{V} = \rho c_V T$) датог у облику

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}. \quad (12)$$

добија се *други Фиков закон топлотне дифузије*:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (13)$$

Глава 2 Математичко моделовање физичких система

Математички модел подразумева математички запис понашања или особина неког физичког система. Ако је немогуће израдити тачан математички модел, онда се приступа одређеним апроксимацијама, тј. занемаривању оних особина које нису од великог утицаја на систем.

Математички модел неког физичког система чини заправо систем диференцијалних једначина којима се описује његово понашање на основу познавања физичких особина и законитости које у њему владају. Овај модел описује физички систем преко релација између његових карактеристичних величина, које се мењају у простору и времену.

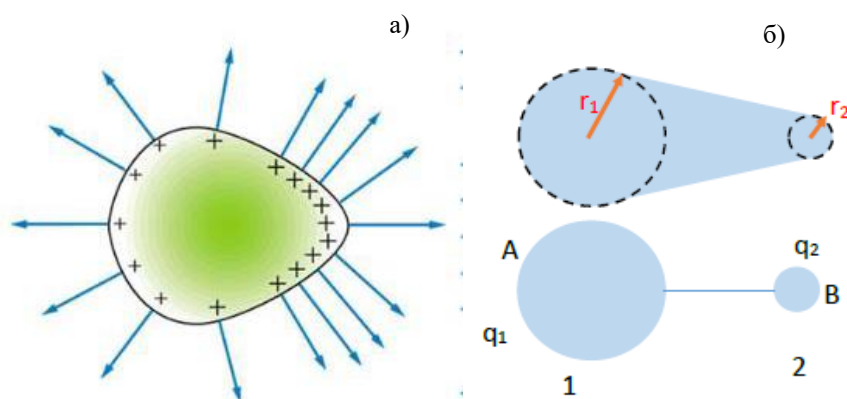
Физички системи могу бити:

-*дискретни*, који се математички описују *обичним* диференцијалним једначинама

-*расподељени*, који се математички описују *парцијалним* диференцијалним једначинама

Типичан пример дискретног система је електрично RC коло, у коме су сви битни физички параметри концентрисани на једном месту, у отпорнику или кондензатору. Типичан представник расподељеног система је струјни проводник који проводи струју нпр. између далековада, као и физички систем наелектрисаног тела у коме су физички параметри, нпр. наелектрисања, расподељени линијски, површински или запремински.

Расподељени системи се могу приближно представити дискретним системима, што решавање различитих проблема чини једноставнијим. Један такав пример свођења расподељеног на дискретан систем је приказан на слици 2. На њој је метални проводник произвољног облика, наелектрисан позитивним наелектрисањем, који представља типичан пример расподељеног система (слика 2.а). Тај систем се приближно може описати дискретним системом (слика 2.б) од две наелектрисане кугле А и В, различитог полупречника ($r_1 \neq r_2$) и различитих наелектрисања ($q_1 \neq q_2$), повезаних танком металном нити (танка плава линија између).



Слика 2. Типичан изглед а) расподељеног система и б) његовог истоветног дискретног система.

2.1. Карактеристичне парцијалне диференцијалне једначине

Парцијалне диференцијалне једначине у математици дају везу између функција више променљивих $\varphi = f(r, t)$ и њених промена изражених преко извода по просторним координатама (x, y, z) и времену t .

У расподељеним системима физички процеси се описују *линеарним парцијалним диференцијалним једначинама другог реда* чији је општи облик:

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + E \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + F \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + G \frac{\partial \varphi}{\partial x} + H \frac{\partial \varphi}{\partial y} + I \frac{\partial \varphi}{\partial z} = J + K \frac{\partial \varphi}{\partial t} + L \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + M \varphi \quad (14)$$

Општи изглед парцијалне диференцијалне једначине нам говори да је физичка величина φ функција више променљивих, тј. да се мења у простору и то дуж оса x , y и z , и да се мења и у времену t . Коефицијенти $A, B, \dots, M$ могу бити како константе, тако и функције координата и времена. Разликујемо следеће типове парцијалних диференцијалних једначина:

-једначине елиптичног типа

-једначине параболичног типа и

-једначине хиперболичног типа.

2.1.1. Елиптичне једначине

Једначине елиптичног типа су облика:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = J(x, y, z, t) \quad (15)$$

или

$$\nabla^2 \varphi = J(x, y, z, t) \quad (16)$$

где је

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (17)$$

То је најједноставнији облик парцијалних диференцијалних једначина где имамо промену физичке величине φ само по координатама.

2.1.2. Параболичне једначине

Једначине параболичног типа су облика:

$$\nabla^2 \varphi = K \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (18)$$

и она је позната под називом *дифузиона једначина*.

Овај облик једначине је нешто сложенији од елиптичне једначине јер нема само промену физичке величине φ по координатама, већ и први извод по времену.

2.1.3. Хиперболичне једначине

Једначине хиперболичног типа су облика:

$$\nabla^2 \varphi = L \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (19)$$

Ово је најкомпликованији тип парцијалних диференцијалних једначина, јер садржи и други извод по координатама и други извод по времену. Једна од најпознатијих хиперболичних парцијалних диференцијалних једначина је модификована дифузиона једначина (други Фиков закон), тј. модификована једначина провођења топлоте:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{D_T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (20)$$

где је c брзина простирања топлоте.

Глава 3. Транспортни процеси у термалним системима

Термодинамика проучава системе састављене од великог броја честица којима се преноси енергија тј. топлота. Постоје неколико механизма преношења топлоте: провођење (кондукција), струјање (конвекција) и зрачење. У чврстим телима је доминантан механизам провођења топлоте и он се описује процесом дифузије. Дифузија топлоте је процес који пренос топлоте посматра као интеракцију градивних честица материје.

Дифузија топлоте се одиграва под утицајем градијента температуре који настаје као последица постојања различитих температура на различитим местима посматраног тела. Дифузија говори о транспорту топлоте са места виших на места нижих температура, што је у складу са другим принципом термодинамике, који каже да ентропија неког неравнотежног система може само да расте све док систем не дође у равнотежу. Другим речима: Топлота никада не прелази спонтано са тела које има нижу температуру на тело које има вишу температуру, већ топлота спонтано прелази само са тела више температуре на тело ниже температуре, на шта нас подсећа и смер градијента температуре.

3.1. Теоријски модел

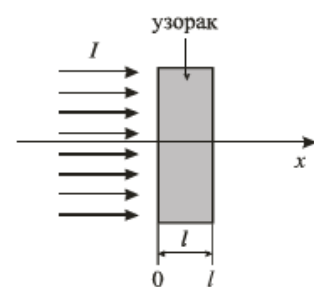
Провођење топлоте је процес термалне дифузије између различитих тела или унутар једног те истог тела.

Теоријски модел провођења топлоте заснива се на параболичној дифузионој једначини (18) транспорта топлоте, коју представљамо на најједноставнији начин као једнодимензионалну - 1D једначину облика

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (21)$$

Она служи за добијање аналитичког облика расподеле температуре унутар тела и на његовој површини у сваком тренутку.

Решавање ове једначине уме да буде компликовано, и зато постоји неколико ефикасних начина да се њено решавање поједностави. Један од њих претпоставља промену температуре у узорку проузроковане периодичним осветљавањем. На тај начин параболичну једначину сводимо на елиптичну, чије је решавање много једноставније. Шематски приказ која одговара овом начину дат је на слици 3.



Слика 3. Осветљавање непрозирног узорка облика кружне плоче дебљине l .

Свођење параболичне на елиптичну једначину састоји се у следећем. Узмимо најједноставнији пример са слике 3, а то је хомогени и непрозирни узорак облика танке кружне плоче који је осветљен са једне стране светлосћу интензитета $I = I_0(1 + e^{i\omega t})$. Периодично осветљавање условљава периодичну промену температуре: $T = T_0(1 + e^{i\omega t})$. Светлост се апсорбује само на осветљеној површини, а топлота се проводи само дуж x -осе. Када израз за периодичну промену T заменимо у дифузиону једначину (21) добијамо:

статичку једначину: $\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = 0$ која не утиче на настајање механичких таласа и

динамичку једначину: $\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} - \sigma^2 T(x) = 0$.

Последња једначина представља парцијалну елиптичку, тзв. Хелмхолцову једначину простирања топлоте, која процес дифузије топлоте посматра као процес простирања равних механичких таласа.

3.1.1. Хелмхолцова једначина

Хелмхолцова једначина је елиптична парцијална диференцијална једначина чији се општи облик може написати као:

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} - \sigma^2 T(x) = J(x) \quad (22)$$

где је $\sigma = (1 + i) \frac{1}{\mu}$ комплексни коефицијент термалне дифузије, i – имагинарна

јединица, μ - термална дифузиона дужина, $\mu = \sqrt{\frac{2D_T}{\omega}}$, $\omega = 2\pi f$, а f је фреквенција модулације. Величина $J(x)$ представља унутрашње (запреминске) изворе топлоте који могу да се јаве под посебним околностима. Ако је $J(x) = 0$ једначина (22) је хомогена, а у случају $J(x) \neq 0$ једначина је нехомогена.

3.2. Врсте оптичке побуде

Применом периодичне оптичке побуде морамо бити опрезни, јер се описивање карактеристика једног те истог материјала мора извести на основу тога да ли се апсорпција светлости врши само на осветљеној страни узорка или до ње долази и у запремини. Такође, врло је битно знати да ли имамо посла са полупроводничким материјалом, јер постојећи слободни носиоци у њима, електрони и шупљине, могу драстично да промене температурну слику узорка.

3.2.1. Површински апсорбер

Уколико претпоставимо да се апсорпција светлости дешава само на површини узорка, простирање топлоте у њему описује се хомогеном Хелмхолцовом једначином ($J(x) = 0$) облика

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} - \sigma^2 T(x) = 0. \quad (23)$$

Помоћу ње се, решавањем граничних услова, добија најједноставнији облик расподеле температуре $T(x)$ у неком узорку дебљине l који је осветљен са једне стране:

$$T(x) = \frac{I_0}{k\sigma} \cdot \frac{\cosh[\sigma(x-l)]}{\sinh(\sigma l)}. \quad (24)$$

Узорак чија је расподела температура по простору (x) и по фреквенцијама (f) дата последњом једначином називамо површинским апсорбером.

3.2.2. Запремински апсорбер

Уколико претпоставимо да се апсорпција светлости не дешава само на површини већ и у запремини узорка (светлост дубоко продире у материјал), простирање топлоте у њему описује се нехомогеном Хелмхолцовом једначином ($J(x) = -\frac{\beta I_0}{k} \cdot e^{-\beta x}$) облика

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} - \sigma^2 T(x) = -\frac{\beta I_0}{k} \cdot e^{-\beta x}, \quad (25)$$

тако да се решавањем граничних услова добија расподела температуре $T_V(x)$ у неком узорку дебљине l , који је осветљен са једне стране, облика:

$$T_V(x, \omega) = \frac{I_0}{k} \cdot \frac{\beta}{\beta^2 - \sigma^2} \left\{ \frac{\beta}{\sigma} \cdot \frac{\cosh[\sigma(x-l)] - e^{-\beta l} \cdot \cosh(\sigma x)}{\sinh(\sigma l)} - e^{-\beta x} \right\} \quad (26)$$

где је β – апсорпциони коефицијент датог материјала на датој таласног дужини, који говори о ефикасности апсорпције на различитим таласним дужинама побудне светлости. Величина $J(x) = -\frac{\beta I_0}{k} \cdot e^{-\beta x}$ представља запремински извор топлоте тј. место у запремини материјала где је дошло до директног претварања апсорбоване светлосне енергије у топлоту. Узорак чија је расподела температура по простору (x) и по фреквенцијама (f) дата последњом једначином (26) називамо запреминским апсорбером.

3.2.3. Полупроводнички апсорбер

Уколико се полупроводнички узорак осветли светлошћу одговарајуће енергије (таласне дужине) која је већа или једнака енергији процепа између валентне и проводне зоне полупроводника, долази до генерације слободних носилаца, тј. настају парови електрон-шупљина. При томе долази до два главна процеса ослобађања топлоте који загревају узорак: 1) брза рекомбинација при којој се електрони и шупљине рекомбинују одмах након стварања, и 2) спора рекомбинација до које долази тек након неког времена које одговара времену живота носилаца, тако да су места рекомбинације и ослобађања топлоте далеко од места њиховог настанка, дубоко у запремини узорка.

Сада је $J(x)$ функција која има две извора топлоте: један извор топлоте од брзе, а други од споре рекомбинације. Њен облик је дат са:

$$J(x) = -\frac{\beta I_0}{k} \cdot e^{-\beta x} \cdot \frac{\varepsilon - \varepsilon_g}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon_g}{k \tau_p} \cdot \delta n_p(x) \quad (27)$$

где је $\delta n_p(x)$ – промена концентрације мањинских носилаца (нпр. шупљина код полупроводника n -типа), τ_p – време живота носиоца, ε – енергија фотона побудне светлости, ε_g – енергетски процеп између валентне и проводне зоне код полупроводника, β је апсорпциони коефицијент датог материјала. Хелмхолцова једначина је онда нехомогена парцијална диференцијална једначина облика:

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} - \sigma^2 T(x) = -\frac{\beta I_0}{k} \cdot e^{-\beta x} \cdot \frac{\varepsilon - \varepsilon_g}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon_g}{k \tau_p} \cdot \delta n_p(x) \quad (28)$$

Ова једначина ће дати изузетно компликовану једначину за температуру са учешћем носилаца, која у ствари представља збир температуре запреминске апсорпције

$T_V(x, \omega) \cdot \frac{\varepsilon - \varepsilon_g}{\varepsilon}$, температуре површинске рекомбинације $T_{SR}(x, \omega, s_1, s_2)$ и температуре запреминске рекомбинације $T_{VR}(x, \omega, \tau_p)$:

$$T(x, \omega) = T_V(x, \omega) \cdot \frac{\varepsilon - \varepsilon_g}{\varepsilon} + T_{SR}(x, \omega, s_1, s_2) + T_{VR}(x, \omega, \tau_p) \quad (29)$$

где су s_1 и s_2 – површинске брзине рекомбинације на осветљеној (s_1) и неосветљеној (s_2) површини узорка, као параметри који дефинишу ефикасност површинске рекомбинације.

3.3. Карактеристичне величине и границе важења

Транспорт топлоте провођењем у чврстим телима је добро позната појава, чији математички опис датира од када је Фурије дефинисао чувени закон који носи његово име (једначина (11)). Међутим, улога коју у овим појавама играју различити физички параметри који регулишу транспорт топлоте (термални, просторни, временски) често није добро позната или се погрешно тумачи. Посебну пажњу треба обратити на неке карактеристичне дужине и карактеристична времена које играју веома важну улогу у разумевању феномена транспорта топлоте. Њихове вредности су различите за различите супстанце, па је зато неопходно да се помоћу њих дефинишу границе важења закона који те појаве описују. У даљем тексту биће наведене поменуте карактеристичне величине и дате њихове бројне вредности за неке од најчешће помињаних супстанци.

Први и други Фиков закон (4) дефинише величину $D \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$, тзв. *коэффициент дифузије честица* кроз неку средину, чије се вредности крећу од $10^{-3} - 10^{-5}$ у гасовима, $10^{-9} - 10^{-10}$ у течностима, до $10^{-13} - 10^{-14}$ у чврстим телима.

Фуријеов закон (11) важи и за чврста тела и дефинише величину $k \left[\frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$ тзв. *коэффициент топлотне проводљивости*, чије вредности се крећу од 0,026 за ваздух, 0,6 за воду, бетон 0,9, челик 25, алуминијум и силицијум од 250 до 275, бакар 384, а природни дијамант од 895 до 1350.

Дифузиона једначина (13) дефинише величину $D_T = \frac{k}{\rho c_V} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$, тзв. *коэффициент топлотне дифузивности*, која говори о односу способности супстанце да проводи топлоту и да је складишти. Овде је ρ густина супстанце а c_V њен специфичан топлотни капацитет. Вредности $D_T \times 10^{-6}$ се крећу од 0,08 за дрво и гуму, за воду 0,14, за стакло 0,34, 1 за дијамант, челик 4, ваздух 20, силицијум и алуминијум од 88 до 98, сребро 165, а угљеник 216.

Дифузиона једначина (13) дефинише и величину $t_c = \frac{R^2}{D_T} [\text{s}]$, тзв. *карактеристично време дифузије топлоте* кроз посматрану запремину супстанце облика сфере полупречника R . За вредност $D_T = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, и сферу пречника 1 cm добија се $t_c = 100 \text{ s}$, а за сферу полупречника 1 km, као што је Земља, ово време је око 10^{12} година. Обе вредности су сагласне са свакодневним искуством. Али проблем настаје када имамо посла са сферама пречника између 100 и 1 nm (оне су карактеристичне димензије тзв. наносвета), за које добијамо за ова времена вредности у распону од око 10 ps до 1 ps. На овим кратким временским скалама Фуријеов закон (11) тј. класична физика не важи. У тако малим оквирима јесте време релаксације квазичестица тзв.

фонона, кваната вибрационе енергије која се размењује између атома у чворовима кристалне решетке.

Хелмхолцова једначина (22) дефинише величину $\mu = \sqrt{\frac{2D_T}{\omega}}$ [m], тзв. *дужину термалне дифузије*, која је пропорционална дубини простирања топлоте у чврстим телима на којој топлотни флуks опада e пута. Вредности μ зависе од фреквенције побуде ω .

Параметри који су такође битни за транспорт топлоте у чврстим телима јесу оптички параметри. Ако се осврнемо на запремински апсорбер, карактеристичан оптички параметар узорка је *апсорпциони коефицијент* β [m⁻¹], који зависи од таласне дужине побудне светлости. Његове вредности у оптичком делу спектра могу да се промене за неколико редова величине (10, 100, 1000 пута). Реципрочна вредност апсорпционог коефицијента директно је пропорционална дубини продирања светлости у узорак. У случају нпр. силицијума, β се мења у видљивој области од (10⁵ – 10⁸) m⁻¹, што одговара дубини продирања од (10⁻⁸ – 10⁻⁵) m. Дубина продирања уједно дефинише и границу када узорак постаје транспарентан за одређену таласну дужину светлости.

Глава 4. Методологија карактеризације чврстих тела

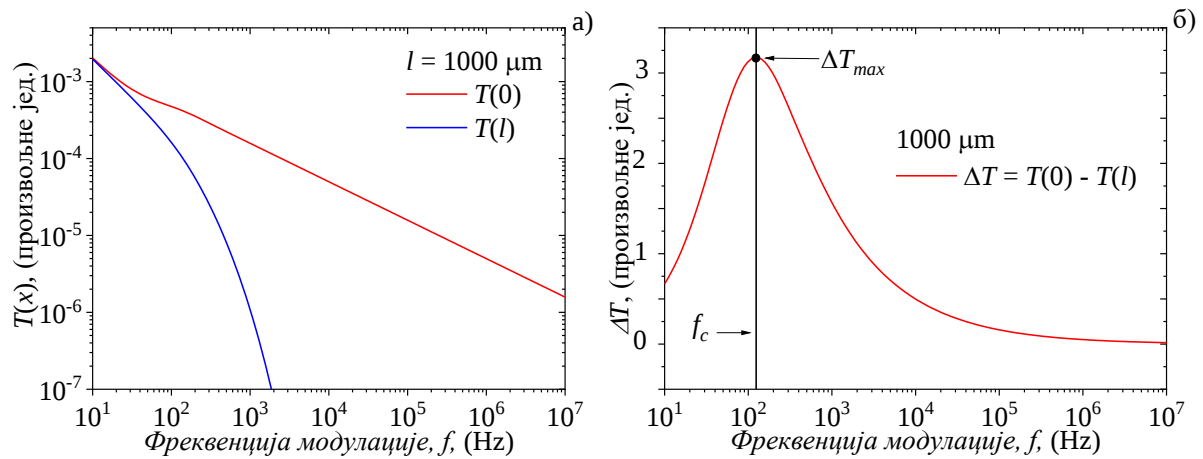
Да би анализирали структуру супстанце, тј. окарактерисали различите материјале обично користимо две методе:

-методу разлике температура и

-методу карактеристичне фреквенције.

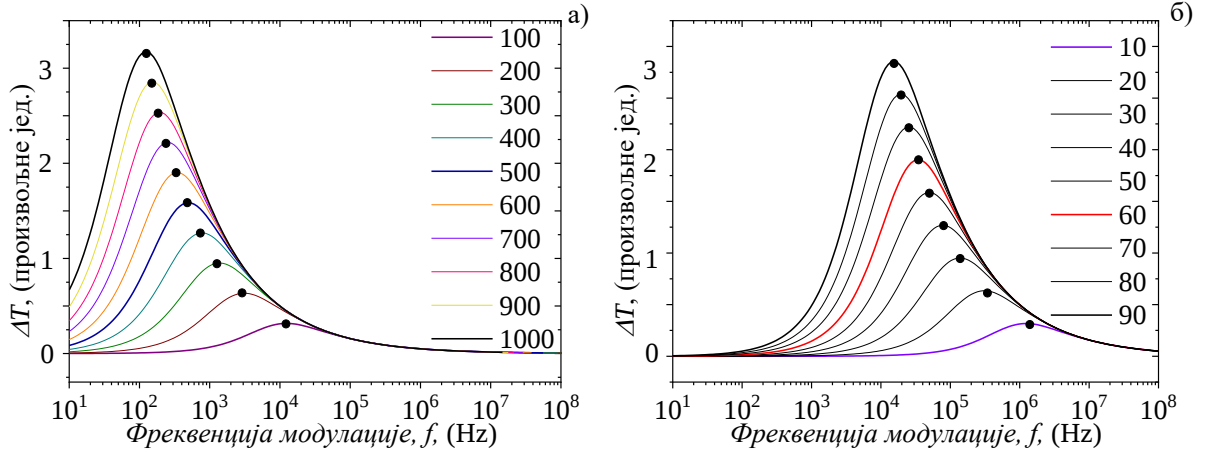
Помоћу те две методе на најједноставнији начин можемо да утврдимо да ли је неки материјал добар проводник или изолатор и на који начин тај материјал складишти топлоту. Пошто се ради о превођењу топлоте на основу класичне теорије транспорт топлоте врши се помоћу градивних честица.

Ради једноставности, искористимо резултате за $T(0)$ и $T(l)$ добијене за алуминијум дебљине $l = 1000 \mu\text{m}$ као површински апсорбер помоћу формуле (25), и прикажимо их на слици а), а њихову разлику $\Delta T = T(0) - T(l)$ на слици б). На слици б) се јасно уочавају две карактеристичне тачке: вредност максималне разлике температура ΔT_{max} и карактеристична фреквенција f_c њеног положаја (у литератури се ова фреквенција означава као cut-off фреквенција)



Слика 4. Анализа алуминијума дебљине $l = 1000 \mu\text{m}$ као површинског апсорбера и вредности: а) $T(0)$ и $T(l)$ добијене помоћу формуле (25), и б) њихова разлика $\Delta T = T(0) - T(l)$ са карактеристичним тачкама ΔT_{max} и f_c .

Расподеле температура, као и њихове разлике, зависе од дебљине материјала. За нашу анализу довољно је посматрати само разлике температура за различите дебљине алуминијума приказане на слици 4 за дебљине од: а) $1000 \mu\text{m}$ па до $100 \mu\text{m}$ у корацима од $100 \mu\text{m}$ и б) $90 \mu\text{m}$ до $10 \mu\text{m}$ у корацима од $10 \mu\text{m}$. Са ових слика је јасно да се смањењем дебљине узорка смањују вредности ΔT_{max} а повећавају вредности f_c . Оваква анализа нам пружа могућност да дефинишемо основе ове две поменуте методе за карактеризацију материјала.



Слика 5. Анализа понашања ΔT_{max} и f_c алуминијума дебљина од: а) 1000 μm па до 100 μm у корацима од 100 микрона и б) 90 μm до 10 μm у корацима од 10 микрона.

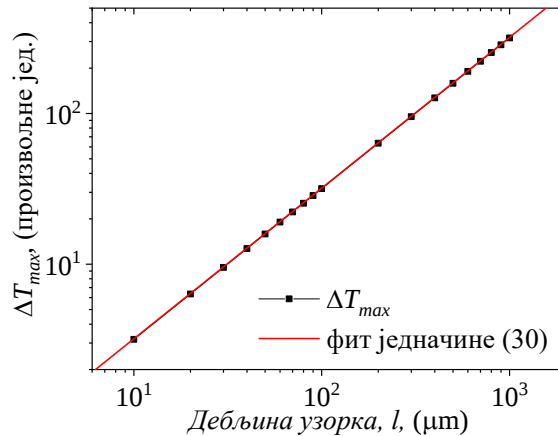
4.1. Метод разлике температура

Помоћу једначина за површински или запремински апсорбер добијамо температуру на предњој осветљеној површини узорка и температуру на задњој неосветљеној страни узорка. Ако искористимо Фуријеов закон провођења топлоте можемо да напишемо да је

$$H = \frac{Q}{\Delta t} = kS \frac{\Delta T}{\Delta x}, \quad (30)$$

где је H брзина протока топлоте, Q је количина топлоте која се у јединици времена пренесе кроз површину S (слика 1). Ако узмемо да је $\Delta T = \Delta T_{max}$ и $\Delta x = l$, онда последњу једначину можемо да напишемо у облику

$$\Delta T_{max} = \frac{H}{kS} l. \quad (31)$$



Слика 6. Зависност ΔT_{max} од l алуминијумских узорака са слике 5 (црне тачке) и фит (црвена линија) добијен једначином (31).

Ако израчунамо ΔT_{max} помоћу литературних података за H и за сваку дебљину материјала са слике 5 познатог попречног пресека S добићемо линеарну зависност $\Delta T_{max} = f(l)$ у log-log скали (слика 6), са коефицијентом правца праве помоћу кога се одређује коефицијент топлотне проводљивости k .

Овако добијена зависност назива се референтном кривом алуминијума (црвена линија са слике 6). Уколико се експериментални резултати алуминијумских узорака поклапају са црвеном линијом са слике 6 онда смо сигурни да је то чисти алуминијум. Уколико експериментални резултати одступају од црвене линије, узорак је или механички оштећен или има примесе и нечистоће. Овакав метод карактеризације алуминијума може се применити на било који други чврсти материјал.

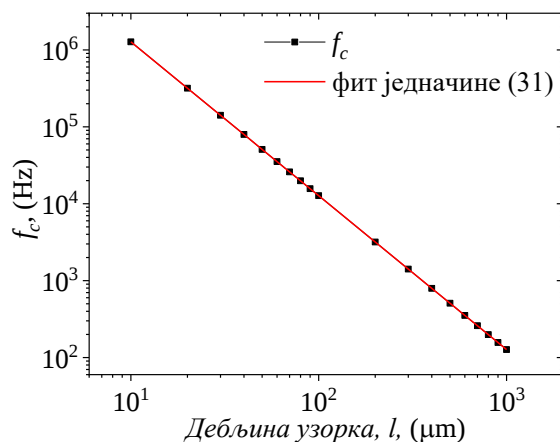
Дакле, уз помоћ ове методе карактеризације материјала ми на основу промена дебљине материјала можемо анализом температуре, тј. преко разлике температура на осветљеној и на неосветљеној страни да израчунамо коефицијент топлотне проводљивости (k), односно да добијемо топлотну карактеристику тог материјала.

4.2. Метод карактеристичне фреквенције

Ова метода заснива се на томе да се променом фреквенције светлости која осветљава узорак мења и разлика у температури на осветљеној и неосветљеној страни узорка. Из теоријског модела и производа σl може се добити формула за f_c у облику

$$f_c = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{D_T}{l^2}, \quad (32)$$

Ако израчунамо f_c помоћу теоријског модела за сваку дебљину материјала са слике 5 добићемо линеарну зависност $f_c = f(l^{-2})$ у log-log скали (слика 7), чији коефицијент правца праве одређује коефицијент топлотне дифузије D_T . Поступак анализе је сличан као и у претходном случају. Свако одступање експерименталних резултата од референтне криве треба пажљиво размотрити и утврдити прави узрок одступања.



Слика 7. Зависност f_c од l алуминијумских узорака са слике 5 (црне тачке) и фит (црвена линија) добијен једначином (32).

4.3. Област примене

Ове две методе нашле су примену у различитим научним и индустријским гранама, од електронске, преко ауто- и авио-индустрије, па до истраживања и расвоја МЕМС (Микро Електро Механички Системи) и НЕМС (Нано Електро Механички Системи) сензора, широко примењиваних у свемирској индустрији и медицини. Такође, ове методе могу послужити у оквирима развоја унапређених и нових материјала.

МЕМС сензори су врло осетљиви сензори који јако добро реагују на промене притиска, температуре, концентрације итд. Да би имали поуздан сензор, морамо јако добро познавати карактеристике материјала, поготово оног који чини његове виталне делове. Узмино, на пример, МЕМС сензор притиска. Његов витални део је танка силицијумска мембрана (дебљине до 50 микрона). Силицијум као полупроводнички материјал је јако добар за израду ових МЕМС сензора јер је јако добар механички материјал, врло издржљив и има добра еластична својства. Та мембрана мери притисак у некој комори нпр. притисак у кабини авиона или свемирске станице, тако што представља једну плочу минијатурног кондензатора, и физички дели простор на део чији притисак се мери и комору са сталним притиском. Када је притисак исти са обе стране мембрана је равна, а промена притиска са једне стране доводи до савијања мембране и промене капацитета кондензатора. Чим дође до промене капацитета, пали се аларм сигнализирајући да нешто није у реду. Међутим, до савијања може доћи и променом температуре мембране (загревањем или осветљавањем) што може довести до лажних и непожељних сигнала. Да би се то предупредило, потребно је до детаља испитати термалне и апсорпционе карактеристике силицијума. Ово је посебно важно за просторе где бораве астронаути и где мора да се детектује било каква промена притиска да не би дошло до катастрофе.

Осим сензора, ове методе се користе и у индустрији добијања нових и унапређених материјала. Нови материјал означава материјал који раније није коришћен, било сам или за производњи другог производа, или у било коју сврху. Унспређени материјал означава сваки значајно побољшани материјал који пружа изразиту предност у физичким или функционалним карактеристикама у поређењу са конвенционалним материјалима. Додавањем различитих примеса можемо унапредити полупроводнички материјал да постане потпуно пасиван на генерацију носилаца осветљавањем у једном делу таласних дужина из видљивог дела спектра. Слично се у грађевинској индустрији, на пример, додавањем различитих компонената бетону он може унапредити тако да постаје мање осетљив на мржњење, јер те компоненте спречавају утицај ниских температура тако да се бетон може изливати и на температурама испод нуле.

Закључак

У овом раду приказане су основе класичне теорије транспортних процеса у физици, са нагласком на спонтани транспорт материје и енергије (топлоте) заснован на хаотичном кретању градивних честица супстанце (атома и молекула), онако како је то описано у Максвеловој кинетичкој теорији гасова.

Приказан је и математички апарат којим се различити типови парцијалних диференцијалних једначина користе да опишу транспортне процесе у физици сложених, тзв. расподељених система, који нас реално окружују. Дат је опис теоријског модела који, кроз периодично осветљавање узорка, омогућава прелазак од сложенијих (параболичних) ка простијим (елиптичним) типовима парцијалних диференцијалних једначина које се једноставније решавају.

Дат је пример решавања Хелмхолцове једначине, у оквирима транспорта енергије и израчунавања просторних и фреквентних промена температура у периодично осветљаваном узорку, кроз три модела апсорбера светлости из видљивог дела спектра: површински, запремински и полупроводнички. У оквирима приказаних модела издвојене су карактеристичне физичке величине за транспорт топлоте. На основу тих величина дате су и границе важења описаног теоријског модела.

На крају су дата и два најважнија метода карактеризације материјала развијена у Лабораторији за фотоакустику Института за физику у Београду. Оба метода се заснивају на разлици температура на осветљеној и неосветљеној страни узорка и на карактеристичним фреквенцијама које дефинишу максималну разлику тих температура. Овим методама могуће је прецизно окарактерисати, како стандардне, тако и нове и унапређене материјале, кроз анализу два најважнија параметра транспорта топлоте, коефицијента топлотне проводљивости и топлотне дифузивности. Указано је на широку област њихове примене, од МЕМС-а и НЕМС-а у свемирској и авио индустрији, па до примене у електронским колима и појединим секторима грађевинске индустрије.

Литература

- [1] Наташа Чалуковић, Физика 2, Круг Београд, 2011.
- [2] Драгана К. Маркушев, Утицај фотогенерисаних носилаца наелектрисања на термалне и еластичне особине силицијума n -типа, докторска дисертација, Електронски факултет, Универзитет у Нишу, 2021.
- [3] Žižić B., Kurs opšte fizike: Molekularna fizika, termodinamika, mehanički talasi, Građevinska knjiga, Beograd, 1988.
- [4] Sirs F. V., Uvod u termodinamiku, kinetičku teoriju gasova i statističku mehaniku, Vuk Karadžić, Beograd, 1969.
- [5] Иродов И. Е., Общая физика: Физика макросистем – основные законы, Лаборатория Базовых Знаний, Москва, 2002.
- [6] Матвеев А. Н., Молекулярная физика, Высшая школа, 1987.
- [7] Yavorsky B. M., Pinsky A. A., Fundamentals of Physics, Volume I, Mir Publishers, Moscow, 1987.
- [8] Mirko M. Milić, Električno modelovanje fizičkih procesa, Bit inženjering, Beograd, 2004.
- [9] E. Marín, Characteristic dimensions for heat transfer, *Latin-American Journal of Physics Education*, **4**, (1), 2010, pp. 56-60, http://www.lajpe.org/jan10/10_Marin.pdf
- [10] D.K. Markushev, N.Lj. Brankovic, S.P. Galovic, K.Lj. Djordjevic, S.M. Aleksic, D.S. Pantic, D.D. Markushev, The cut-off frequency – a key concept in the heat flow measurements based on the thermoelastic photoacoustic response, *Measurement*, **248**, 2025, 116902, <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2025.116902>