

Математичка гимназија

Симулирање дводимензионалног
тока флуида коришћењем Навије-
Стоксових једначина

Матурски рад из физике

Ментор:

Драгица Ивковић

Михајло Живановић, 4б

Београд, јун 2025.

Садржај

1. Увод	3
2. Теорија динамике флуида.....	4
Навије-Стоксове једначине.....	4
Решавање притиска	5
Једначине у две димензије	6
3. Нумеричке методе и дискретизација.....	7
Временска дискретизација једначина	8
Просторна дискретизација Навије-Стоксове једначине	8
Просторна дискретизација Поасонове једначине за притисак	10
Стабилност и потребни услови	11
4. Имплементација алгоритма.....	12
Гранични и почетни услови	13
5. Резултати и анализа резултата симулације.....	14
Нумеричка стабилност	18
6. Дискусија	18
7. Литература.....	19

1. Увод

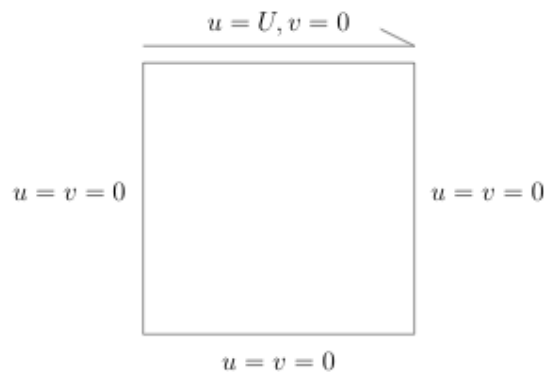
Динамика флуида игра кључну улогу у разумевању природних феномена и примени на разне инжењерске проблеме, од једноставног протока воде кроз затворене цеви, па до дизајнирања авиона или временске прогнозе. Основне и најопштије једначине које се користе у овој области су Навије-Стоксове једначине. Ове једначине описују промене поља брзине у флуиду који се креће, поштујући законе о одржању импулса и масе.

Због велике комплексности ових једначина, често је изузетно тешко или немогуће решити их аналитички. Због овога, научници и инжењери врло често нумерички решавају овакве проблеме.

Један од најчешћих начина нумеричког решавања оваквих проблема јесте коришћењем Рачунарске динамике флуида (често скраћено као CFD, од енглеског Computational Fluid Dynamics). Нумеричко решавање ових једначина представља разне проблеме, због којих је потребна велика пажња у дискретизацији Навије-Стоксових једначина.

Због велике комплексности и огромног обима ове области, овај рад ће се примарно бавити прављењем дводимензионале симулације тока нестишљивог флуида, који се не понаша турбулентно. Биће примењена временска и просторна дискретизација поља притиска и брзије. Зарад веродостојности симулације, биће примењена и помакнута поља брзине и притиска за већу прецизност, КФЛ услов за конвергенцију за одређивање временских корака, као и многе друге технике које доприносе стабилности симулације.

Циљ рада није решавање ни једног конкретног проблема, већ прављење функционалне основе за даље симулирање проблема. Због тога, биће симулирано кретање флуида унутар квадратне, непробојне кутије чија се једна страница креће константном брзином паралелно са својим правцем (енг. Lid-driven cavity problem).



Слика 1: Дијаграм основа
Lid-Driven Cavity flow проблема

2. Теорија динамике флуида

Динамика флуида је област физије која се бави током флуида и силама које утичу на тај ток. Основе области произилазе из закона одржања масе и импулса. У овом раду, бавићемо се само Навије-Стоксовим и осталим потребним једначинама.

У динамици флуида, најчешће посматрамо флуид као континуум и посматрамо карактеристике флуида за одређене тачке у простору, уместо да пратимо саме честице флуида док се крећу, па закон одржања масе за флуиде гласи:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

У овој једначини ρ представља густину флуида, док $\vec{v}$ представља векторско поље брзине. Ако предпоставимо да је флуид нестишљив, односно $\rho = \text{const}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, једначина одржања масе добија облик:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Навије-Стоксове једначине

Навије-Стоксове једначине постоје у различитим облицима, зависно од претпоставки које направимо. Рачунајући да је флуид нестишљив и занемаривши површинске силе, једначине се поједностављују до:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v},$$

Ова једначина потиче од једначине

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

У наведеној Навије-Стоксовој једначини, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ је члан који представља убрзање флуида $\vec{a}$, а десна страна једначине представља силе које својим деловањем утичу на брзину флуида.

- $\vec{f}$ представља све запреминске силе које делују на делове флуида. Најбољи пример за овакву силу јесте гравитациона, али у зависности од проблема који проучавамо могу се појавити магнетна, електростатична,...

У овом раду ће гравитација бити занематена, јер је флуид нестишљив и испуњава цео простор. Узимањем гравитације у обзир, поље притиска би се у свакој тачки

променило за константну вредност која одговара потпуном негирању ефекта гравитационог поља. Ако нас интересује такво поље притиска, могуће је једноставно аналитички израчунати константу промену коју оно проузрокује.

- $-\frac{1}{\rho}\nabla p$ представља ефекат притиска на брзину.

Битно је приметити да је ово векторско поље потекло из градијента скалатног поља – односно, закључујући из Хемхолцове декомпозиције, ротор овог поља је једнак нули у свакој тачки простора. Ово ће бити кључно касније у примени закона одржања масе.

- $\frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}$ представља вискозност флуида, што се може схватити као тежња брзине флуида ка околним брзинама флуида. Коефицијент динамичке вискозности, или само коефицијент вискозности, је представљен са η , мада се у литератури могу видети и μ у истом значењу, односно ν umesto $\frac{\eta}{\rho}$, под именом коефицијент кинетичке вискозности

Навије-Стоксова једначина за нестишљиве флуиде (коју ћемо надаље звати само „Навије-Стоксова једначина“) се интуитивно може представити као:

$$\rho\vec{a} = \text{Zapreminske sile} + \text{Uticaj pritiska} + \text{Uticaj viskoznosti}$$

Решавање притиска

Пошто из Хемхолцове декомпозиције векторског поља знамо да свако векторско поље можемо да јединствено претворимо у збир векторског поља без дивергенције и векторског поља чии ротор је нула, знамо да је $\nabla \times \left(-\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = 0$.

Такође знамо да је $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, из чега следи да постоји тачно једно решење за поље притиска које осигурава $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, јер притисак нема утицаја на ротор поља брзине. Ово се интуитивно може схватити тако да је притисак заправо оно што се бори да флуид остане нестишљив, односно „елиминише“ дивергенцију из поља брзине.

Ово значи да уместо да рачунамо притисак, па целу Навије-Стоксову једначину одједном, можемо знатно да олакшамо посао рачунањем Навије-Стоксове једначине комплетно занемарујући притисак, па пројектовати добијено поље у векторско поље без дивергенције како бисмо добили ефекат притиска.

$$\vec{u}^* = \vec{u} + \nabla \cdot p$$

У овој једначини, нека важи $\nabla \cdot u = 0$, тј. u буде тражено векторско поље. Дато нам је векторско поље u^* и морамо да нађемо скаларно поље p како бисмо решили u .

$$\nabla \cdot (u^*) = \nabla \cdot (u + \nabla \cdot p)$$

$$\nabla \cdot (u^*) = \nabla \cdot u + \nabla \cdot \nabla \cdot p$$

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot u^*$$

Решавање ове једначине нумеричким методама је могуће, а добијеним пољем p можемо израчунати брзину без дивергенције коришћењем једначине

$$u = u^* - \nabla \cdot p.$$

У овим једначинама, p не представља притисак, већ притисак помножен са коефицијентом који зависи од величине временског корака и густине. Свакако, ако нас интересује само расподела притиска и релативне разлике у притиску, ово поље се може користити као и право поље притиска. Уколико нам је потребно право поље притиска, можемо помножити добијено поље са густином флуида и поделити са временским кораком.

Једначине у две димензије

Ако поље брзине раставимо на одвојене компоненте $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ и заменимо у

Навије-Стоксову једначину, добијамо следеће две једначине:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right)$$

Од једначина за притисак добијамо следеће једначине:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial v_x^*}{\partial x} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y}$$

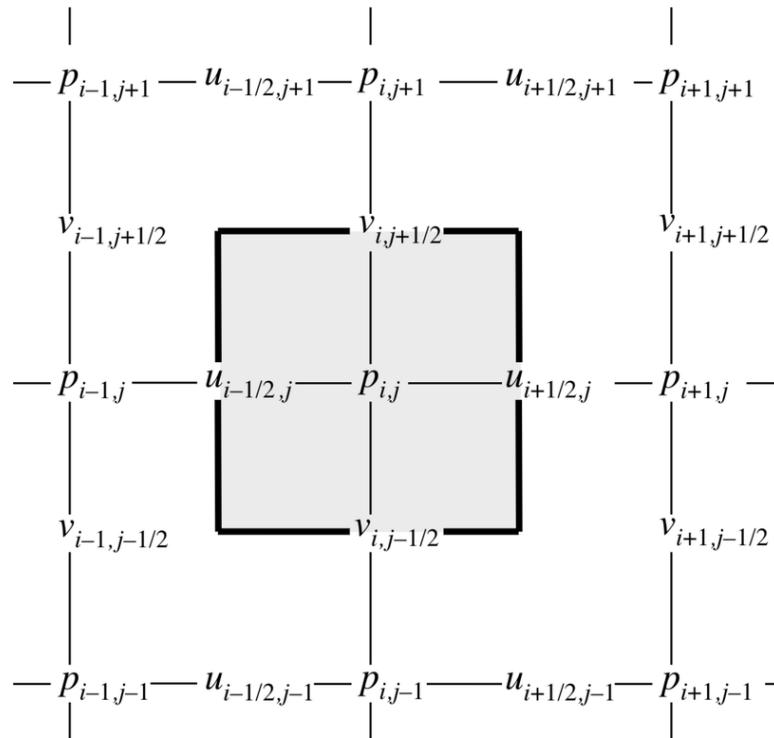
$$v_x = v_x^* - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$v_y = v_y^* - \frac{\partial p}{\partial y}$$

3. Нумеричке методе и дискретизација

Вредности поља брзине и притиска можемо чувати на неколико начина:

- На мрежи са заједничким чворовима – притисак и обе компоненте брзине се чувају у истој тачки (x, y) . Ова метода губи прецизност при рачунању $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\nabla \cdot u$, јер се унутар дискретизованих извода, како бисмо одржали симетријз, разлике деле са дистанцом дупло већом од резолуције. Оваква дискретизација извода чини и да су нестабилности заступљеније, као што је просторно смењивање сувише високих и сувише ниских вредности унутар поља притиска (енг. „checkerboarding“). Олакшава програмирање јер не морамо да интерполирамо вредности брзине.
- На помакнутим мрежама – такође позната као „MAC“ (енг. Marker-And-Cell) мрежа. Притисак се чува у центрима ћелија $(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, а v_x и v_y компоненте брзине на $(\mathbb{N}-1/2, \mathbb{N})$ и $(\mathbb{N}, \mathbb{N}-1/2)$, односно „између“ ћелија. Овие при конкретизацији добијамо прецизније $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\nabla \cdot u$. Брзине представљају флуks међу ћелијама, уместо брзине флуида унутар ћелија. Гранични случајеви су знатно поједностављени и постижемо већу нумеричку стабилност.



Слика 2: Дијаграм помакнутих (MAC) мрежа

Збор горе наведених разлога, у овом пројекту је коришћена помакнута мрежа.

Процес дискретизације једначина се одвија на следећи начин:

Временска дискретизација једначина

$$v_x^{*n+1} = v_x^{*n} + \left(-v_x^n \frac{\partial v_x^n}{\partial x} - v_y^n \frac{\partial v_x^n}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_x^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x^n}{\partial y^2} \right) \right) dt$$

$$v_y^{*n+1} = v_y^{*n} + \left(-v_y^n \frac{\partial v_y^n}{\partial y} - v_x^n \frac{\partial v_y^n}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_y^n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y^n}{\partial x^2} \right) \right) dt$$

У овим једначинама, v^n представља брзину v у тренутку $t = n \cdot dt$.

Овиме добијамо прелиминарне брзине у које није урачунат утицај притиска у тренутку $n + 1$ коришћењем брзина и прелиминарних брзина у претходном тренутку. Пошто је циљ да елиминишемо дивергенцију из добијеног поља, можемо заменити појављивање v_x^{*n} и v_y^{*n} са пољима v_x^n и v_y^n и нећемо променити ништа осим дивергентне компоненте добијеног векторског поља, односно резултат процеса када уклонимо дивергенцију ће остати исти. Временски корак dt можемо одредити произвољно, а мање вредности нам дају већу прецизност. Сувише велике вредности могу увести нестабилности.

Пројекциони корак је независан од времена, али се рачуна сваки временски корак када добијемо прелиминарне брзине.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial v_x^{*n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v_y^{*n+1}}{\partial y}$$

$$v_x^{n+1} = v_x^{*n+1} - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$v_y^{n+1} = v_y^{*n+1} - \frac{\partial p}{\partial y}$$

Просторна дискретизација Навије-Стоксове једначине

Ако посматрамо једначине унутар одређене тачке, уз коришћење помакнуте мреже, добијамо следеће једначине:

$$\begin{aligned}
v_x^{*n+1}\left(x - \frac{1}{2}, y\right) &= v_x^{*n}\left(x - \frac{1}{2}, y\right) \\
&+ \left(-v_x^n\left(x - \frac{1}{2}, y\right) \frac{v_x^n\left(x + \frac{1}{2}, y\right) - v_x^n\left(x - \frac{3}{2}, y\right)}{2dx} \right. \\
&- v_y^n\left(x - \frac{1}{2}, y\right) \frac{v_x^n\left(x - \frac{1}{2}, y + 1\right) - v_x^n\left(x - \frac{1}{2}, y - 1\right)}{2dy} \\
&+ \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{v_x^n\left(x + \frac{1}{2}, y\right) - 2v_x^n\left(x - \frac{1}{2}, y\right) + v_x^n\left(x - \frac{3}{2}, y\right)}{dx^2} \right. \\
&\left. \left. + \frac{v_x^n\left(x - \frac{1}{2}, y + 1\right) - 2v_x^n\left(x - \frac{1}{2}, y\right) + v_x^n\left(x - \frac{1}{2}, y - 1\right)}{dy^2} \right) \right) dt
\end{aligned}$$

Пошто је v_y познато само у тачкама форме $\left(x, y - \frac{1}{2}\right)$ због помакнутих мрежа, а нама је потребно у тачки $\left(x - \frac{1}{2}, y\right)$ морамо да интерполирамо вредност. Ово се најлакше ради усредњавањем околних познатих тачака, односно следећом једначином:

$$\begin{aligned}
v_y\left(x - \frac{1}{2}, y\right) &= \frac{1}{4} \left(v_y\left(x, y - \frac{1}{2}\right) + v_y\left(x, y + \frac{1}{2}\right) + v_y\left(x - 1, y - \frac{1}{2}\right) \right. \\
&\left. + v_y\left(x - 1, y + \frac{1}{2}\right) \right)
\end{aligned}$$

Због гламазности ове формуле, надаље ће бити претпостављено да је ова једначина примењена свуда где је потребна.

Постоји и алтернативни начин за дискретизовање у ком се просторни изводи налик $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ не рачунају коришћењем централне разлике, односно рачунањем $\frac{v_x(x+1,y) - v_x(x-1,y)}{2dx}$, већ се рачуна асиметрична разлика у правцу супротном од брзине у датој тачки, односно $\frac{v_x(x+1,y) - v_x(x,y)}{dx}$ ако је $v_x(x,y) < 0$ или $\frac{v_x(x,y) - v_x(x-1,y)}{dx}$ ако је $v_x(x,y) \geq 0$. Овом методом могуће је спречити појављивање нумеричких грешака сличним нумеричким грешкама притиска због којих користимо помакнуте мреже. Ово није имплементирано у симулацији јер нумеричке грешке нису биле видљиве у великој већини симулацији.

Све што је изнад изведено за x правац се идентично изводи за y правац, па добијамо једначине:

$$\begin{aligned}
& v_y^{*n+1}\left(x, y - \frac{1}{2}\right) \\
&= v_y^{*n}\left(x, y - \frac{1}{2}\right) \\
&+ \left(-v_x^n\left(x, y - \frac{1}{2}\right) \frac{v_y^n\left(x + 1, y - \frac{1}{2}\right) - v_y^n\left(x - 1, y - \frac{1}{2}\right)}{2dx} \right. \\
&- v_y^n\left(x, y - \frac{1}{2}\right) \frac{v_x^n\left(x, y + \frac{1}{2}\right) - v_x^n\left(x, y - \frac{3}{2}\right)}{2dy} \\
&+ \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{v_x^n\left(x + 1, y - \frac{1}{2}\right) - 2v_x^n\left(x, y - \frac{1}{2}\right) + v_x^n\left(x - 1, y - \frac{1}{2}\right)}{dx^2} \right. \\
&\left. + \frac{v_x^n\left(x, y + \frac{1}{2}\right) - 2v_x^n\left(x, y - \frac{1}{2}\right) + v_x^n\left(x, y - \frac{3}{2}\right)}{dy^2} \right) dt \\
&v_x\left(x, y - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \left(v_y\left(x + \frac{1}{2}, y\right) + v_y\left(x - \frac{1}{2}, y\right) + v_y\left(x + \frac{1}{2}, y - 1\right) \right. \\
&\quad \left. + v_y\left(x - \frac{1}{2}, y - 1\right) \right)
\end{aligned}$$

Просторна дискретизација Поасонове једначине за притисак

Једначине које користимо за пројекцију поља се дискретизују на следећи начин:

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial y^2} = \frac{\partial v_x^{*n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v_y^{*n+1}}{\partial y}$$

Постоје многе методе за решавање оваквог типа једначина, али најједноставнија је Јакобијева метода решавања. Следи објашњење примене Јакобијевог метода на нашу једначину:

$$\begin{aligned}
& \frac{p(x + 1, y) - 2p(x, y) + p(x - 1, y)}{dx^2} + \frac{p(x, y + 1) - 2p(x, y) + p(x, y - 1)}{dy^2} \\
&= \frac{v_x^*\left(x + \frac{1}{2}, y\right) - v_x^*\left(x - \frac{1}{2}, y\right)}{dx} + \frac{v_y^*\left(x, y + \frac{1}{2}\right) - v_y^*\left(x, y - \frac{1}{2}\right)}{dy}
\end{aligned}$$

Односно решавањем за $p(x, y)$

$$p(x, y) = \left(\frac{p(x+1, y) + p(x-1, y)}{dx^2} + \frac{p(x, y+1) + p(x, y-1)}{dy^2} - \frac{v_x^* \left(x + \frac{1}{2}, y\right) - v_x^* \left(x - \frac{1}{2}, y\right)}{dx} - \frac{v_y^* \left(x, y + \frac{1}{2}\right) - v_y^* \left(x, y - \frac{1}{2}\right)}{dy} \right) \left(\frac{1}{\frac{2}{dx^2} + \frac{2}{dy^2}} \right)$$

Решавање се ради итеративно – кретањем од поља $p^0(x, y) = 0$, и одређивањем $p^{k+1}(x, y)$ у зависности од околних вредности унутар p^k , где је k једнак броју итерација алгорита, можемо да понављамо рачуницу док не постигнемо

потребну прецизност. Груписањем чланова $-\frac{v_x^* \left(x + \frac{1}{2}, y\right) - v_x^* \left(x - \frac{1}{2}, y\right)}{dx} - \frac{v_y^* \left(x, y + \frac{1}{2}\right) - v_y^* \left(x, y - \frac{1}{2}\right)}{dy} = RHS(x, y)$ и $\frac{1}{\frac{2}{dx^2} + \frac{2}{dy^2}} = dr$ у константе, знатно убрзавамо рачун и решавање за тражени притисак, добијајући једначину:

$$p(x, y) = \frac{\left(\frac{p(x+1, y) + p(x-1, y)}{dx^2} + \frac{p(x, y+1) + p(x, y-1)}{dy^2} + RHS(x, y) \right)}{dr}$$

Када смо постигли довољну тачност, преостаје само да применимо добијено поље притиска следећим једначинама:

$$v_x^{n+1} \left(x - \frac{1}{2}, y\right) = v_x^{*n+1} \left(x - \frac{1}{2}, y\right) - \frac{p^{n+1}(x, y) - p^{n+1}(x-1, y)}{dx}$$

$$v_y^{n+1} \left(x, y - \frac{1}{2}\right) = v_y^{*n+1} \left(x, y - \frac{1}{2}\right) - \frac{p^{n+1}(x, y) - p^{n+1}(x, y-1)}{dy}$$

Овим кораком затварамо циклус и добијамо вредности $v_x^{n+1} \left(x - \frac{1}{2}, y\right)$, $v_y^{n+1} \left(x, y - \frac{1}{2}\right)$ и $p^{n+1}(x, y)$ из вредности $v_x^n \left(x - \frac{1}{2}, y\right)$ и $v_y^n \left(x, y - \frac{1}{2}\right)$, па можемо да понављамо овај процес за добијање даљих вредности. Ако смо почели из времена $t = 0$, можемо добити вредности свих поља у тренутку $T = N \cdot dt$ понављањем процеса N пута.

Стабилност и потребни услови

Нумеричка стабилност је кључна у рачунарској динамици флуида. Један од кључних услова за стабилност у симулацијама са експлицитним временским корацима јесте Курант-Фридрихс-Левијев услов (енг. Courant-Friedrichs-Lewy (CFL))

condition), помоћу којег одређујемо максималан временски корак који не проузрокује непредвидивост, у зависности од резолуције мреже и брзине флуида.

Потребно нам је да временски корак испоштује два услова:

- Адвекциони услов: флуид не сме тече довољно брзо да прелази раздаљину већу од резолуције мреже у једном временском кораку, мерено у било ком кардиналном правцу.

$$dt \leq \min\left(\frac{dx}{\max(v_x)}, \frac{dy}{\max(v_y)}\right) \cdot C$$

C представља сигурносни фактор, $0 < C < 1$. Што је тај фактор мањи, више времена је потребно за симулирање истог времена, али ће решење бити прецизније. У овом раду биће коришћена вредност $C = 0,35$.

- Дифузиони услов: извођење фактора за дифузију неће бити покривено у овом раду. Добијено ограничење је облика

$$dt \leq \min(dx^2, dy^2) \cdot \frac{\rho}{\nu} C$$

Користићемо исти сигурносни фактор $C = 0,35$ и узети мање од ова два добијена времена, како би оба услова била испуњена.

4. Имплементација алгоритма

Када се све једначине споменуте горе примене у једној симулацији, алгоритам се може описати једноставним циклусом који ће бити изражен у следећем псеудокоду:

1. Иницијализација константи и почетних поља
2. Понављати док не стигнемо до траженог тренутка:
 - a. Направити нова поља брзине као копију старих
 - b. Симулирати адвекциозни и вискозни члан
 - c. Применити граничне услове за брзину
 - d. Наћи поље притиска (односно применити нестишљивост)
 - i. Наћи непроменљиве факторе у једначини за притисак
 - ii. Итеративно рачунати притисак док не постигнемо тражену прецизност, примењујући граничне услове сваку итерацију
 - e. Применити поље притиска на поља брзине
 - f. Нова поља брзине постају тренутна и циклус се понавља
3. Анализа резултата (цртање графика, дијаграма, ...)

Гранични и почетни услови

Гранични случајеви су кључни у дефинисању како околина утиче на флуид унутар симулације и осигуравања да симулација даје реалистичне резултате. Избор граничних услова може значајно да утиче на стабилност и прецизност наше симулације и зато морамо посветити велику пажњу при одабиру услова. Истиче се неколико нама корисних:

1. Дирихлеов гранични услов директно задаје вредност поља брзине или притиска на граници. Најчешће се користи када је граница слободна за проток флуида, па је притисак на граници константан и задат, или се користи за ограничавање брзине код непробојних граница. Користи се и у сврху ограничавања паралелног протока, односно услов без проклизавања (енг. no-slip condition). Када не ограничимо проклизавање преко површине, али ограничимо да је граница непробојна, често се у литератури то назива „free-slip condition“ или „no-penetration condition.“
2. Нојманов гранични случај дефинише градијент неког поља нормално на границу. Унутар рачунарске динамике флуида, најчешће се користи за ограничавање градијента притиска преко граница на нулу, како бисмо одржали брзине које смо задали Дирихлеовим граничним условом.

Наши гранични услови ће бити у следећој форми:

- Брзина нормална на сваки зид је једнака нули (непробојност)
- Брзина која је паралелна и одмах поред сваког зида је једнака нули (трење са зидовима)
- Брзина која је паралелна зиду који се креће је фиксирана у један, који ће бити постављен на правац $u = 0$, па ће важити $v_x(x, 0) = 1$
- Диференцијал притиска преко сваког од зидова је једнак нули (Нојманов случај који осигурава да непробојност неће бити прекршена)

Почетни услов:

- Симулација креће из потпуног стања мировања, осим флуида који додирује зид који се креће.

5. Резултати и анализа резултата симулације

У наставку следе неки од резултата симулације тока. Како је циљ пројекта био разумети и направити једноставну симулацију, резултати не могу бити лако верификовани. Провером максималних вредности брзина и дивергенције поља, као и визуелном анализом, симулација се понаша као и предвиђено. Приказани притисак је модификован, како би екстремне вредности биле смањене јер су заступљене веома позитивне и веома негативне вредности које „маскирају“ остатак слике.

Резултати се визуелно поклапају са резултатима сличних симулација других аутора и јасно се виде утицај вискозности, нестишљивости и адвекције кроз ток флуида. Ако посматрамо и промену вредности кроз време, јасно се види како флуид скупља инерцију и тежи да се стабилизује у ламинарно, вртложно кретање.

1. Након 20 временских корака:

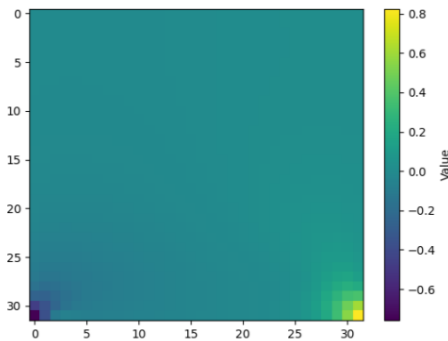


График 3: Модификовани притисак
у четрдесетом кораку

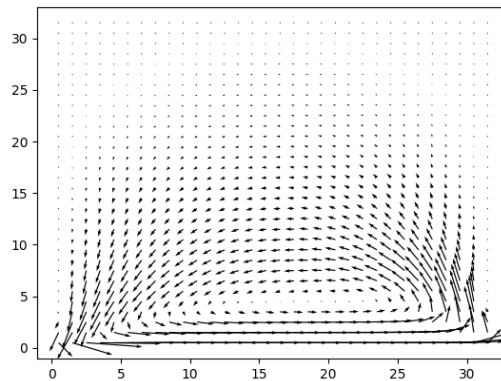


График 2: Брзина у четрдесетом кораку

2. Након 40 временских корака:

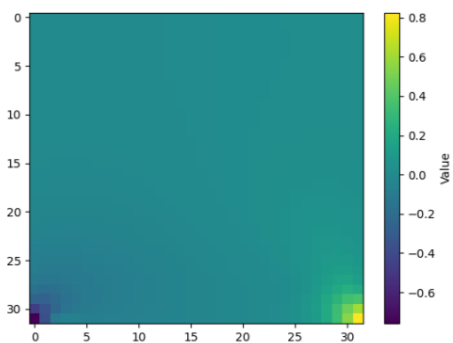


График 3: Модификовани притисак
у четрдесетом кораку

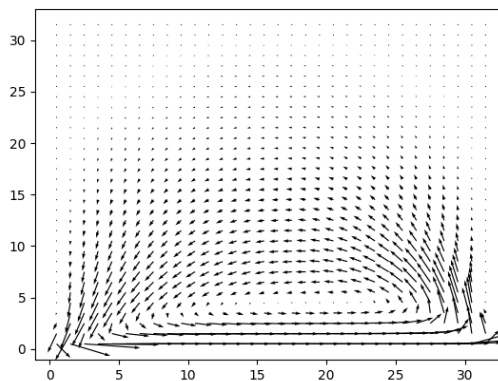


График 2: Брзина у четрдесетом кораку

3. Након 100 временских корака:

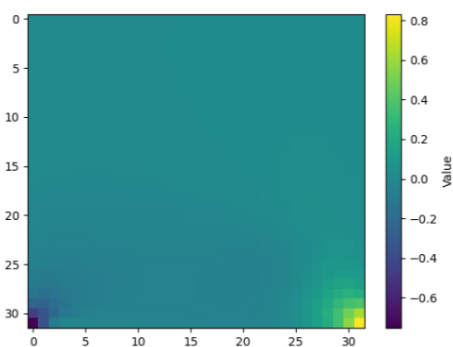


График 3: Модификовани притисак
у стотом кораку

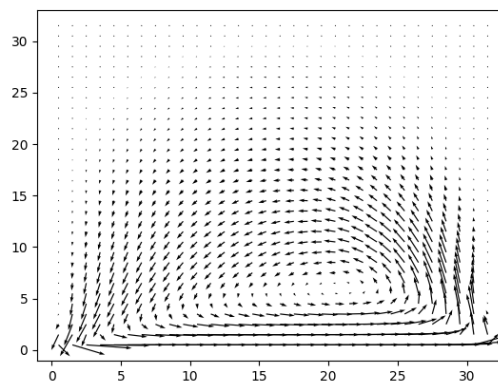


График 2: Брзина у стотом кораку

4. Након 200 временских корака:

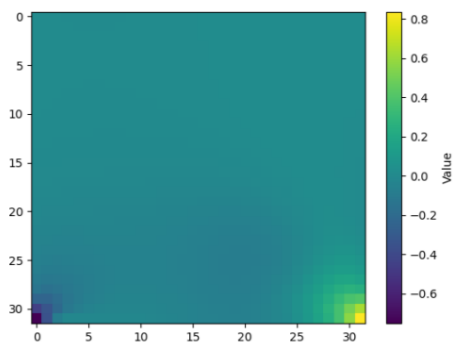


График 3: Модификовани притисак
у двестотом кораку

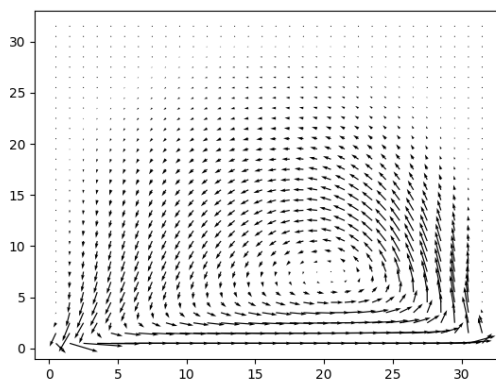


График 2: Брзина у двестотом кораку

5. Након 500 временских корака:

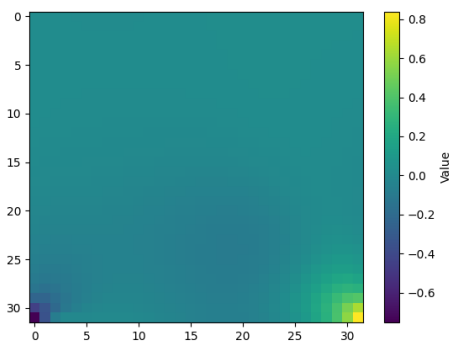


График 3: Модификовани притисак
у петстотом кораку

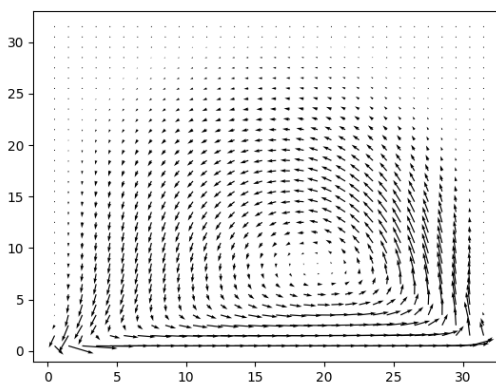


График 2: Брзина у петстотом кораку

6. Након 5000 временских корака:

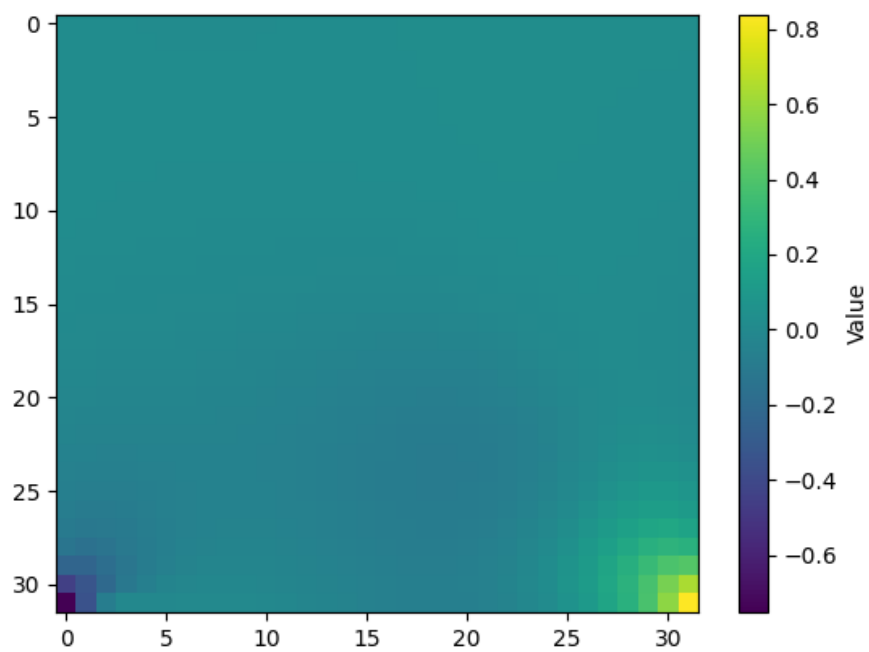


График 3: Модификовани притисак у петхиљадитом кораку

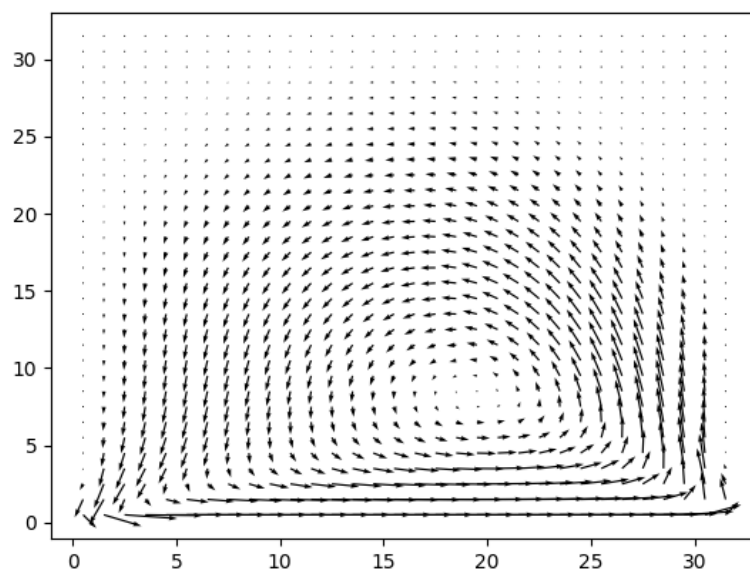


График 2: Брзина у петхиљадитом кораку

Нумеричка стабилност

При неким резолуцијама и вискозностима, након дугог симулирања, понекад настане нумеричка нестабилност која се комплетно поклапа са проблемима централне разлике у рачунању просторног извода брзине, односно при рачунању вискозности. Све док се придржавамо КФЛ услова, нису примећене никакве друге нестабилности или нелогичности у симулацији.

6. Дискусија и закључак

Овај рад је успешно нумерички симулирао дводимензионални ток нестишљивог флуида коришћењем Навије-Стоксових једначина, користећи помакнуте мреже за брзине и притисак, КФЛ услове стабилности (енг. CFL condition), и пројекциону методу решавања поља притиска, коришћењем Јакобијеве методе за решавање једначине притиска.

Из добијених резултата се јасно види да је симулација успела да прикаже кључне карактеристике тока флуида.

Међутим, иако је сам пројекат био комплетно успешан, неке од метода у овој симулацији су веома ограничавајуће и примитивне. Анализирање брзине рачунања показује да је остало доста за унапређивање, конкретно у решавању за притисак. Такође, симулација уопште није паралелизована, иако је велика већина рада заправо рад на матрицама, што значи да свако повећање резолуције или комплексности би морало да дође по цену огромних чекања.

Након овога, природан наставак би могао да буде симулирање неке тродимензионалне сцене, уз напредније методе решавања Поасонових једначина за притисак и оптимизацију коришћењем CUDA или сличних масивно-паралелних језика.

Могуће је и истраживати комплексније варијације Навије-Стоксових једначина, као што су Рејнолдс-усредњене Навије-Стоксове једначине за турбулентне токове или Навије-Стоксове једначине за стишљиве флуиде.

Свакако, јасно је да је ово само почетак огромне, комплексне и веома применљиве области и путеви за даље проучавање ове области су многобројни.

7. Литература

1. Tong, D. (n.d.). Lectures on vector calculus. University of Cambridge. Преузето јануара 2025.
<https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/vc.htmcy2>
2. Panton, R. L. (2013). Incompressible Flow
https://archive.org/details/isbn_9788126509430/
3. Guermond, J. L., Mineev, P., & Shen, J. (2006). An overview of projection methods for incompressible flows. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195(44–47), 6011–6045.
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.10.010>
4. Barba, L. A. (2015). 12 Steps to Navier-Stokes: CFD in Python. GitHub repository. Приступљено фебруара 2025.
<https://github.com/barbagroup/CFDPython>
5. CS418 (2023). Fluids on a Grid – MAC Grid Explanation. University of Illinois Urbana-Champaign. Приступљено маја 2025.
<https://cs418.cs.illinois.edu/website/text/grid-fluids.html>