



Математичка гимназија
школа од посебног националног значаја и интереса

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА, БЕОГРАД

Увод у теорију скупова. Ординални и кардинални бројеви

матурски рад из математике

Ученица: Нина Гавриловић IVb

Ментор: Борислав Гајић

Београд, 2025.

Садржај

1	Увод	2
2	Основе и језик теорије скупова	3
2.1	Формуле у теорији скупова	3
2.2	Основни појмови	4
2.3	Појам уређеног пара. Значај	8
2.3.1	Јединственост уређеног пара	8
3	Аксиоматско заснивање теорије скупова	9
3.1	Дебата о аксиоми избора	11
4	Релације и функције кроз теорију скупова	13
4.1	Бинарне релација	13
4.1.1	Особине бинарних релација	13
4.1.2	Компоновање релација	14
4.1.3	Инверзна релација	14
4.2	Функције	14
5	Ординални бројеви	19
5.1	Увод у теорију поретка	19
5.1.1	Парцијални поредак	19
5.1.2	Линеарни (тотални) редослед	19
5.2	Ординални бројеви	21
5.2.1	Коначни и бесконачни ординали	22
5.2.2	Ординална аритметика	22
6	Кардинални бројеви	25
6.1	Кардинална аритметика	27
6.1.1	Сабирање кардиналних бројева	27
6.1.2	Множење кардиналних бројева	27
6.1.3	Степеновање	28
7	Парадокси	29
7.1	Канторов парадокс (1899.)	29
7.2	Раселов парадокс (1901.)	29
7.3	Бурали-Фортијев парадокс (1897.)	29
8	Закључак	31

1 Увод

Математика, иако често доживљавана као крајње прецизна и формална, почиње изненађујуће једноставним идејама. Једна од њих је идеја скупа — замисао да можемо повезати неке објекте и разматрати их као целину. Било да се ради о скуповима бројева, тачака, функција или чак скуповима самих скупова, ова интуитивна конструкција лежи у основи целокупне модерне математике.

Ипак, управо та интуитивност скупа довела је до појаве бројних логичких тешкоћа и парадокса који су крајем XIX и почетком XX века уздрмали темеље математичке мисли. Одговор на овај изазов било је аксиоматско заснивање теорије скупова — прелазак са наивног поимања на строго формализован систем, у коме се појмови као што су релација, функција, ординалност и кардиналност дефинишу прецизно и унутар логички затвореног оквира.

У овом раду биће разматрани основни појмови теорије скупова, почевши од аксиома и основних структура, преко трансфинитних бројева, па све до чувених парадокса који су формирали границе математичког мишљења. Теорија скупова није само апстрактна област — она је огледало саме математике, њених могућности, али и њених граница.

2 Основе и језик теорије скупова

Језик теорије скупова представља формални систем у коме се описују и анализирају скупови и односи између њих. Тај језик се састоји од *основних симбола*, који укључују:

1. **Променљиве:** $u, v, w, \dots, u_1, v_1, w_1, \dots$
2. **Симболи:** $\in$ и $=$
3. **(Исказни) везници:** $\Rightarrow$ (импликација), $\wedge$ (конјункција), $\vee$ (дисјункција), $\neg$ (негација), и интерпункцијски знаци
4. **Квантификатори:** $\forall$ (универзални) и $\exists$ (егзистенцијални)

2.1 Формуле у теорији скупова

У теорији скупова, као и у другим областима математике заснованим на формализму, неопходно је прецизно дефинисање израза који чине језик теорије како би се постигла недвосмисленост тврдњи. Неопходно је успоставити нека правила која говоре како се граде те формуле. Такав приступ омогућава доследно извођење закључака и постављање математичких теорија на чврстим логичким темељима.

Формуле се састоје из три дела:

- атомске формуле
- логички везници
- квантификатори

Можемо рећи да се формуле конструишу хијерархијски. За почетак, имамо атомске формуле. Оне изражавају основне односе између објеката: једнакост и припадност

$$x \in y, \quad x = y$$

Сложеније формуле настају применом логичких везника, као што су конјункција ($\wedge$), дисјункција ($\vee$), импликација ($\rightarrow$), еквиваленција ($\leftrightarrow$) и негација ($\neg$).

$$\alpha \wedge \beta, \quad \alpha \vee \beta, \quad \neg \alpha, \quad \alpha \rightarrow \beta, \quad \alpha \leftrightarrow \beta$$

Додатно, квантификатори ($\forall$ и $\exists$) омогућавају изражавање универзалних и егзистенцијалних тврдњи.

$$\forall x \alpha, \quad \exists x \alpha$$

Разликујемо слободне и везане променљиве, где везаним називамо оне које се појављују унутар квантификатора. Погледајмо следећи пример:

$$\forall x (x \in y \rightarrow \exists z (z \in x))$$

- x и z су везане променљиве
- y је слободна променљива

Када формула садржи слободне променљиве, она изражава неку особину или однос који зависи од вредности тих променљивих – као да поставља услов који се односи на конкретне елементе. С друге стране, ако су све променљиве у формули везане квантификаторима, формула постаје независна од конкретних вредности и описује тврдњу која се односи на целокупну структуру у којој је интерпретирамо. Таква формула се назива *реченица* и има статус пуноправне изјаве унутар језика.

2.2 Основни појмови

Скуп је основни ентитет теорије скупова. Интуитивно га можемо посматрати као колекцију објеката, али у формалном смислу се третира као примитиван појам. То значи да се његово понашање дефинише преко аксиома, а не преко конкретне дефиниције. Може се рећи да је скуп нека множина (јер може имати већи број елемената) који посматрамо као јединку, односно целину. Главни проблем код дефинисања појма скупа је тај што можемо приметити да нешто покушавамо да дефинишемо управо преко тог нечега (у филозофији *idem per idem*). На срећу, сложићемо се да је скуп интуитиван појам, те га за таквог и узимамо. Приметимо да однос између скупа и његових елемената има обострани карактер. Наиме, скуп је одређен својим елементима (тзв. атомистичка структура скупа), али и елементи својим припадањем дефинишу скуп. На пример, кружница се може посматрати као скуп свих тачака у равни које су на фиксном растојању x од неке тачке A . Истовремено, можемо рећи и да све тачке које испуњавају тај услов — удаљеност x од тачке A — заједно образују један јединствени скуп: кружницу.

Скупове можемо уочити свуда око нас. То су на пример скуп свих ученика једног одељења, скуп свих позитивних парних бројева мањих од 10. Ове скупове можемо описати као коначне. То значи да они имају коначан број елемената, те да се ти елементи у теорији могу сви исписати. Њима се може одредити број елемената, а то називамо кардинални број. Са друге стране, постоје скупови чији број елемената није коначан. Између осталих, то су скуп природних бројева, скуп свих могућих шаховских партија (сматрамо да се педесетопотезно правило изузима, па шахисти не морају да брину о истинитости тврдње) и скуп свих тачака на некој кружници.

Када говоримо о односу између елемента и скупа, уочавамо следеће: неки елемент a може да припада или да не припада неком скупу A , а то обележавамо као $a \in A$, односно $a \notin A$, респективно.

Даћемо пар примера како то може да изгледа:

$A = \{a\}$, читамо: скуп A има један елемент a

$B = \{b, c\}$, читамо: скуп B има два елемента b и c

$C = \{2, 4, 6, \dots\}$, читамо: скуп C садржи све парне природне бројеве

На примеру скупа C можемо видети да некада нису излистани сви елементи, већ да користимо три тачке да покажемо да се неки образац наставља (овде су то сви природни бројеви дељиви са 2). Овај начин записивања сме се користити само онда када је правило недвосмислено и очигледно свима који читају. Скуп $A = \{a, x, 17, w, \checkmark, 1, \dots\}$ пример је скупа у чијем су запису искоришћене горепоменути три тачке, али образац није уопште јасан. То је пример лоше праксе и не треба се упражњавати.

За два скупа кажемо да су једнаки само ако сваки елемент из првог припада и

другом, и сваки елемент из другог припада првом. За скупове A и B за које то важи пишемо $A=B$.

Празан скуп ($\emptyset$)

Празан (вакантан) скуп је скуп без елемената, означава се са $\emptyset$.

Подскуп ($\subseteq$)

Кажемо да је скуп A подскуп скупа B у ознаци $A \subseteq B$, ако сваки елемент скупа A припада и скупу B :

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B).$$

Када излиставамо све подскупове неког скупа A , ту укључујемо и цео скуп A и празан скуп. У пракси, то би изгледало овако:

$$A = \{a, b, c\}$$

Подскупови скупа A су: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

Ако бисмо хипотетички имали ситуацију да постоји неки скуп B коме припада само празан скуп, скуп B не би био празан, већ би се сматрао скупом чији је једини елемент празан скуп ($B = \{\emptyset\}$).

Погледајмо следеће: ако кажемо да a и b представљају елементе скупова A и B редом, и да ћемо користити следеће 4 тврдње

- свако $a \in B$
- свако $b \in A$
- није свако $a \in B$
- није свако $b \in A$

разликујемо следеће случајеве:

1. Важи: свако $a \in B$ и свако $b \in A \implies A = B$
2. Важи: свако $a \in B$, али није свако $b \in A \implies A \subset B$
3. Важи: свако $b \in A$, али није свако $a \in B \implies B \subset A$
4. Важи: није свако $a \in B$ и није свако $b \in A$

Последњи случај, за разлику од претходних, нема неки посебан назив и нотацију јер то једноставно није потребно.

Такође, битно је напоменути да када говоримо о подскуповима, релација подскуп је транзитивна, односно:

$$\forall A, B, C \quad (A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \implies A \subseteq C$$

Прави подскуп ($\subset$)

Скуп A је прави подскуп скупа B ($A \subset B$) ако важи $A \subseteq B$ и постоји бар један елемент у B који није у A .

Партитивни скуп ($\mathcal{P}(A)$)

Партитивни скуп скупа A је скуп свих подскупа скупа A :

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Кардиналност партитивног скупа $\mathcal{P}(A)$ где A има n елемената је 2^n .

Унија скупова ($\cup$)

Унија скупова A и B ($A \cup B$) је скуп који садржи све елементе из A и све елементе из B :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Пресек скупова ($\cap$)

Пресек скупова A и B ($A \cap B$) је скуп свих елемената који су заједнички за оба скупа:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

За унију и пресек скупова важе следеће особине:

- **Комутативност:**

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

- **Асоцијативност:**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- **Дистрибутивност:**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- **Идемпотентност:**

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

- **Неутрални елементи:**

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

- **Услов подскупа (еквиваленција):**

$$A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$$

$$A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$$

Разлика скупова ($\setminus$)

Разлика скупова A и B ($A \setminus B$) је скуп свих елемената из A који нису у B :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Комплемент скупа A у односу на скуп B означавамо са $C(A)$, и дефинишемо га као:

$$C(A) = B \setminus A$$

што значи да $C(A)$ представља све елементе из B који нису у A .

За комплемент важе следеће особине:

- Комплемент комплемента скупа A једнак је самом скупу A .

$$C(C(A)) = A$$

- Комплемент празног скупа је цео скуп B , док је комплемент целог скупа B празан скуп.

$$C(\emptyset) = B, \quad C(B) = \emptyset$$

- Ако је скуп A подскуп од скупа B , онда је комплемент скупа B подскуп комплемента скупа A .

$$C(B) \subseteq C(A) \quad \text{ако је} \quad A \subseteq B$$

- Дистрибутивност комплемента:

$$C(A \cup B) = C(A) \cap C(B)$$

Комплемент уније два скупа је једнак пресеку њихових комплемената.

$$C(A \cap B) = C(A) \cup C(B)$$

Комплемент пресека два скупа је једнак унији њихових комплемената.

Симетрична разлика (Δ)

Симетрична разлика скупова A и B ($A \Delta B$) садржи елементе који припадају тачно једном од скупова:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Декартов производ ($\times$)

Декартов производ скупова A и B ($A \times B$) је скуп свих уређених парова (о њима ћемо детаљније говорити у 2.3) чији је први елемент из A , а други из B :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Такође, важи да је

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C,$$

Односно, у општем облику

$$A_1 \times \dots \times A_{n+1} = (A_1 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}.$$

Ради лакшег и краћег записа, можемо користити и следећу нотацију када је то потребно

$$A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ пута}}.$$

2.3 Појам уређеног пара. Значај

У класичној теорији скупова, концепт скупа је инхерентно неуређен. То значи да препознајемо да редослед елемената скупа не утиче на његов идентитет. За свако a и b , скуп $\{a, b\}$ исти је као скуп $\{b, a\}$. Такође, ако је $a = b$, тада се поменути скуп своди на једночлани скуп $\{a\}$. Док ова особина одговара основним принципима теорије скупова, она представља изазов када покушавамо да формално дефинишемо уређени пар, један од основних конструката у различитим гранама математике, посебно у релацијама и функцијама.

Конструкцију којом се дефинишу уређени парови предложио је пољски математичар Куратовски. Наиме, уређени пар (a, b) дефинишемо као скуп:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Овако, осигурава се да су уређени парови (a, b) и (b, a) различити у свим случајевима, осим када важи $a = b$.

2.3.1 Јединственост уређеног пара

Сада ћемо проверити да ли, дефинисањем на гореописани начин, осигуравамо јединственост, тј. да ли важи следеће:

$$(a, b) = (c, d) \rightarrow a = c \wedge b = d$$

Случај када је $a=b$ је тривијалан, те ћемо одмах прећи на случај када то не важи. За почетак, расписаћемо леву страну по дефиницији:

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

Из тога следи:

$$\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}$$

Из чега се једноставно долази до почетне тврдње.

3 Аксиоматско заснивање теорије скупова

Аксиоми играју кључну улогу у математици, управо јер пружају чврсту основу: можемо рећи и да представљају темељ на коме се касније гради целокупна логичка структура неког математичког система. Без јасно дефинисаних почетних правила, свака теорија би била подложна нејасноћама, парадоксима и контрадикцијама. Увођењем аксиома, омогућавамо да се чак и сложени математички концепти развијају прецизно и доследно.

Теорија скупова, као основа савремене математике, није изузетак. Иако се она на самом почетку развијала интуитивно, управо јер је описивала ствари које су биле интуитивне, убрзо су се почели појављивати парадокси и контрадикције (попут Раселовог парадокса, о коме ће касније бити речи). То је био јасан знак да је неопходна формализација у виду аксиома. Наиме, Џорџ Кантор увидео је значај функција између скупова и увео појам кардиналних и ординалних бројева, те се на неки начин сматра зачетником теорије скупова. Када је реч о самом сету аксиома, ту заслугу добијају два научника: Цермело (који је формулисао већину аксиома) и Френкел (схема-аксиом замене).

Георг Кантор (1845–1918) био је немачки математичар и зачетник теорије скупова. Након што је завршио гимназију 1860. године, образовање наставља на Универзитету у Берлину, где 1867. стиче и докторат. Неко време радио је као професор у гимназији. Позната је информација да је био и професор Универзитета у Халеу.

Ернст Цермело (1871–1953) био је немачки математичар и логичар. Био је Планков и Канторов ученик и студирао је математику, физику и филозофију. Његовим највећим доприносима науци сматрају се креирање аксиома избора и учешће у изради ZF система аксиома. Бавио се и термодинамиком и формулисао је Цермелов парадокс иреверзибилности статистичке интерпретације термодинамике у расправи са Лудвигом Болцманом. Напустио је Немачку услед неслагања са Хитлеровим режимом.

Адолф Абрахам Френкел (1891–1965) рођен је у Минхену у јеврејској породици. Студирао је математику на универзитетима у Минхену, Марбургу, Берлину и Бреслау, где је докторирао 1914. Након служења у немачкој војсци током Првог светског рата, предавао је на универзитетима у Марбургу и Килу, али се због ционистичких уверења преселио у Палестину 1929. године, где је био професор на Хебрејском универзитету у Јерусалиму. Био је први декан Факултета математике и ректор универзитета (1938–1940). Френкел је оставио значајне радове о независности аксиома избора и историји математике, укључујући Гаусову биографију. Активно се залагао за ционизам и религиозно образовање, а након пензионисања наставио је предавати на Бар-Илан универзитету.

1. Аксиом о једнакости скупова: Скупови X и Y су једнаки ако и само ако се састоје од истих елемената

$$\forall X \forall Y (X = Y \iff \forall z (z \in X \iff z \in Y)).$$

односно

$$X = Y \iff \forall t ((t \in X \implies t \in Y) \wedge (t \in Y \implies t \in X)).$$

2. Аксиом пара: За свако x и y постоји скуп $\{x, y\}$ који садржи тачно те елементе

$$\forall a \forall b \exists c \forall x (x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b)$$

3. Схема-аксиом¹ сепарације: Ако је P својство (са параметром p), онда за свако X и p постоји skup

$$Y = \{u \in X : P(u, p)\}$$

који садржи све оне елементе $u \in X$ који поседују својство P .

$$\forall X \forall p \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u, p)).$$

4. Аксиом уније: За свако X постоји skup $Y = \bigcup X$, унија свих елемената скупа X

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists z (z \in X \wedge u \in z)).$$

5. Аксиом партитивног скупа: За свако X постоји skup $Y = \mathcal{P}(X)$, који је skup свих подскупова скупа X

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall z)(z \subseteq X \implies z \in Y)$$

6. Аксиом бесконачности: Постоји бесконачан skup

$$(\exists X)(\emptyset \in X \wedge (\forall y \in X)(y \cup \{y\} \in X))$$

7. Схема-аксиом замене: Ако је класа F функција, онда за свако X постоји skup $Y = F(X) = \{F(x) : x \in X\}$ односно за сваку функцију која за домен има skup X постоји skup чији су елементи све вредности те функције

$$\forall x \forall y \forall z (\varphi(x, y, p) \wedge \varphi(x, z, p) \rightarrow y = z) \rightarrow \forall X \exists Y \forall y (y \in Y \leftrightarrow (\exists x \in X) \varphi(x, y, p)).$$

8. Аксиом добре заснованости: Сваки непразан skup има $\in$ -минимални елемент (то је елемент који не садржи ниједан други елемент датог скупа)

$$(\forall X)(X \neq \emptyset \implies (\exists y \in X) \neg (\exists z)(z \in X \wedge z \in y))$$

9. Аксиом избора (Axiom of Choice, скраћено AC): За сваки skup X узајамно дисјунктних непразних скупова (такозвана фамилија скупова) постоји skup Y који садржи тачно један елемент из сваког скупа из X

¹Назив „схема-аксиом“ користи се зато што се не ради о једној јединој изјави, већ о потенцијално бесконачно много инстанци аксиома — по једна за сваку формулацију својства φ које задовољава синтаксу теорије скупова. Другим речима, ово није аксиом у уобичајеном смислу (као појединачна тврдња), већ правило које омогућава формулисање многих аксиома истог типа. У Зермело-Френкеловој теорији скупова постоје две такве схеме, сепарације и замене.

3.1 Дебата о аксиоми избора

Интригантно је, заиста, осврнути се на суштинске контроверзе које окружују Аксиому избора (АС). Унутар математичке заједнице, дебата о томе да ли теорију скупова треба утемељити на Зермело-Френкеловим аксиомама без Аксиоме избора (ZF) или је пак неопходна теорија ZFC (ZF са АС), представља једну од најфундаменталнијих дилема савремене математике. Ова дилема није само техничке природе; она задире у саму срж нашег разумевања постојања математичких објеката, природе доказа и граница интуиције.

Заговорници ZFC теорије истичу не само да се АС не може извести из преосталих аксиома, већ и да је њена присутност кључна за развој и конзистентност многих виталних грана математике. Погледајмо неке од њених најзначајнијих импликација:

- **Анализа и топологија:** Без АС, многе кључне теореме из анализе и топологије, попут Тихоновљеве теореме (која тврди да је производ произвољне колекције компактних тополошких простора компактан у Тихоновљевој топологији) или постојања неких мера на одређеним просторима, не би могле бити доказане. Ово би озбиљно угрозило темеље функционалне анализе.
- **Линеарна алгебра:** Аксиома избора гарантује постојање базе за сваки векторски простор. Иако за коначно-димензионалне просторе ово није проблем, за бесконачно-димензионалне просторе без АС нема гаранције да таква база постоји. Ово има далекосежне последице на теорију оператора и сродне области.
- **Апстрактна алгебра и теорија редова:** Зорнова лема, еквивалентна АС, је моћно средство за доказивање постојања максималних елемената у парцијално уређеним скуповима. Ово се користи у доказима као што су постојање максималних идеала у прстену, или постојање алгебарског затворења поља.
- **Теорија Скупова:** У самој теорији скупова, АС је неопходна за успостављање еквиваленције између неких дефиниција бесконачности (нпр. између бесконачних скупова и оних који садрже пребројив бесконачан подскуп).

Укратко, одрицање од АС би нас приморало да редеофинишемо велики део постојеће математике или да прихватимо да многи интуитивно "постојећи" објекти заправо не постоје.

Са друге стране, постојање дубоко контра-интуитивних резултата, попут Банах-Тарски парадокса (који гласи: лопта у $\mathbb{R}^3$ се може разложити на коначан број делова, који се затим могу преуредити тако да формирају две идентичне лопте, свака исте запремине као оригинална) или Виталијеве теореме о неизмерљивим скуповима (која показује постојање подскупова интервала $[0,1]$ који нису Лебеговски измерљиви), тера нас на дубоко промишљање о импликацијама прихватања АС.

Ови "парадокси" не указују на логичку контрадикцију у ZFC теорији, већ пре на то да АС дозвољава конструкције које су супротстављена нашој геометријској интуицији, физичком разумевању материје и појму „мере“ који обично везујемо за свакодневни живот. Суштина проблема је у томе што АС омогућава „неконструктивне“ доказе постојања, односно, доказује постојање неког објекта, али не даје експлицитну методу за његову конструкцију.

Филозофске импликације и алтернативни приступи

Дебата о Аксиоми избора није само техничка, већ дубоко задире у филозофске теме:

- **Постојање математичких објеката:** Да ли математички објекти постоје независно од наших конструкција (платонизам), или су они само менталне конструкције (интуиционизам)? АС фаворизује платонистички приступ, док њено одбацавање води ка конструктивистичким и финитистичким погледима.
- **Природа доказа:** Да ли је доказ само гаранција непротивречности, или мора пружити и експлицитну конструкцију?

Неки математичари истражују математику без АС, док други истражују слабије форме АС (нпр. Аксиома пребројивог избора, AC_ω), које не воде до "парадокса" попут Банах-Тарског. Постоје и предлози да се АС замени другим аксиомама које би могле бити интуитивније, а да и даље омогуће развој већег дела потребне математике.

У овом раду нећемо се упуштати у дубље анализе свих ових аспеката, али снажно охрабрујемо читаоца да самостално истражи ову фасцинантну област. Литература коју посебно препоручујемо су књига Томаса Јеха "The Axiom of Choice", а они које занима и филозофска страна ове приче могу погледати "Foundations of Set Theory" од Френкела, Бар-Хилела и Левија.

4 Релације и функције кроз теорију скупова

Појмови релација и функција од фундаменталног су значаја за целу математику, па самим тим исто важи и за теорију скупова. У наставку ћемо приказати како се они дефинишу помоћу скупова и уређених парова.

4.1 Бинарне релација

Прво ћемо се подсетити тога шта су релације и које особине оне могу да имају. Ово нам је потребно зато што ћемо касније функције дефинисати као посебан тип бинарних релација.

Нека су A и B два непразна скупа. *Бинарна релација* ρ из скупа A у скуп B је подскуп Декартовог производа $A \times B$, тј.

$$\rho \subseteq A \times B.$$

Елемент $(a, b) \in \rho$ чита се као " a је у релацији ρ са b " и означава се записом

$$a \rho b.$$

У супротном, ако $(a, b) \notin \rho$, пишемо $a \not\rho b$. У посебном случају када важи да је $A = B$, кажемо да је ρ *бинарна релација на скупу* A .

Погледајмо неке важне дефиниције:

- *Домен* релације ρ је скуп

$$\text{dom}(\rho) = \{a \in A \mid \exists b \in B, (a, b) \in \rho\}.$$

- *Кодомен* релације ρ је скуп B .
- *Опсег* (односно *слика*) релације ρ је скуп

$$\text{ran}(\rho) = \{b \in B \mid \exists a \in A, (a, b) \in \rho\}.$$

4.1.1 Особине бинарних релација

Неопходно је напоменути да бинарне релације могу поседовати нека својства. Сада ћемо их навести и рећи нешто више о њима.

- **Рефлексивност:** Релација ρ је *рефлексивна* ако важи

$$\forall a \in A, (a, a) \in \rho.$$

- **Ирефлексивност:** ρ је *ирефлексивна* ако важи

$$\forall a \in A, (a, a) \notin \rho.$$

- **Симетричност:** ρ је *симетрична* ако важи

$$\forall a, b \in A, (a, b) \in \rho \implies (b, a) \in \rho.$$

- **Антисиметричност:** ρ је *антисиметрична* ако важи

$$\forall a, b \in A, (a, b) \in \rho \wedge (b, a) \in \rho \implies a = b.$$

- **Транзитивност:** ρ је *транзитивна* ако важи

$$\forall a, b, c \in A, (a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \rho \implies (a, c) \in \rho.$$

Такође, поседовање појединих особина релацију може сврстати у неку од следећих класа

- *Релација еквиваленције* је бинарна релација која је рефлексивна, симетрична и транзитивна.
- *Парцијално уређење* је бинарна релација која је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.
- *Строго парцијално уређење* је бинарна релација која је ирефлексивна и транзитивна.

4.1.2 Компоновање релација

Нека су $\rho \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ бинарне релације. *Композиција* релација $S \circ \rho \subseteq A \times C$ дефинише се правилом:

$$(a, c) \in S \circ \rho \quad \text{ако и само ако} \quad \exists b \in B \text{ такав да } (a, b) \in \rho \text{ и } (b, c) \in S.$$

Занимљиво је да је компоновање релација асоцијативно, тј. за релације $\rho \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ и $T \subseteq C \times D$ важи:

$$T \circ (S \circ \rho) = (T \circ S) \circ \rho.$$

4.1.3 Инверзна релација

За бинарну релацију $\rho \subseteq A \times B$ дефинишемо *инверзну релацију* $\rho^{-1} \subseteq B \times A$ као

$$\rho^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}.$$

Другим речима, важи:

$$a \rho b \quad \text{ако и само ако} \quad b \rho^{-1} a.$$

4.2 Функције

Главна поента функција у теорији скупова јесте у чињеници да њихово постојање одговара на питање: *Да ли скуп може бити добро дефинисан чак и ако не наведемо све његове елементе?* Одговор је потврдан.

Пресликавање (или трансформација) скупа A јесте сваки поступак f којим сваком елементу $x \in A$ придружимо неки скуп, што се означава као $f(x)$. У случају да је то пресликавање једнозначно, кажемо да је $f(x)$ функција.

Пресликавање f додељује сваком елементу из скупа A по један елемент из скупа B , при чему се каже да је **слика** (или трансформат) скупа A под пресликавањем f скуп $f(A) \subseteq B$. У општем случају, та слика може бити прави подскуп скупа B . Међутим, ако важи $f(A) = B$, тада кажемо да пресликавање f **пресликава цео скуп A на цео скуп B** , тј. да је f **сурјективно** (особина "на").

Ипак, очигледно је да не задовољава свако пресликавање ову особину. На пример, размотримо функцију $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисану као $f(x) = x^4$. У овом случају, иако је дефинисана на целом скупу реалних бројева, њена слика је $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$, што значи да негативни бројеви из скупа $\mathbb{R}$ нису достигнути ни за једну вредност улаза $x \in \mathbb{R}$. Дакле, f у овом случају није сурјективна, јер $f(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{R}$.

Ова разлика је од кључног значаја у теорији функција, јер говори о томе колико „достижно“ пресликавање покрива свој кодомен.

Теорема 4.1 (О монотоности пресликавања) *Нека је f пресликавање скупа A у неки скуп D . Ако важи $C \subseteq B \subseteq A$, тада следи:*

$$f(C) \subseteq f(B) \subseteq f(A)$$

.

Другим речима, пресликавање чува инклузију. То значи да је слика подскупа подскуп слике већег скупа.

Сада ћемо напоменути неколико интуитивних и основних чињеница. Најпре, уколико за свако $x \in A$ важи $f(x) = x$, тада говоримо о **идентичком пресликавању**. Насупрот томе, ако је $f(x) = \emptyset$, онда f не представља валидно пресликавање скупа A , јер није сваком елементу додељен тачно један елемент (скуп).

Пресликавање се назива **једнозначним** ако за свако $x \in A$ важи да је скуп $f(x)$ једночлан, тј. садржи тачно један елемент.

Да бисмо додатно осветлили појам функције као једнозначног пресликавања, корисно је осврнути се на један класичан пример из анализе — **Дирихлеову функцију**. Ова функција је дефинисана на скупу реалних бројева $\mathbb{R}$, и формално је задана овако:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \in \mathbb{Q} \text{ (} x \text{ је рационалан број)} \\ 0, & \text{ако } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ (} x \text{ је ирационалан број)} \end{cases}$$

Ово пресликавање јесте функција јер сваком $x \in \mathbb{R}$ додељује тачно једну вредност (она може бити 0 или 1, у зависности од тога који услов задовољава улаз) и тиме испуњава основни критеријум једнозначности.

За два пресликавања f и g кажемо да су **идентички једнака** ако су дефинисана на истом скупу A , кодомен им је исти и задовољавају услов:

$$f(x) = g(x) \quad \text{за свако } x \in A.$$

За два пресликавања f и g , **композиција функција** је дефинисано као:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

односно:

$$(g \circ f)(x) = \bigcup_{y \subseteq f(x)} g(y)$$

Важно је напоменути да, иако постоје случајеви када то важи, компоновање функција није увек комутативно, односно следеће није увек тачно:

$$f \circ g(x) = g \circ f(x)$$

Контрапример био би следећи: Ако је $f(x) = 2x$ и $g(x) = x + 3$, онда:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 3) = 2(x + 3) = 2x + 6$$

а

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x + 3$$

Сада, нека су f , g , и h пресликавања таква да је $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ и $h: C \rightarrow D$. За ова пресликавања важи **асоцијативност компоновања функција**:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Ово значи да редослед компоновања функција није битан и да добијамо исти резултат, без обзира на то да ли прво компонујемо g и f , па затим h , или прво компонујемо h и g , па затим f .

Доказ:

Ако је $x \in A$, имамо:

1. Са леве стране прво примењујемо f , затим g , и на крају h :

$$h \circ (g \circ f)(x) = h \circ (g(f(x))) = h(g(f(x))).$$

2. Са десне стране прво примењујемо f , затим g , и на крају h :

$$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

Као што се види, у оба случаја добијамо исти резултат, што је требало доказати.

Инверзно пресликавање

За дато пресликавање $f: A \rightarrow B$, дефинишемо **инверзно пресликавање** као пресликавање које сваком елементу $y \in f(A)$ придружује скуп свих елемената $x \in A$ за које важи $f(x) = y$. Ово пресликавање означавамо са f^{-1} , и дефинишемо га као:

$$f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}.$$

Ако је f бијекција, тада за свако $y \in B$ постоји тачно један $x \in A$ такав да важи:

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x.$$

У том случају, важе следеће фундаменталне особине:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \text{за свако } x \in A,$$

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad \text{за свако } y \in B.$$

Брза напомена о нотацији и интерпретацији: Ознака f^{-1} се користи искључиво за означавање инверзног пресликавања, и никако се не сме бркати са нотацијом за реципрочну вредност, тј. $(f(x))^{-1}$, која означава реципрочну вредност броја $f(x)$ (ако је она дефинисана).

Такође је важно истаћи да инверзно пресликавање има значајну улогу када говоримо о композицији функција. На пример, ако су $f : A \rightarrow B$ и $f^{-1} : B \rightarrow A$ међусобно инверзна пресликавања, тада композиције дају идентичка пресликавања:

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_A, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_B.$$

Овим се потврђује да је функција f реверзибилна, а пресликавање f^{-1} служи као њен математички "повратак уназад".

Поставља се природно питање: *када функција нема инверзну функцију?* Иако смо дефинисали инверзно пресликавање као релацију која свакој вредности $y \in f(A)$ придружује скуп свих $x \in A$ за које је $f(x) = y$, то не значи да је f^{-1} нужно функција у строгом смислу. Да би инверзно пресликавање било права функција — тј. да би свака вредност y имала тачно једног претечу x — потребно је да оригинална функција f буде **бијективна**.

Размотримо једноставан, али изузетно поучан пример:

Нека је дата функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана формулом:

$$f(x) = x^2.$$

Ова функција сваком реалном броју додељује његов квадрат. На први поглед, све изгледа у реду: функција је јасно дефинисана и сваком x придружује тачно једно y . Међутим, запитајмо се: може ли ова функција имати инверзну функцију?

Погледајмо конкретан случај:

$$f(2) = 4, \quad \text{а такође} \quad f(-2) = 4.$$

Дакле:

$$f(2) = f(-2),$$

иако је очигледно $2 \neq -2$. Ово нам говори да је функција f **неинјективна**, јер постоје различити елементи у домену који се пресликавају у исту вредност у кодомену. Тиме је доведена у питање једнозначност инверзног пресликавања.

Ако покушамо да конструишемо f^{-1} , добијамо:

$$f^{-1}(4) = \{2, -2\},$$

што више није функција — јер за једно y постоји више могућих x . Дакле, функција f у овом облику *нема инверзну функцију*, већ инверзну релацију.

Како решити проблем?

Једно од најчешћих решења у теорији функција јесте **ограничавање домена** функције на скуп на којем она постаје инјективна. У нашем примеру, функција $f(x) = x^2$ је инјективна ако је посматрамо само на ненегативним бројевима, тј. на интервалу:

$$[0, \infty).$$

На овом интервалу, сваки број има јединствени квадрат, и важи:

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f(x) = x^2,$$

са инверзном функцијом:

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

У овом ограниченом контексту, сада је испуњен услов једнозначности и f^{-1} јесте права функција. На тај начин функција постаје реверзибилна.

Дакле, да би пресликавање имало инверзну функцију, оно мора бити *инјективно* (да различити елементи имају различите слике) и *сурјективно* (да свака вредност у кодомену буде досегнута). Ограничавање домена представља занимљиву и важну технику у теорији скупова и анализи уопште, којом омогућавамо да функције које иначе нису инверзибилне то ипак постану, наравно у одговарајућем, пажљиво изабраном контексту.

Ако за неко инверзно пресликавање f^{-1} важи да је оно једнозначно, онда за трансформацију f кажемо да је **једнолисна**. Пресликавања која су и једнозначна и једнолисна имају посебан назив: **обострано једнозначна пресликавања**. Занимљиво је то да се из тога може извући још једна дефиниција еквиваленције скупова. Наиме, скупови A и B су еквивалентни ако постоји обострано једнозначна трансформација f таква да је $f(A)=B$.

5 Ординални бројеви

Да бисмо разумели појам ординалних бројева, најпре је неопходно упознати се са основним појмовима из теорије редоследа. Теорија редоследа проучава структуре које су опремљене бинарном релацијом "мање од" или општим поређењем, и које на тај начин омогућавају упоређивање елемената.

5.1 Увод у теорију поретка

5.1.1 Парцијални поредак

Нека је A непразан скуп и нека је $<$ бинарна релација дефинисана на скупу A . Кажемо да је $<$ **парцијални поредак** на скупу A ако су испуњена следећа два услова:

1. **Ирефлексивност:** Важи $a \not< a$ за свако $a \in A$
2. **Транзитивност:** Ако је $a < b$ и $b < c$, тада следи $a < c$ за свако $a, b, c \in A$

Релација која задовољава ове услове омогућава постављање хијерархије или структуре међу елементима скупа, али не мора дозвољавати да се свака два елемента упореде.

Ако бинарна релација $<$ задовољава само услове рефлексивности и транзитивности онда за њу кажемо да је **квазиуређење** (или **предпоредак**) на скупу A .

5.1.2 Линеарни (тотални) редослед

Парцијални редослед постаје **линеаран** односно **тоталан** ако додатно важи и следећи услов:

3. **Комплетност:** За свака два елемента $a, b \in A$, важи искључиво једно својство од следећих: $a < b$, $a = b$ или $b < a$.

Другим речима, у линеарном редоследу сваки пар елемената је упоредив, што је из самог назива негде и очигледно.

У оквиру парцијално или линеарно уређених скупова, разликују се специфични елементи који играју значајну улогу у анализирању структуре скупа.

- Елемент $a \in A$ је **минимални елемент** ако не постоји ниједан елемент $b \in A$ такав да $b < a$.
- Елемент $a \in A$ је **максимални елемент** ако не постоји ниједан $b \in A$ такав да $a < b$.

Важно је нагласити да минимални и максимални елементи не морају бити јединствени.

- **Најмањи елемент** скупа A је елемент $a \in A$ такав да за сваки $b \in A$ важи $a < b$.
- **Највећи елемент** је елемент $a \in A$ такав да за сваки $b \in A$ важи $b < a$.

За разлику од минималног, најмањи елемент је увек јединствен (ако постоји наравно).

Нека је $B \subseteq A$ подскуп уређеног скупа A .

- Елемент $a \in A$ је **горња граница** за B ако за свако $b \in B$ важи $b \leq a$.
- Елемент $a \in A$ је **доња граница** за B ако за свако $b \in B$ важи $a \leq b$.
- **Супремум** (најмања горња граница) је најмањи елемент међу свим горњим границама скупа B , ако постоји.
- **Инфимум** (највећа доња граница) је највећи елемент међу свим доњим границама скупа B , ако постоји.

У литератури најчешће се могу срести следеће ознаке: $\sup A$ (за супремум скупа A) и $\inf A$ (за инфимум скупа A).

Нека су $(A, <)$ и $(B, <)$ два парцијално уређена скупа, и нека постоји пресликавање за које важи $f : A \rightarrow B$. Кажемо да **функција f чува редослед** ако:

$$\forall a, b \in A, \quad a < b \Rightarrow f(a) < f(b).$$

Такве функције играју значајну улогу у проучавању структуре уређених скупова, јер обезбеђују да се релације међу елементима чувају и у сликама функције.

Нека су $(A, <)$ и $(B, <)$ два уређена скупа. Функција $f : A \rightarrow B$ је **изоморфизам** ако испуњава следеће услове:

- Функција f је бијекција (1-1 и на).
- Функција f чува редослед:

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b).$$

- Инверзна функција $f^{-1} : B \rightarrow A$ такође чува редослед

Уколико скуп A има изоморфизам на самог себе, тј. постоји бијективна функција $f : A \rightarrow A$ која је изоморфизам, кажемо да је f **аутоморфизам** скупа A .

Линеаран редослед $<$ на скупу A назива се **добро уређење** ако сваки непразан подскуп скупа A има најмањи елемент.

То јест, за свако $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$, постоји $b_0 \in B$ такав да за све $b \in B$ важи $b_0 \leq b$.

Како то у пракси изгледа? За скуп природних бројева $\mathbb{N}$ кажемо да је пример доброг уређења, јер је очигледно да има ту особину. Са друге стране подскуп скупа целих бројева $\{\dots -3, -2, -1, 0\}$ нема најмањи елемент, те скуп $\mathbb{Z}$ није добро уређен.

Лема. Нека је $(A, <)$ добро уређен скуп и нека је $f : A \rightarrow A$ строго растућа функција (монотона), тј. за све $a < b$ важи $f(a) < f(b)$. Тада за свако $a \in A$ важи:

$$a < f(a).$$

Доказ: Претпоставимо супротно, да постоји $a \in A$ такав да $f(a) < a$. Посматрајмо скуп:

$$B = \{x \in A : f(x) < x\}.$$

Пошто је A добро уређен, скуп B има најмањи елемент, рецимо a_0 . Тада је:

$$f(a_0) < a_0.$$

Али како је f строго растућа, имамо:

$$f(f(a_0)) < f(a_0) < a_0,$$

из првог дела следи да $f(a_0) \in B$, па $f(a_0) < a_0$ противречи да је a_0 најмањи елемент. ■

5.2 Ординални бројеви

Ординални бројеви се конструишу као специјалне врсте скупова. Поређење међу њима ослања се на релацију припадања: кажемо да је ординал $\alpha < \beta$ ако и само ако $\alpha \in \beta$. Такође, ординал α је управо скуп свих ординала строго мањих од њега, што записујемо као:

$$\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}.$$

Они генерализују идеју бројања на бесконачне, добро уређене скупове, омогућавајући нам да прецизно класификујемо и упоређујемо различите типове уређења.

Формална дефиниција

Кажемо да је скуп α **ординални број** (или **ординал**) ако важе следећи услови:

- α је **транзитиван скуп**: сваки елемент скупа α је такође и подскуп скупа α ,
- Скуп α , са релацијом припадања $\in$, је **добро уређен**.

Другим речима, ординални бројеви су они скупови који су и транзитивни и добро уређени релацијом $\in$.

За означавање ординалних бројева најчешће се користи мала грчка слова: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Неки основни ординали су:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \{0\} = \{\emptyset\} \\ 2 &= \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 &= \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Као што видимо, сваки ординал је скуп који садржи све претходне ординале, тј. $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$

Кључне леме о ординалима

- Скуп $\emptyset$ је ординал.
- Ако је α ординал и $\beta \in \alpha$, тада је и β ординал.

- (iii) Ако $\alpha \neq \beta$ и оба су ординали, и ако је $\alpha \subset \beta$, тада важи $\alpha \in \beta$.
- (iv) За свака два ординала α и β , важи тачно једно: $\alpha \subseteq \beta$ или $\beta \subseteq \alpha$. Другим речима, ординали су линеарно уређени релацијом $\in$.

Најинтуитивнији начин да посматрамо ординале је следећи: ординали су изграђени тако да сваки садржи све мање ординале као своје чланове. Ова конструкција омогућава да ординали не само мере „дужину“ редоследа, већ и чувају његову структуру. Сваки ординал је јединствени представник једног типа добро уређеног скупа до на изоморфизам. Помоћу њих можемо класификовати све могуће добро уређене скупоове до изоморфизма.

Теорема: Сваки добро уређен скуп је изоморфан једном и само једном ординалу.

Ова теорема представља темељну мотивацију за увођење ординалних бројева. Добро уређени скупови не само да се могу идентификовати помоћу ординала, већ им ординали пружају канонску форму — сваки тип доброг уређења може да се представи јединственим ординалом.

За ординал β , дефинишемо **следбенички ординал** као:

$$\alpha = \beta + 1 := \beta \cup \{\beta\}.$$

Ординал α је **следбеник** ако постоји β такав да је $\alpha = \beta + 1$.

Ако ординал није једнак ни једном следбенику, тј. није облика $\beta + 1$, онда се назива **гранични ординал**.

Најмањи гранични ординал обележавамо са ω , и он представља скуп свих коначних ординала, тј. природних бројева:

$$\omega = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

5.2.1 Коначни и бесконачни ординали

Скуп A је **коначан** ако постоји бијективна функција између A и неког скупа облика $\{0, 1, \dots, n-1\} \subset \mathbb{N}$. Иначе, A је **бесконачан**.

Ординал ω је први бесконачни ординал и садржи све коначне ординалне бројеве. Сваки ординал већи од ω је такође бесконачан.

5.2.2 Ординална аритметика

Операције сабирања, множења и степеновања се могу дефинисати над ординалима. Међутим, важно је нагласити да ове операције нису уопштено комутативне (за разлику од аритметике природних бројева), али јесу асоцијативне.

Сабирање

Дефинишемо сабирање ординала рекурзивно по другом аргументу:

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
- Ако је λ гранични ординал, онда:

$$\alpha + \lambda = \sup\{\alpha + \beta : \beta < \lambda\}$$

Множење

Дефинишемо множење на следећи начин:

- $\alpha \cdot 0 = 0$
- $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$
- За гранични ординал λ :

$$\alpha \cdot \lambda = \sup\{\alpha \cdot \beta : \beta < \lambda\}$$

Пример: $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$, што је ординал дужине два пута по ω .

Степеновање

Степеновање ординала се дефинише рекурзивно:

- $\alpha^0 = 1$
- $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$
- Ако је λ гранични ординал:

$$\alpha^\lambda = \sup\{\alpha^\beta : \beta < \lambda\}$$

Ординално степеновање се понаша другачије од стандардног степеновања у $\mathbb{N}$, али задржава основне рекурзивне особине.

Важно: Ни сабирање, ни множење ординала нису комутативне операције. На пример:

$$1 + \omega = \omega \quad \text{али} \quad \omega + 1 > \omega,$$

док:

$$2 \cdot \omega = \omega \quad \text{али} \quad \omega \cdot 2 > \omega.$$

Са друге стране, обе операције су асоцијативне:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma).$$

Нека су $(A, <_A)$ и $(B, <_B)$ два дисјунктна линеарно уређена скупа.

Збир скупова A и B , означен са $A + B$, дефинише се као унија скупова $A \cup B$, уз следећу релацију:

За $x, y \in A \cup B$, дефинишемо $x < y$ ако и само ако важи нешто од следећег:

- (i) $x, y \in A$ и $x <_A y$;
- (ii) $x, y \in B$ и $x <_B y$;
- (iii) $x \in A, y \in B$.

Ова конструкција ставља све елементе скупа A пре свих елемената скупа B , задржавајући редоследе унутар сваког појединачног скупа.

За скупове A и B , дефинишемо уређење на производу $A \times B$ релацијом:

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2) \iff b_1 <_B b_2 \vee (b_1 = b_2 \wedge a_1 <_A a_2).$$

Дакле, главни критеријум поређења је вредност у B , а вредности у A се користе само када су вредности у B једнаке. Ова конструкција има кључну улогу у дефинисању ординалног множења.

Лема. За свака два ординала α и β , збир $\alpha + \beta$ је изоморфан са збиром α и β као уређених скупова, а производ $\alpha \cdot \beta$ је изоморфан са њиховим лексикографским производом.

Канторова нормална форма. Сваки ординал α који није једнак 0 може се једнозначно записати у облику:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot c_1 + \omega^{\beta_2} \cdot c_2 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot c_n,$$

где су $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n$ ординали, а $c_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ за сваки i .

Овај запис се назива **Канторов нормални облик** ординала α . Он изражава сваки ординал као коначну суму степена ω , што нам омогућава ефикасно извођење аритметике и класификацију ординала.

Доказ: Доказ се заснива на индукцији. Ако је $\alpha = 0$, очигледно је да тврђење важи. Претпоставимо онда да важи за све ординале мање од α . Нека је $\alpha > 0$. Тада постоји највећи ординал β такав да $\omega^\beta \leq \alpha$. Нека је c максималан природан број такав да $\omega^\beta \cdot c \leq \alpha$. Тада дефинишемо:

$$\alpha' = \alpha - \omega^\beta \cdot c.$$

По индуктивној претпоставци, α' се може представити у Канторовом облику, па тако и α можемо. Јединственост следи из својстава ординалне аритметике.

Најмањи ординал који задовољава следећу формулу:

$$\omega^\alpha = \alpha$$

назива се ε_0 . Другим речима, ε_0 је најмања фиксна тачка функције $\alpha \mapsto \omega^\alpha$. Овај ординал не може се достићи коначним или трансфинитним бројем итерација функције ω^α почевши од 0, што га чини првом границом таквог процеса.

Такође, ординали већи од ω омогућили су нам формализацију методе **трансфинитне индукције**, која генерализује класичну математичку индукцију на бесконачне добро уређене скупове.

6 Кардинални бројеви

Интуитивно, за два скупа кажемо да имају „исту величину“ ако можемо да поставимо савршену кореспонденцију између њихових елемената, тако да ниједан елемент не остане без пара ни у једном од скупова.

- Скупови: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$

$$|A| = |B| = 3$$

Постоји бијекција између A и B : нпр. $1 \mapsto a$, $2 \mapsto b$, $3 \mapsto c$

- Скупови: $C = \{\heartsuit, \spadesuit\}$, $D = \{0, 1\}$

$$|C| = |D| = 2$$

За два скупа A и B , кажемо да имају **исту кардиналност**, односно да је $|A| = |B|$, ако и само ако постоји бијективно пресликавање скупа A на скуп B .

Идеја је заправо да скуповима можемо доделити кардиналне бројеве као ознаке њихове величине. То значи да два скупа имају исти **кардинални број** једино ако задовољавају дату дефиницију. Као што смо на почетку и поменули, скупове делимо на коначне и бесконачне. Сада ћемо те појмове дефинисати уз употребу кардиналних бројева. За скуп A кажемо да је **коначан** ако $|A| = n$, за неко $n \in \mathbb{N}$. Тако смо коначне кардинале практично дефинисали преко природних бројева. Поставља се логично питање, да ли, попут природних бројева, и кардиналности можемо упоређивати?

За скупове A и B , дефинишемо релацију:

$$|A| \leq |B|$$

ако постоји инјективна функција $f : A \rightarrow B$. Ако додатно $|A| \neq |B|$, тада пишемо:

$$|A| < |B|.$$

Релација је **транзитивна**: ако $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C|$, тада $|A| \leq |C|$.

Канторова теорема За сваки скуп A важи:

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|,$$

где је $\mathcal{P}(A)$ паритивни скуп.

Доказ: Претпоставимо супротно, односно да постоји бијективна функција f , где $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$. Посматрајмо следећи скуп:

$$B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}.$$

Пошто је $B \subseteq A$, мора постојати $b \in A$ такво да је $f(b) = B$. Питамо се: да ли $b \in B$?

- Ако $b \in B$, по дефиницији B , следи да $b \notin f(b) = B$ — контрадикција.
- Ако $b \notin B$, следи да $b \in f(b) = B$ — опет контрадикција.

Дакле, такво f не постоји, те закључујемо $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. ■

Кантор-Бернштајн Теорема: За било која два скупа A и B , ако важи $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, тада је $|A| = |B|$.

Ординал α је **кардинални број** ако за свако $\beta < \alpha$ важи $|\alpha| \neq |\beta|$.

Најмањи бесконачни кардинал

Ординал ω (најмањи бесконачни ординал) такође је и први бесконачни кардинал. Он одговара кардиналности скупа природних бројева, и често се означава са $\aleph_0$ (читамо алеф нула). Уобичајено је да се мала грчка слова, попут κ , λ , μ , користе за означавање кардиналних бројева.

Алеф бројеви су ординали који су кардинални и бесконачни. Ознака за први такав број је:

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| = \omega.$$

Скупови који имају кардиналност $\aleph_0$ називају се **пребројиво бесконачни** или једноставно **пребројиви**.

Сада ћемо приказати једну корисну лему:

1. За сваки ординал α постоји кардинални број κ такав да $\kappa > \alpha$.
2. Ако је A скуп кардиналних бројева, тада је $\sup A$ такође кардинални број.

Ова лема нам заправо говори да увек постоји већи кардинал од неког датог кардинала. Оно што нам она додатно омогућава, јесте такозвана **енумерација кардинала**.

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1} < \dots$$

где је функција $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ растућа и пресликава сваки ординал у јединствени кардинал.

$$\aleph_0 = \omega, \quad \aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+, \quad \aleph_\alpha = \omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta : \beta < \alpha\} \quad \text{за } \alpha \text{ гранични ординал.}$$

За кардинал κ кажемо да је **наследни кардинал** ако постоји кардинал λ такав да је $\kappa = \lambda^+$, тј. најмањи кардинал већи од λ . Кардинал који није наследник ниједног кардинала назива се **гранични кардинал**.

Прва једнакост $\aleph_0 = \omega$ означава да је најмања бесконачна кардиналност једнака кардиналности скупа природних бројева, односно свих пребројиво бесконачних скупова. Следећи алефи добијају се сукцесивно: $\aleph_{\alpha+1}$ је први кардинал већи од $\aleph_\alpha$, означен са $\aleph_\alpha^+$. У случају када је α гранични ординал, тада је $\aleph_\alpha$ супремум свих претходних кардинала, што значи да се ради о најмањој кардиналности већој од свих $\aleph_\beta$ за $\beta < \alpha$, али која није непосредни наследник ниједног од њих.

Ова хијерархијска конструкција омогућава прецизно индексирање свих бесконачних кардиналности и јасно разликовање између различитих нивоа бесконачности. На пример, $\aleph_1$ је најмањи кардинал већи од $\aleph_0$.

Скуп A је **пребројив** ако је $|A| = \aleph_0$. То су сви скупови који се могу довести у бијекцију са $\mathbb{N}$, попут $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

Лема Кардинални број скупа $\mathbb{N}$ је већи од сваког природног броја, односно $\aleph_0 > n$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\aleph_0 + 1 &= \aleph_0 \\
\aleph_0 + n &= \aleph_0 \quad \text{за свако коначно } n \in \mathbb{N} \\
\aleph_0 + \aleph_0 &= \aleph_0 \\
\aleph_0 \cdot n &= \aleph_0 \quad \text{за свако коначно } n \in \mathbb{N} \\
\aleph_0 \cdot \aleph_0 &= \aleph_0 \\
\aleph_0^n &= \aleph_0 \quad \text{за свако коначно } n \geq 1
\end{aligned}$$

За $\aleph_0$ можемо рећи да је такозвани апсорбујући елемент за сабирање, множење и степеновање природним бројевима, односно резултирајућа кардиналност остаје $\aleph_0$.

Теорема За неке кардиналне бројеве m и n , $m \leq n$ и m је **највише пребројив** (тј. коначан или пребројив), а $n - m$ је бесконачно, следи да је $n - m = n$.

6.1 Кардинална аритметика

У оквиру теорије кардиналности, могуће је дефинисати основне аритметичке операције над кардиналним бројевима: сабирање, множење и степеновање. За разлику од ординалне аритметике, кардинална аритметика је много "питомија": операције сабирања и множења су у потпуности комутативне, асоцијативне и дистрибутивне у оба смера.

6.1.1 Сабирање кардиналних бројева

Нека су κ и λ кардинални бројеви. Тада је кардинална сума $\kappa + \lambda$ дефинисана као кардиналност дисјунктне уније два скупа A и B такве да $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$, и $A \cap B = \emptyset$.

$$\kappa + \lambda = |A \cup B| \quad \text{при чему је } A \cap B = \emptyset$$

Сабирање кардиналних бројева је:

- **Комутативно:** $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$
- **Асоцијативно:** $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$

6.1.2 Множење кардиналних бројева

Множење се дефинише преко Декартовог производа:

$$\kappa \cdot \lambda = |A \times B| \quad \text{где је } |A| = \kappa, |B| = \lambda$$

Такође, важе следеће особине:

- **Комутативност:** $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$
- **Асоцијативност:** $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$

Поред тога, као што смо већ и поменули, сабирање и множење кардиналних бројева задовољавају закон дистрибутивности у оба смера:

$$\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu \quad \text{и} \quad (\kappa + \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot \mu + \lambda \cdot \mu$$

6.1.3 Степеновање

Пре него што уведемо степеновање кардиналних бројева, поставимо основне вредности:

$$\kappa^0 = 1 \quad (\text{за свако } \kappa \neq 0)$$

$$0^\kappa = 0 \quad (\text{за } \kappa > 0)$$

$$1^\kappa = 1 \quad (\text{за свако } \kappa)$$

$$\kappa^1 = \kappa$$

$$\kappa^\lambda = \text{број функција из скупа кардиналности } \lambda \text{ у скуп кардиналности } \kappa$$

Степеновање кардиналних бројева се дефинише као кардиналност скупа свих функција из једног скупа у други:

$$\kappa^\lambda = |\{f : \lambda \rightarrow \kappa\}|$$

Степеновање задовољава следеће алгебарске законе:

- $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$
- $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$
- $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$
- Ако је $\lambda < \mu$ и $\kappa > 1$, тада је $\kappa^\lambda < \kappa^\mu$
- Ако су $\kappa < \lambda$ и $\mu > 0$, тада је $\kappa^\mu < \lambda^\mu$

7 Парадокси

Иако је Георг Кантор поставио темеље модерне теорије скупова крајем XIX века, убрзо након тога су откривени парадокси који су довели у питање доследност његове теорије. Ови парадокси играли су кључну улогу у развоју аксиоматске теорије скупова и у коначном напуштању наивног схватања скупа као „коллекције објеката са неком особином”.

У овом поглављу ћемо приказати неке од најпознатијих парадокса који су указали на границе наивне ² теорије скупова.

7.1 Канторов парадокс (1899.)

Кантор је показао да за сваки скуп A важи неједнакост

$$\text{card}(A) < \text{card}(\mathcal{P}(A)),$$

где је $\mathcal{P}(A)$ скуп свих подскупова скупа A . Међутим, ако се узме у обзир скуп свих скупова, U , онда $\mathcal{P}(U)$ мора бити подскуп U (јер су елементи $\mathcal{P}(U)$ такође скупови), што доводи до контрадикције:

$$\text{card}(U) < \text{card}(\mathcal{P}(U)) \leq \text{card}(U).$$

Овај парадокс указује на то да не може постојати скуп свих скупова, јер такав објекат доводи до логичке недоследности.

7.2 Раселов парадокс (1901.)

Један од најпознатијих логичких парадокса формулисао је Бертран Расел. Ако за свако својство постоји скуп свих објеката који задовољавају то својство, онда то важи и за својство „скуп не припада сам себи“. Посматрајмо скуп

$$R = \{x \mid x \notin x\}.$$

Поставља се питање: да ли $R \in R$? Ако важи $R \in R$, онда по дефиницији скупа R мора важити $R \notin R$. Са друге стране, ако $R \notin R$, онда по дефиницији $R \in R$. У оба случаја долазимо до контрадикције.

Овај парадокс показује да није могуће формирати скуп свих скупова који не садрже сами себе као елементе, чиме се директно нарушава наивна употреба аксиома издвајања.

7.3 Бурали-Фортијев парадокс (1897.)

Према Канторовој теорији, за сваки скуп ординалних бројева постоји ординал већи од свих њих. Ако бисмо покушали да формирамо скуп свих ординалних бројева Ω , онда би по Канторовој конструкцији ординал Ω морао бити и сам ординал и већи од сваког ординала у Ω . Али то значи да би $\Omega < \Omega$, што је немогуће. Овај парадокс указује да скуп свих ординала не може постојати унутар теорије скупова.

²Назив потиче од чињенице да на самом почетку развоја теорије она није била аксиоматски заснована

Сви ови парадокси имају заједничко исходиште: претпоставку да за сваку особину постоји скуп свих објеката који ту особину имају. Као реакција на ове проблеме развијене су аксиоматске теорије скупова, попут Зермело-Френкелове теорије са аксиомом избора (ZFC), које строго ограничавају начине формирања скупова.

8 Закључак

Теорија скупова представља темељ савремене математике, пружајући формални језик и структуру за изграђивање свих осталих математичких дисциплина. Почев од наивне интуиције о скупу као збирци објеката, развој теорије је наишао на бројне логичке потешкоће, што је резултовало потребом за прецизним аксиоматским заснивањем.

Кроз анализу Зермело–Френкеловог система аксиома, који уз аксиом избора чини основу ZFC теорије, увидели смо како се пажљиво дефинисаним правилима избегавају парадокси попут Раселовог и Бурали-Фортијевог. Овај формализам омогућава доследно дефинисање основних концепата као што су елементарне релације и функције, које чине основе математичке логике, теорије категорија и структура.

Проучавање ординалних бројева пружа увид у уређене типове и трансфинитне индукције, док кардинални бројеви омогућавају прецизно мерење „величине“ бесконачних скупова. Разликовање између ових појмова је кључно за разумевање дубљих нивоа апстракције у математици и за рад у областима као што су топологија, анализа и теорија модела.

На крају, парадокси који су историјски довели до преиспитивања основа математике подсећају нас да формалне теорије морају бити пажљиво конструисане. Они не само да имају историјску вредност, већ и данас служе као полазна тачка за развој нових логичких система и алтернативних теорија скупова.

Теорија скупова остаје једна од најдубљих и најапстрактнијих области математике, не само због свог фундаменталног карактера, већ и због своје способности да поставља границе онога што можемо формално описати, доказати и разумети у оквиру самог математичког језика.

Литература

- [1] Александар Крон. *Елементарна теорија скупова*. Математички институт, Београд: Студио плус, 1992.
- [2] Ђуро Курепа. *Теорија скупова*. Школска књига, Загреб, 1951.
- [3] Томас Јех. *Set Theory*. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Берлин, 2003.
- [4] А. А. Франкел, Ј. Бар-Хилел, А. Леви. *Foundations of Set Theory*. North-Holland Publishing Company, Амстердам, 1973.
- [5] Кантор – Одабрани текстови. Доступно на: <https://vladimirbozovic.net/univerzitet/bozovic/wp-content/uploads/2020/04/Cantor-2.pdf> [Посећено 29. маја 2025.]
- [6] Ernst Zermelo. *Art of Problem Solving Wiki*. Доступно на: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Ernst_Zermelo [Посећено 29. маја 2025.]
- [7] *Велика општа илустрована енциклопедија Larousse*. Просвета, Београд.
- [8] *Abraham Fraenkel – Biography*, MacTutor History of Mathematics archive. Доступно на: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fraenkel/> [Посећено 29. маја 2025.]

Захвалност

Изражавам искрену и дубоку захвалност мом ментору, др Бориславу Гајићу, на стручном вођењу, стрпљивом читању и драгоценим сугестијама током свих фаза израде овог рада. Његова подршка, методолошко усмеравање и прецизно око за детаље били су од непроцењивог значаја у формирању и уобличавању тема обрађених у овом истраживању.

Захваљујем и свим колегама и пријатељима који су прочитали рад у различитим фазама и својим коментарима, питањима и предлозима помогли да формулације буду јасније, а аргументација прецизнија. Посебно бих истакла Павла Ивановића, чија је пажљива и темељна анализа била кључна у провери логичке јасноће и унутрашње повезаности изложених идеја. Искрено се захваљујем Данилу Грујићу, који је, иако није био у обавези, издвојио време да детаљно прочита рад и подели своје корисне коментаре и сугестије, чиме је значајно допринео квалитету коначне верзије.

Искрену захвалност дугујем и Марини Гавриловић, која је својом стручном лектуром и коректуром допринела да текст буде језички исправан, стилски уједначен и пријемчив за читаоца, без губитка научне прецизности. Такође се захваљујем и Саши и Алекси, чији је скептицизам одиграо важну улогу у овом раду – да није било њихових сумњи, можда бисмо остали у свету лепих и лаких идеја, а не озбиљне аргументације!

Сви који су на било који начин учествовали у настанку овог рада имају моју захвалност, иако их није могуће све поименице навести. Њихов допринос се огледа у квалитету, јасноћи и заокружености овог истраживања.