

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД
ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Полуправилна тела

Ученик

Видан ЦИВКАРОСКИ, IVa

Ментор

Војислав ПАНТИЋ

Београд, 30. мај 2025. године

Садржај

1	Увод	1
1.1	Историја до Платона	1
1.2	Еуклидови Елементи	2
1.3	Занимљивости	2
2	Полиедри	4
2.1	Особине полиедара	4
2.1.1	Дефинисање	4
2.1.2	Дуалност	5
2.1.3	Тополошка својства полиедара. Ојлерова карактеристика	5
2.2	Правилни полиедри	7
2.2.1	Дефинисање	7
2.2.2	Конструкције правилних тела	9
3	Архимедова тела	11
3.1	Призме и антипризме	11
3.2	Одсецање правилних полиедара	12
3.3	Увртање правилних полиедара	13
3.4	Пресецање правилних полиедара	14
3.5	Одсецање пресека правилних полиедара	15
3.6	Ромбична тела	16
3.7	Каталанова тела	17
4	Композиције и стелације	18
4.1	Стелације полигона	18
4.2	Стелације полиедара	18
4.3	Неконвексна правилна тела	19
4.4	Композитна тела	20
4.4.1	Правилна композитна тела	20
4.4.2	Композиција дуалних тела	21
5	Литература	22

САДРЖАЈ

А	Слике	25
1	Увод	25
2	Полиедри	27
3	Архимедова тела	30
4	Стелације и композиције	35
Б	Табеле	41

1

Увод

1.1 Историја до Платона

Људи су своју знатижељу и радозналост за све типове облика и тела показивали још у временима када су исте цртали по зидовима пећина. Како су развијали свест о геометрији као науци, тако су долазиле и конструкције првих правилних фигура, односно тела. Наравно, то је нешто о чему нема никаквих сведочења, па се никад не може са сигурношћу рећи ко је био оригинални „проналазач” било које фигуре или тела. С обзиром на то да закони математике не зависе од културе једног или другог народа, врло често су се исти облици (симболи или ознаке) појављивали на различитим местима и у разним културама. Прва четири правилна тела су спозната кроз машту и чисту децју игру са исецканим плочицама у једнакоугаоне троуглове и квадрате. У то време, на сцену је ступио Тимај из Локре, један из Питагорејског братства (наводно постојећи, ако је за веровати Платоновим делима: *Тимај* и *Критија*), који је њима доделио четири елемента живота:

- тетраедар — ватра, најмање пљосни представљају сувоћу ватре;
- хексаедар (коцка) — земља, због своје стабилне структуре;
- октаедар — ваздух, због своје окретљивости попут једне чигре;
- икосаедар — вода, највише пљосни представљају влажност воде.

Настављајући ову причу стоје и разна тумачења о појединим елементима. Једно од њих каже да ватра симболизује плазму, земља чврсто агрегатно стање, вода — течност и ваздух — гасовито. Када је конструисао и последње, пето правилно тело — додекаедар, Платон га је прогласио петим елементом под називом космос, који чини све и који је есенцијалан у свему (слика 1.1).

Још неколико карактеристика које су допринеле да одвоји додекаедар као тело важније и лепше од осталих су да се једнакостранични троугао може поделити на 6 троуглова његовим карактеристичним дужима у пропорцији 1, $\sqrt{3}$, 2, иако су они заправо само половина једног једнакостраничног троугла, док се квадрат може пресецањем дијагонала поделити на четири једнакокрака правоугла троугла пропорција 1, 1, $\sqrt{2}$. Ниједном комбинацијом ова два правоугла троугла која је он сматрао за „суб-атомске” честице није могао да се направи правилан петоугао који је страна додекаедра. Тиме је он одвајао додекаедар као стар који нема начин за мешање са материјом, док је сматрао да се од једне „јединице” икосаедра (воде) може добити 5 јединица ватре (тетраедра) или 2 јединице ваздуха (октаедра) и 1 јединица ватре (тетраедра).

1.2 Еуклидови Елементи

Еуклид је грчки математичар који је живео крајем 4. и почетком 3. века п.н.е., најпознатији по свом доприносу геометрији и очувању свих до тада познатих знања о геометрији. Написавши *Елементи*, 13 књига које су обухватиле до тада познато знање геометрије, постао је човек коме можемо највише захвалити за све што знамо о геометрији. Тих 13 књига о геометрији су толико свеобухватне да могу бити предмет целог једног научног рада из ког разлога се нећу задржавати на детаљима из ових књига, него само напоменути неколико најважнијих ствари које су везане за њих. Започео је са својих 23 дефиниције, 9 аксиома и 5 постулата, од којих је 5. постулат посебно контроверзан јер има богату историју дискусија. Прва теорема је *Pons Asinorum*, односно теорема која каже да су у једнакокраком троуглу углови на основици једнаки. Поред тога, у прву књигу је уврштена и *Пифагорина теорема*. До шесте књиге се сва геометрија одвија у равни, затим књиге VII - IX се баве теоријом бројева и последње четири књиге X - XIII причају о геометрији у простору. Тринаеста књига се завршава конструкцијом правилног додекаедра. Постоје спекулације да је Еуклид написао *Елементи* као кораке геометрије којима треба ићи да би се конструисао додекаедар и да је тиме подржавао Платонову идеју о „космичком” телу.

1.3 Занимљивости

Кроз цео средњи век, знања из математике, али и генерално знања из осталих научних области нису напредовала, тако да се немачки астроном Јоханес Кеплер и даље забављао *Елементима* и Платоновим телима. Подржавајући Платонову идеју везану за 5 елемената, поставио је хороскопске знакове на стране додекаедра. Посматрајући Сунчев систем и орбите планета у њему, у

својој визији је кренуо да се „игра” концентрично постављајући Платонова тела у Сунчев систем, градећи свој властити универзум. Године 1596. је објавио књигу *Mysterium Cosmographicum* у којој је предложио изглед Сунчевог система са до тада познатих 6 планета. Претварајући орбиту сваке планете у велики круг сфере и постављањем 5 Платонових тела између њих је апроксимирао изглед Сунчевог система овим редом: Меркур — октаедар — Венера — икосаедар — Земља — додекаедар — Марс — тетраедар — Јупитер — коцка — Сатурн (слика 1.2). Ову идеју је убрзо морао да остави, али својим даљим изучавањем је дошао до прва три закона орбиталне динамике која су променила ток многих истраживања у физици и астрономији. Док се бавио Платоновим телима дошао је и до правилних неконвексних полиедара о којима ће бити речи касније.

Од 5 Платонових тела, 3 једноставнија су нађена у природи градећи разне кристалне решетке (слика 1.3). Иако ни додекаедар ни икосаедар нису пронађени у кристалним решеткама, неке структуре додекаедра могу се пронаћи у неким једињењима бора. Почетком двадесетог века биолог Ернст Хакел је открио врсте радиоларија (еукариота које имају минералне ћелијске скелете) које су попримиле облике правилног икосаедра и додекаедра (лат. *Circogonia icosahedra*, *Circorhagma dodecahedra* — слика 1.4).

2

Полиедри

2.1 Особине полиедара

2.1.1 Дефинисање

Пошто живимо у тродимензионалном свету, свакоме је од нас интуитивно јасно шта представља једно геометријско тело, односно полиедар. Основна дефиниција је прешироко постављена, те допушта постојање разних врста геометријских тела, односно убраја и тела која се уплићу сама у себе, која имају „рупе” у својој структури и због којих се развила читава нова грана математике под именом топологија.

Дефиниција 2.1. Нека је M скуп многоуглова тако да важи:

- 1° свака ивица неког многоугла из M је ивица још тачно једног многоугла из M (тада су та два многоугла суседна);
- 2° Никоја два суседна многоугла из M нису у истој равни;
- 3° За свака два многоугла μ и μ' из скупа M постоји низ многоуглова $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \mu'$ у коме су свака два узастопна многоугла у низу суседна.

Унију свих површи многоуглова из M називамо *полиедарска површ*. Те површи се зову *плосни*, док су странице и темена тих многоуглова *ивице* и *темена* полиедарске површи. Две плосни су суседне ако имају заједничку ивицу, а два темена су суседна ако се налазе на истој ивици.

Полиедарска површ је *проста* ако никоје две несуседне плосни немају заједничких тачака, осим у случају када имају само једно заједничко теме, при чему скуп свих плосни које садрже једно теме образују рогаљ.

Дефиниција 2.2. *Полиедар* представља унију прости полиедарске површи и дела простора које површ ограничава.

2.1.2 Дуалност

Једна од веома занимљивих особина свих полиедара јесте њихова дуална природа. Колико год то апсурдно звучало, свако геометријско тело има свој „дуал”. *Дуали* су јединствени парови полиедара који деле одређене особине. Граде се веома једноставно, само треба заменити темена са странама и обратно. Другим речима, свако теме ће у дуалном телу представљати страну док ће свака страна представљати теме. Уместо да из темена излазе ивице, у дуалу ће ту страну окруживати исте ивице и наравно обрнуто за стране. Узимајући у обзир да је свако теме полазног тела инцидентно истом броју ивица као свака страна његовог дуала, лако је закључити да дуали имају исти број ивица, док се бројеви страна и темена међу собом пермутују. Најлакша конструкција дуала представља једноставно спајање центара (тежишта) страна полазног тела. Једино тело које је само себи дуал јесте тетраедар (слика 2.1).

2.1.3 Тополошка својства полиедара. Ојлерова карактеристика

Причајући о топологији полиедара, занемарујемо њихове метричке особине и само гледамо повезаност темена, пљосни и ивица. Везе које ми посматрамо не зависе од метричких особина полиедра, што значи да ћемо моћи да деформишемо полиедре све док чувамо све везе између темена. То тзв. тополошко деформисање не утиче на број темена, пљосни и ивица.

Дефиниција 2.3. За полиедар P кажемо да је рода r , ако је r највећи могући број полигона $p_1, p_2, \dots, p_n$, таквих да:

- 1° сваки од тих полигона је састављен од ивица полиедра P ;
- 2° никоја два од тих полигона немају заједничких тачака;
- 3° ниједан од тих полигона не дели полиедарску површ на више од једне области, нити је заједно деле на више од једне области.

Нека је P полиедар нултог рода и $\sum(O, r)$ сфера, где је O центар и унутрашња тачка полиедра P . Тада се полиедар P може пројектовати на тзв. мапу на сфери, која представља поделу сфере на области које одговарају пљоснима полиедра. При пројектовању се такође задржава и распоред пљосни, темена и ивица, тако да ивицама одговарају лукови на сфери, док су темена крајње тачке тих лукова. Интуитивно се овај процес може назвати „надувавањем” полиедра у сферу. Додатно, за сваку мапу, може се направити дуална мапа где стране постају чворови и обрнуто, док ивице постају сопствени дуали (слика 2.2).

Полиедар је *шлемено-шранзишван* (*изоноалан*) ако се његова темена кроз његове симетрије не мењају, или само мењају оријентацију. Полиедри који чувају пљосни кроз своје симетрије се називају *изоедрални*, док они који чувају ивице се зову *изоноални*. Ако је полиедар изотоксалан, тада је његов дуал изоедралан. Такође ако је тело изотоксално онда је и његов дуал исто изотоксалан.

Леонард Ојлер (нем. *Leonhard Euler*) је немачки математичар, који је познат по свом доприносу у скоро свим гранама математике. Томе у прилог иде чињеница да постоји цела страница *wikipediје* са листом ствари које су назване по њему. Ојлерова карактеристика, такозвана друга најлепша једнакост математике је једна од многих ствари на тој листи. Веровали или не, и такозвана најлепша једнакост математике је такође дело његовог ума, под називом Ојлерова формула и гласи $e^{i\pi} + 1 = 0$. Сматра се за најлепшом зато што повезује 5 основних константи математике: 0, 1, e , π и i . Враћајући се на његову другу најлепшу креацију, она даје везу између броја темена, ивица и пљосни једног геометријског тела.

Дефиниција 2.4. *Ојлерова карактеристика* је особина сваке класе тела, најчешће означена са χ , и за њу важи $t - i + s = \chi = 2 - 2r$ где су t, i, s редом број темена, ивица и страна.

Тела са којима смо ми највише упознати су нултог рода (нпр. тетраедар, октаедар, коцка итд.) и за њих важи да је $\chi = 2 - 0r = 2$. Пример тела који има другачију вредност Ојлерове карактеристике је торус који је првог рода и самим тим за њега важ $\chi = 0$. Могу се спојити два оваква торуса и тада добијено тело је другог рода и важи $\chi = -2$ (слика 2.3). Овај поступак се може поновити небројено пута да бисмо добили тело рода $r = n, n \in \mathbb{N}_0$. Тело које није нултог рода не можемо надувати у сферу, него добијамо сферу са ручкама, односно онолико ручки колики је род тела. Аналогно, тело има онолико рупа колики је род тог тела.

У својој књизи *Regular Polytopes*, *Harold Scott MacDonald Coxeter* је поставио веома интригантан доказ Ојлерове теореме за полиедре нултог рода користећи мапе, у које је уточио полиедре, особину дуалности и Ојлерову теорију графова за контролу над мапама.

Теорема 2.1. За сваки полиедар P нултог рода важи $\chi = t - i + s = 2$.

Доказ. Нека је P полиедар нултог рода, којег трансформишемо у мапу која има t темена, i ивица и s страна. Повежимо сва темена у једно стабло (граф без циклуса у ком се може направити пут између свака два темена) користећи ивице које их спајају. Тада тај граф има t темена и тачно $t - 1$ ивица. Сада, уместо преосталих ивица искористићемо њихове дуалне парове и сва дуална

темена (оригиналне стране) да бисмо направили још једно стабло. Не постоји начин да сва темена новог графа нису повезана, јер би то иначе значило да је једна од оригиналних страна затворена са свих страна у првом графу, што би значило да први граф има циклус, односно није стабло. Такође у случају да овај граф има циклус, то би значило да је једно од оригиналних темена неповезано са остатком, што је такође контрадикторно са нашим одабиром графа као стабла. Тиме је и дуални граф заправо стабло са s темена и тачно $s-1$ ивица. Пошто су у грађењу овог графа искориштене све ивице или њихови дуали тачно по једном, закључујемо да

$$\begin{aligned}(t-1) + (s-1) &= i \\ \implies t - i + s &= 2\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен. □

2.2 Правилни полиедри

2.2.1 Дефинисање

Дефиниција 2.5. Полиедар нултог рода P је *правилан* ако важи да:

1. Све стране полиедра P су правилни многоуглови;
2. Све стране полиедра P су међусобно подударне;
3. Сви рогљеви полиедра P су међусобно подударни.

По овој дефиницији може се доказати да постоји не више од 5 правилних полиедара, а затим се може сваки од њих конструисати и тиме доказати да они постоје. Сва правилна тела су изогонална, изоедрална и изотоксална.

Теорема 2.1. Постоји највише 5 правилних полиедара.

Доказ. Пошто су све стране правилни многоуглови, за унутрашњи угао једне стране важи $\alpha \geq \pi/3$ што је случај код троугла. Да би се направио рогаљ, он мора бити макар триедар, тиме правилни шестоуглови не могу бити употребљени, јер $3\alpha = 3 \cdot 2\pi/3 = 2\pi$ што је заправо раван, а не рогаљ. Дакле, једини могући многоуглови су троуглови, четвороуглови и петоуглови.

3. У једном рогљу се могу наћи три, четири или пет троуглова, док већ шест употпуњују целу раван, односно $6\alpha = 6\pi/3 = 2\pi$. Тиме је могуће имати 3

правилна полиедра конструисана само помоћу троуглова *Schläfli*-јевих¹ ознака: $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$;

4. Већ четири квадрата заклапају раван, односно $4\alpha = 4\pi/2 = 2\pi$. Тиме може постојати само $\{4, 3\}$;
5. Такође, већ четири петоугла заклапају раван, односно $4\alpha = 4 \cdot 3\pi/5 > 2\pi$, тако да може да постоји једино $\{5, 3\}$.

□

Ово је био доказ користећи метричке особине правилних многоуглова, али би требало у одељку о тополошким својствима полиедара додати и тополошки доказ ове теореме.

Доказ. Нека је P правилни полиедар. Тада је свака страна ограничена са p ивица, а свака ивица ограничава 2 стране. Такође је свако теме крај q различитих ивица, док свака ивица има 2 темена за крајеве. Дакле, важи $sp = 2i$ и $tq = 2i$. Када то заменимо у Ојлерову формулу за тело нултог рода добијамо

$$\begin{aligned} \frac{2i}{p} + \frac{2i}{q} = 2 + i &\Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{i} + \frac{1}{2} \implies \frac{p+q}{pq} > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2p + 2q > pq \Leftrightarrow 4 > pq - 2p - 2q + 4 \\ &\Leftrightarrow 4 > (p-2)(q-2) \end{aligned}$$

Како су p и q природни бројеви страница у многоуглу и пљосни у рогљу, они не могу бити мањи од 3, па су $p-2$ и $q-2$ природни бројеви. Тада су једине комбинације $\{p, q\}$ заправо $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 3\}$, $\{3, 5\}$ и $\{5, 3\}$. □

Коксетер својим доказом, у књизи *Regular Polytopes*, замењује потребу за 3 услова при дефиницији правилног тела са само два. Тачније, замењује други и трећи услов са само једним, а то је да су све темене фигуре правилне. *Темене фигуре* су многоуглови који се добијају спајањем средишта ивица око једног темена. Није доказао еквиваленцију, но само смер где из темених фигура добија да су све стране и рогљеви подударни (слика 2.4).

Доказ. Нека је P полиедар нултог рода за кога важи да су му све пљосни и темене фигуре правилне. Пошто сваке две пљосни деле једну ивицу а у једној пљосни су све ивице једнаке добијамо да су све ивице полиедра P једнаке. Нека су оне дужине $2l$. Дужина једне ивице темене фигуре је $2l \cos \frac{\pi}{p}$, где је p

¹*Schläfli*-јеви симболи означавају правилна геометријска тела и многоуглове. За многоуглове је та ознака $\{p\}$ где је p број темена многоуглова. Полиедри се означавају са $\{p, q\}$ где p представља многоугао, а q број многоуглова око једног темена, односно касније темену фигуру.

број ивица поједине пљосни полиедра P , што се јасно види када се у троуглу састављеном од две половине ивица дужине l и ивице темене фигуре спусти висина и установи да је угао на основици тог једнакокраког троугла једнак половини спољашњег угла полиедарске пљосни величине $2\pi/p$. У случају да су пљосни различите испоставило би се да онда темене фигуре имају ивице разних дужина, јер је p у различитим пљоснима другачије. (*)

Користећи чињеницу да су све темене фигуре правилне, темена полиедра P заједно са њиховим теменим фигурама граде пирамиде. У свакој од пљосни које садрже теме се налази једна страна пирамиде која је заправо једнакокраки троугао са крацима дужина једнаким половини дужина ивица и базом која је део темене фигуре. Тада су све стране ове пирамиде подударне и самим тим је сама пирамида правилна што значи да је и рогаљ око њеног врха прави-лан. Додатно добијамо да су сви рогљеви подударни, јер ако бисмо имали различите рогљеве, то би значило мењати број ивица темених фигура. Када би променили број ивица темене фигуре променили би и диједарски угао, који би био различит међу рогљевима, што се не може десити, па су сви рогљеви подударни и имају исти број пљосни q . (**)

Из (*), (**) и одабира полиедра следи да је полиедар P правилан. $\square$

2.2.2 Конструкције правилних тела

Иако је теоремом 2.1 доказано да може постојати пет правилних тела, да би се убедили да они заправо постоје, требало би их конструисати (слика 2.5). Све конструкције осим додекаедра су прилично једноставне.

- Тетраедар($\{3, 3\}$) се конструише тако што се над теменима једнако-страничног троугла опишу сфере полупречника једнаке дужине као и стра-нице троугла. Пресек ових сфера је четврто теме тетраедра.
- Хексаедар($\{4, 3\}$) се конструише слагањем правоуглих триедара на ис-тим удаљеностима. Тада су темена коцке заправо темена тих триедара.
- Октаедар ($\{3, 4\}$) се конструише помоћу две правилне четворостране пи-рамиде, којима се поклопе базе, тада су темена пирамида управо темена октаедра.
- Икосаедар ($\{3, 5\}$) се конструише тако што се у равнима једног пра-воуглог триедра конструишу правоугаоници чије су странице у односу златног пресека тако да парови страница правоугла буду паралелни са друге две равни триедра. Тада су 12 различитих темена правоугаоника управо темена икосаедра (слика ??).

- Додекаедар $(\{5, 3\})$ захтева најкомплекснију конструкцију. Наравно да постоје многе конструкције за додекаедар, али ће овде бити приказана само Еуклидова, она која је завршила *Елементи*. Користећи две суседне стране коцке $ABCD$ и $AFED$ и ивицу AD као оријентир ћемо конструирати једну страну додекаедра, док над сваком другом од дванаест ивица конструкција иде аналогно. Нека су тачке G, H, I, J, K средишта дужи редом BC, AD, EF, AB, CD . Нека је тачка O , такве да $O \in GH \cap JK$. Нека су тачке M и N златни пресеци редом дужи OJ, OK , где су OM, ON већи одсечци. У равни Π која је нормална на раван одређену са $ABCD$ и садржи праву MN конструишемо тачке P, Q, R , тако да су дужи MP, OQ, NR нормалне на праву MN и налазе се за разне стране друге стране равни $ABCD$ у односу на тачке E и F . Нека је S тачка праве HQ тако да важи $\beta(S, H, Q)$ и $d(S, ADEF) = OQ$. Тада је петоугао који смо хтели да конструишемо управо петоугао $APRDS$.

3

Архимедова тела

Правилна тела захтевају мноштво правила у својој дефиницији, након чега природно следи питање шта би произишло из дефиниција када би се одстранио по неки услов. Ако бисмо ишли редом кроз дефиницију полиедра па онда и правилних полиедара и „зажмурили” на по неки услов, прво које би видели јесте у самој дефиницији полиедарске површи. У случају да сви многоуглови нису међусобно повезани низом суседних многоуглова, што је услов 3 из дефиниције 2.1.1, добили би нпр. два тетраедра са истим врхом таква да им се остатак површи уопште не додирује. Следеће на реду јесте чињеница да су правилни полиедри конвексни, па када бисмо изузели тај услов добили бисмо неконвексне полиедре под посебним именом *Kepler-Poinsot*-ова тела, од којих 2 чак немају ни конвексне пљосни, али задржавају правилност и о њима ћемо детаљније причати касније. Када би оставили подударне пљосни и рогљеве, добили би *дисфеноиде* (слика 3.1). То су неправилни тетраедри који се могу једноставно направити од било ког оштроуглог троугла, тако што би спојили средишта страница и онда „пресавили” темена са мањим троугловима, сличним оригиналном, тако да се темена и странице споје. Када би спојили два тетраедра тако да деле страну и гледали преостале пљосни као један полиедар, добили би дипирамиду (слика 3.2), која има подударне и правилне пљосни, али не и правилне рогљеве.

3.1 Призме и антипризме

Када бисмо избацили услов да су све стране подударне (и као последицу да су рогљеви правилни), остало би нам да су стране све правилни многоуглови и сви рогљеви су подударни. У ту групу спадају 3 врсте тела. Прва група, која је најлакша за уочити, јесу праве једнакоивичне *призме* (слика 3.3). Ако је n број страница базе призме, тада њен омотач има n квадрата и две базе су правилни n -тоуглови. Тада сваки рогаљ садржи једну базу и два

квадрата, па ћемо овакве призме означавати са $4 \cdot 4 \cdot n = 4^2 \cdot n$, где су $4, 4, n$ редом бројеви страница правилних многоуглова у сваком рогљу. Овако ћемо означавати сва полуправилна тела у овом поглављу — као „производ” броја страница многоугла једног рогља, обазирјујући се на редослед (за рогљеве са више од 3 пљосни). За сваку призму важи $t = 2n, i = 3n, p = n + 2$ и наравно $r = 0$ зато што је конвексна. Коцка је пример призме за $n = 4$.

Следећа група обухвата полиедре веома сличне призмама који носе назив *антипризме* (слика 3.4). Граде се постављајући два правилна n -тоугла у две паралелне равни тако да им се нормалне пројекције тежишта на неку од равни поклапају, а пројекције темена не поклапају већ су ротирани за угао једнак половини карактеристичног угла тог n -тоугла. Затим се темена база антипризме спајају наизменично, формирајући омотач од наизменично окренутих једнакостраничних троуглова, тако да свако теме рогља садржи три троугла и базу. Антипризме носе ознаку $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot n = 3^3 \cdot n$. За сваку антипризму важи $t = 2n, i = 4n, s = 2n + 2$, као и наравно $r = 0$. Октаедар је пример антипризме за $n = 3$.

Последња група има тачно 13 тела. Иако Архимед никад није преузео заслуге за њих, они се називају Архимедовим телима. Различите литературе укључују правилне полиедре, призме и антипризме у ову групу. Углавном су поређани растући по комплексности и броју страна, али ће овде бити подељени по томе како се граде. Све призме, антипризме и свих 13 следећих Архимедових тела су изогонална, али нису изоедрална. Само поједина Архимедова тела су изотоксална.

3.2 Одсецање правилних полиедара

Најпростији начин добијања првих пет Архимедових тела јесте одсецање врхова правилних полиедара. Одузимајући одсечке одговарајуће величине са свих темена, добијамо правилне многоуглове $\{2p_0\}$ унутар почетних пљосни и многоуглове $\{q_0\}$ који личе на темене фигуре, али су мањи и ближи теменима, где је $\{p_0, q_0\}$ оригинални полиедар. Пошто нова темена добијамо тако што диједру од две пљосни полиедра додамо још једну раван, сваки рогаљ ће бити триедар и садржати два $\{2p_0\}$ и један $\{q_0\}$, па је ознака сваког од ових тела $2p_0 \cdot 2p_0 \cdot q_0$. Тиме имамо пет нових Архимедових тела.

У сваком од њих, свако теме рогља $(2p)^2 \cdot q$ је теме само једне пљосни $\{q\}$. Због тога важи $t = t_0 \cdot q$, где је t_0 број темена оригиналног полиедра. Све пљосни оригиналног полиедра остају у саставу новонасталога, али се додаје t_0 пљосни које су резултат одсецања. Тада је укупан број пљосни $s = s_0 + t_0$, где је s_0 број темена оригиналног полиедра. Део сваке ивице оригиналног полиедра биће нека од ивица овог тела, али су додате нове ивице на новим

странама које нису суседне, па је укупан број ивица $i = i_0 + t_0q$, где је i_0 број ивица почетног полиедра.

1. *Одсечени шестипраедар* има 4 шестоуглова и 4 троугла. Његова конфигурација је $3 \cdot 6 \cdot 6 = 3 \cdot 6^2$ (слика 3.5а).
2. *Одсечена коцка* има 6 осмоуглова и 8 троуглова. Његова конфигурација је $3 \cdot 8 \cdot 8 = 3 \cdot 8^2$ (слика 3.5б).
3. *Одсечени октаедар* има 8 шестоуглова и 6 квадрата. Његова конфигурација је $4 \cdot 6 \cdot 6 = 4 \cdot 6^2$ (слика 3.5ц).
4. *Одсечени додекаедар* има 12 десетоуглова и 20 троуглова. Његова конфигурација је $3 \cdot 10 \cdot 10 = 3 \cdot 10^2$ (слика 3.5д).
5. *Одсечени икосаедар* има 20 шестоуглова и 12 петоуглова. Његова конфигурација је $5 \cdot 6 \cdot 6 = 5 \cdot 6^2$ (слика 3.5е). Ово тело је веома често виђено у форми фудбалске лопте, где је она углавном обојена тако да су петоуглови црни, а шестоуглови бели.

3.3 Увртање правилних полиедара

Ова метода подразумева одвајање пљосни оригиналног полиедра и ротирање сваке од њих у својој равни до тренутка када се простор између њих може попунити једнакостраничним троугловима. Пошто се ротирање страна може извршити и у директном и у индиректном смеру, тако да постоје њихова два хирална облика који су енантиомери — обрнутих оријентација, као слике у огледалу. Овом методом настају два нова тела која узимају коцку и додекаедар за основу (слика 3.6).

Оба се праве од s_0 p_0 -тоуглова који су део оригиналног полиедра. Након што одвојимо и ротирамо пљосни оригиналног полиедра, уместо пређашњих ивица поставимо два једнакостранична троугла који међусобно деле ивицу, тако да један од њих дели ивицу са једном страном, а други са другом и деле само једно теме са оном страном са којом не деле ивицу. Тада остану празнине на местима која би одговарала теменима почетног полиедра и она су тачно величине једног једнакостраничног троугла, они ће делити само једно теме са три пљосни почетног полиедра - оне три пљосни рогља тог темена. Тада је овај полиедар конфигурације $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot p_0$. Из тога се јасно види да свако теме припада само једном p_0 -тоуглу, тиме важи $t = p_0 s_0$. Из конструкције се види $s = s_0 + 2i_0 + t_0$. Ојлеровом карактеристиком полиедра нултог рода се може добити $i = s + t - 2 = p_0 s_0 + s_0 + 2i_0 + t_0 - 2$.

6. *Увртнућа коцка* је Архимедово тело направљено од 6 квадрата и 32 троугла. Његова конфигурација је $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 3^4 \cdot 4$ (слика 3.6а).
7. *Увртнући додекаедар* је тело са 12 петоуглова и 80 троуглова. Његова конфигурација је $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^4 \cdot 5$ (слика 3.6б). Ово тело има највише пљосни од свих Архимедових тела, зато се најчешће виђа као последње на листи у литератури која обухвата ова тела.

Иако се овим начином добијају само два нова тела, може се применити исти поступак и на друге правилне полиедре. Када бисмо урадили све кораке за тетраедар, добили би полиедар конфигурације 3^5 , што је управо икосаедар. Код октаедра би се променила конструкција, зато што троуглови који су замењивали темена, сада не би могли бити троуглови, него би били квадрати. Занимљиво је показати да је то тело заправо увртнућа коцка, када би посматрали троуглове „у теменима” као основне стране, а квадрате као „темена” октаедра. Аналогна ситуација се дешава и код икосаедра тако што би сада гледали „темене” троуглове као оригиналне, док би петоуглови били „темена” икосаедра. Зато је једноставност разликовања једини разлог зашто се ова два тела зову по коцки и додекаедру, јер су њихове стране различите од троуглова који они користе у конструкцији. Укључујући ову особину у обзир, ревизирана конфигурација би била $3 \cdot p_0 \cdot 3 \cdot 3 \cdot q_0$, где је $p_0 = 3$ или $q_0 = 3$. Бројеви темена, страна и ивица би остали исти јер ту нигде нисмо претпостављали да ли су неке од страна троуглови или не. Под оваквом формулацијом конфигурације упада и икосаедар, као резултат увртања коцке, па се то може навести као још један од разлога зашто се ова тела посебно одвајају као само увртање коцке и додекаедра. Ово је само један од многих примера где дуалност тела има величнствену последицу.

3.4 Пресецање правилних полиедара

Ову методу ћемо дефинисати надовезујући се на причу о дуалности. Можемо узети пар међусобно дуалних правилних тела и наћи њихов пресек при одређеним положајима и тада бисмо добили следећа два (три) тела. Ова група тела се добија постављањем дуалних парова заједно на средишта ивица (дуали имају исти број ивица) и онда ће тело које тражимо бити управо њихов пресек. Ново тело има стране у свим равнима оригиналних правилних полиедара. Нове ивице настају спајањем средишта ивица оригиналних тела, док нова темена постају управо та средишта. Свака страна се онда може гледати као темена фигура неког од оригиналних полиедра. Онда ће сваки полиедар бити конфигурације $p_0 \cdot q_0 \cdot p_0 \cdot q_0 = p_0 \cdot p_1 \cdot p_0 \cdot p_1 = q_0 \cdot q_1 \cdot q_0 \cdot q_1$, где су $\{p_0, q_0\}$ и

$\{p_1, q_1\}$ оригинална два полиедра. Свака ивица припада једном $\{p_0\}$ и једном $\{q_0\}$, па су ова тела изотоксална.

Свака ивица се налази у $\{p_0\}$ и $\{p_1\}$, па важи $i = p_0 \cdot s_0 = p_1 \cdot s_1$. Користи се свака раван оригинална два полиедра, међу којима нема подударних, па због тога тривијално важи $s = s_0 + s_1$. Све стране изгледају као остатак страна почетног полиедра када бисмо одсекли троугао који настане код темена када спојимо средишта ивица, тако да је свака страна само мања и ротирана за пола карактеристичног угла у односу на почетну. Као што смо раније рекли, сва темена су средишта ивица почетних полиедара, на шта се додаје чињеница да их имају исто и важи $t = i_0 = i_1$.

Пошто међу правилним полиедрима има 3 пара дуалних тела, очекивана су три тела ове врсте, али пошто је тетраедар дуалан сам себи, он гради тело конфигурације 3^4 што је управо октаедар, па се он не уврстава у ову групу.

8. *Кубокџаедар* је Архимедово тело сачињено од 8 троуглова и 6 квадрата. Његова конфигурација је $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$ (слика 3.7а).
9. *Икосидодекаедар* је Архимедово тело сачињено од 12 петоуглова и 20 троуглова. Његова конфигурација је $3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5$ (слика 3.7б).

3.5 Одсецање пресека правилних полиедара

Овде ћемо користити исту методу као у одељку 3.2 када смо сваки рогаљ одсекли. Тада смо од сваког p_0 -тоугла направили $2p_0$ -тоугао и уместо рогљева темена су били q_0 -тоуглови. Сада ћемо по истом поступку и од тела у одељку 3.4 одсећи рогљеве. Тада ће стране $\{p_0\}, \{p_1\}$ се претворити у $\{2p_0\}, \{2p_1\}$. Пошто оба тела имају рогљеве са 4 стране, тада одсецањем сваке четворостране пирамиде ћемо добити по једну нову страну (основу те пирамиде), која ће бити квадрат. Аналогно одељку 3.2, свако ново теме припада равнима полигона $\{2p_0\}$ и $\{2p_1\}$, али и равни ових квадрата, тако да ће сваки рогаљ бити триедар, па су ова тела конфигурације $4 \cdot 2p_0 \cdot 2p_1$. За сваку страну почетног тела смо добили страну новог тела унутар ње, али смо и уместо сваког темена добили по један квадрат, па је укупан број страна $s = s' + t' = s_0 + s_1 + i_0$, где су s', t' бројеви страна и темена тела пресека. Свако теме припада само једном квадрату, па је укупан број темена $t = 4t' = 4i_0 = 4i_1$. За сваку ивицу тела пресека добијамо по једну нову (краћу) ивицу новог тела (унутар), али су додате и ивице које припадају квадрату, па је укупан број ивица $i = i' + 4t' = p_0 s_0 + 4i_0 = p_1 s_1 + 4i_1$.

10. *Одсечени кубокџаедар* је Архимедово тело са 8 шестоуглова, 6 осмоуглова и 12 квадрата конфигурације $4 \cdot 6 \cdot 8$ (слика 3.8а).

11. *Одсечени икосидодекаедар* је Архимедово тело са 20 шестоуглова, 12 десетоуглова и 30 квадрата конфигурације $4 \cdot 6 \cdot 10$ (слика 3.8б).

Овај поступак можемо урадити и за пресек два тетраедра, али је он већ урађен у одељку 3.2 за октаедар.

3.6 Ромбична тела

Ромбична тела се добијају методом која се са увртањем такмичи за најкомплекснију. Има сличности са увртањем, као замењивање ивица, само што ће овде бити замењена темена, а ивице „претворене” у темена. Одвојимо стране почетног тела пресека, затим све стране ротирајмо у новој равни за половину њиховог карактеристичног угла. Све стране које су делиле теме сада могу све бити повезане једним квадратом, који дели ивицу са сваком од страна. Сви парови страна који су делили ивицу сада деле само теме. У почетном телу су две стране делиле ивицу и два темена, а сада деле теме у којем нису суседне него су између њих постављена два квадрата, која представљају темена која су делила. Тиме свако теме има две различите стране оригиналног тела и два квадрата у конфигурацији $p_0 \cdot 4 \cdot q_0 \cdot 4 = p_0 \cdot 4 \cdot p_1 \cdot 4$.

Како смо показали да су сва темена замењена са квадратима, а почетне стране су сачуване, укупан број страна је $s = s' + t' = s_0 + s_1 + i_0$. Свако теме је настало од ивице почетног тела, па је укупан број темена $t = i' = p_0 s_0 = p_1 s_1$. Број ивица се најлакше показује преко новонасталих квадрата, јер никоја два од та квадрата не деле ивицу, па како њих има t' укупан број ивица је $i = 4t' = 4i_0 = 4i_1$.

12. *Ромбични кубоктаедар* је Архимедово тело са 8 троуглова и 18 квадрата конфигурације $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 4^3$ (слика 3.9а).
13. *Ромбични икосидодекаедар* је Архимедово тело са 20 троуглова, 30 квадрата и 12 петоуглова конфигурације $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3$ (слика 3.9б).

Као и за скоро све методе до сад, има још један случај који није покривен овом листом. Још једно тело које настаје пресецањем јесте октаедар и оно има 4 пљосни у рогљу. Логично је замислити се и питати зашто не бисмо могли да урадимо исти поступак над октаедром, али тиме добијамо кубоктаедар који смо већ добили у одељку 3.4 и тада ће све формуле за бројеве темена, страна и ивица и даље важити када узмемо почетне полиедре као два тетраедра.

3.7 Каталанова тела

Иако ова тела носе име белгијског математичара Ожена Каталана (фра. Eugène Catalan), он није први који је се бавио њима. Кеплер је током свог истраживања *зоноедара* наишао на неколико ових тела пре Каталана. Ова тела представљају дуале Архимедових тела и иако не представљају полуправилна тела, имају неке занимљиве особине преко дуалности. У Архимедовим телима су све пљосни биле правилни многоуглови, па су у Каталановим телима правилни рогљеви, али нису и међусобно подударни. Такође су у Архимедовим телима сви рогљеви подударни, тиме су преко дуалности у Каталановим телима све пљосни међусобно подударне, али нису правилне. Свако тело је и пренело неке особине од својих Архимедових дуала, тако постоје и два хирална Каталанова тела која су дуали увртнуте коцке и додекаедра. Они су приказани у прилогу А сликама од 3.10 до 3.14. Они ће бити представљени у табели 3.

4

Композиције и стелације

4.1 Стелације полигона

Стелација је процес продуживања страница полигона или пљосни полиедара до међусобног пресека. Новонастале тачке су нова темена фигуре или тела добијеног стелацијом. Овако добијене фигуре или тела се још називају и *звездастим*. У равни ћемо ради једноставности гледати само правилне полигоне, па је прва стелација петоугла којом се добије пентаграм *Schläfli*-еве нотације¹ $\{5/2\}$ (слика 4.1a). Шестоугао такође има само једну стелацију у виду Давидове звезде са нотацијом $\{6/2\}$ (слика 4.1b). Већ седмоугао, а затим и сви полигони са више темена имају 2 или више стелација (слика 4.1c). За шестоугао, квадрат и све друге парне полигоне може се причати о полигонима као што су $\{4/2\}$ и $\{6/3\}$, који заправо представљају унију великих дијагонала које садрже заједнички центар. Полигони као што су $\{5/3\}$ или $\{6/4\}$ су заправо исто што и $\{5/2\}$ и $\{6/2\}$, само када би се темена спајала обрнутим редоследом, па ћемо због уопштености и једноставности само користити оне где именилац није већи од половине бројиоца. Многе литературе и ове полигоне сматрају за правилне, иако нису конвексни, јер испуњавају два потребна услова: имају подударне странице и подударне углове.

4.2 Стелације полиедара

Исти процес који се одвија код полигона, се одвија и за полиедре. Проширујемо равни до њихових нових пресека које користимо за темена и ивице. Овај процес се може урадити за сва тела, али је за неке изузетно теже ра-

¹Ова нотација дозвољава рационалне бројеве у нескраћеном облику, где бројилац представља број темена полигона, а именилац којим се редом спајају, другим речима које је следеће теме по реду при њиховом спајању.

зумети шта су заправо новонастале стране и где и како деле ивице. Такође од једног тела може настати дуги низ различитих стелација, као што ћемо видети код икосаедра. *Прва стелација* представља надогрању сваке стране са пирамидом, чија је база оригинална страна, док стране пирамиде припадају равнима суседним странама. *Финална стелација* представља стелацију која у себи садржи све друге стелације тела, па и само тело.

Од правилних тела, тетраедар и коцка немају стелације, зато што су код тетраедра све пљосни суседне, док код коцке, парови пљосни које нису суседне су паралелни, па се никад неће пресећи и самим тим не можемо добити стелацију. Октаедар има само једну стелацију — *stella octangula* (слика 4.2 — композиција два тетраедра о којој ће бити речи касније). На дијаграму су приказани пресеци равни додекаедра (слика 4.3), где је централни петоугао страна додекаедра. Све праве овог дијаграма представљају 10 равни осталих пљосни осим наспрамне, јер је она паралелна, па нема пресек са овом равни. Прва стелација додекаедра се другачије зове *мали звездастии додекаедар* (слика 4.4), друга *велики додекаедар* (слика 4.5), а трећа *велики звездастии додекаедар* (слика 4.6). Икосаедар има највише пљосни, па и највише стелација. Могу се правити од 13 група различитих делова равни (слика 4.7), неукључујући оригиналну страну икосаедра. Код икосаедра се могу комбиновати различите групе, за разлику од додекаедра. Тако добијамо чак 58 различитих стелација (слика 4.16), од којих су последњих 27 хиралне (праве се од „левих или десних” група). Године 1938. су се Н. S. М. Coxeter, Р. Du Val, Н. Т. Flatheг и Ј. F. Petrie удружили и објавили књигу под називом „Педесет и девет икосаедара” (енг. *The Fifty-nine Icosahedra*), која садржи све стелације икосаедра и њихових илустрација, где је 59. стелација управо Платонов икосаедар. Финална стелација икосаедра садржи све остале у себи и изграђена је само од групе 13 (слика 4.10).

4.3 Неконвексна правилна тела

Ако полиедрима приступимо истим начином као и полигонима, допуштајући да се у Schläfli-јевим симболима појаве рационални бројеви, те сматрајући и такве полиедре правилним, добијамо још четири правилна тела. Додатно, код полиедара ћемо сматрати да и p и q могу бити рационални, јер q можемо посматрати као темену фигуру ознаке $\{q\}$, па тиме дозвољавамо да и темене фигуре, односно рогљеви буду правилни са тиме да се пресецају сами са собом. Она су другачије названа *Kepler-Poinsot*-ова тела.

6. *Мали звездастии додекаедар* је прва стелација додекаедра ознаке $\{5/2, 5\}$. За њега важи: $s = 12$, $t = 12$, $i = 30$, $\chi = -6$.

7. *Велики додекаедар* је друга стелација додекаедра ознаке $\{5, 5/2\}$. За њега важи: $s = 12, t = 12, i = 30, \chi = -6$.
8. *Велики звездasti додекаедар* је финална стелација додекаедра ознаке $\{5/2, 3\}$. За њега важи: $s = 12, t = 20, i = 30, \chi = 2$.
9. *Велики икосаедар* је стелација икосаедра ознаке $\{3, 5/2\}$ у којој су укључене групе 11 и 12 (слика 4.9). За њега важи: $s = 20, t = 12, i = 30, \chi = 2$.

У новијој литератури се ова четири полиедра уврставају у правилна, тако да онда укупно има 9 правилних полиедара, док се оригиналних 5 називају Платоновим. Мали звездасти додекаедар и велики додекаедар су један дуални пар, а велики звездасти додекаедар и велики икосаедар други дуални пар. Процес који задржава број страна и транслира их у паралелне равни, добијајући звездасте темене фигуре, се зове *величање*. Резултати овог процеса над додекаедром, икосаедром и малим звездастим додекаедром су редом велики додекаедар, велики икосаедар и велики звездасти додекаедар. Тада се може направити дијаграм релација између додекаедра, икосаедра и ова четири тела, који приказује дуалност, величање и стелацију.

4.4 Композитна тела

Композиција тела представља унију два или више полиедара који деле исти центар. То могу бити било која тела, али ћемо ми овде посматрати само одређене композиције које имају неку врсту правилности. Спољна темена можемо спојити у конвексан полиедар нултог рода и тада се тај полиедар зове *омотач*. Тело које се добије као пресек се назива *језгро*, које се може користити као језгро за стелације. Баш из тог разлога, ове две групе деле разна тела.

4.4.1 Правилна композитна тела

Правилна композитна тела представљају композиције које су изогоналне, изоедралне и изотоксалне. Њих такође има само 5, као и правилних полиедара. Добијају се слагањем правилних полиедара од којих и добијају симетрије. Као и сам тетраедар, ова композиција је дуална сама себи.

1. *Композиција два шепраедра* (stella octangula), по Коксетеровој нотацији²

²Коксетер је правилне композиције представио користећи *Schläfli*-еву нотацију за правилне политопе. У угластим заградама $[a\{p, q\}]$, $\{p, q\}$ представља који полиедар користимо за композицију, док је a њихов број. Испред угластих заграда стоји $a_1\{p_1, q_1\}$ што представља омотач и колико од a полиедара дели теме конвексног омотача. Након угластих заграда, $a_0\{p_0, q_0\}$ означава језгро композитног тела колико од a_0 полиедара деле исту страну језгра.

- $\{4, 3\}[2\{3, 3\}]\{3, 4\}$, је управо и стелација октаедра, односно њено језгро је октаедар, док је њен омотач коцка (слика 4.11).
2. *Композиција њеи шепраедара*, нотације $\{5, 3\}[5\{3, 3\}]\{3, 5\}$, је хирална стелација икосаедра (коришћене групе 5', 6', 7, 9', 10') (слика 4.13б), односно има икосаедар за језгро и додекаедар за омотач. Такође, она је једина хирална композиција, па је занимљиво видети да ће њен дуал бити њен хирални пар.
 3. *Композиција десети шепраедара*, нотације $2\{5, 3\}[10\{3, 3\}]2\{3, 5\}$, је такође стелација икосаедра (коришћене групе 7, 9 и 10), односно има икосаедар за језгро и додекаедар за омотач као и композиција пет тетраедара (слика 4.14б). Иако ова композиција дели особине са претходним композитним телом, она није хирална, али је и даље дуална сама себи (слика 4.15).
 4. *Композиција њеи коцки*, нотације $2\{5, 3\}[5\{4, 3\}]$, нема правилно тело за језгро (зато ни није назначено у нотацији), него ромбични триаконтаедар, али јој је омотач додекаедар (слика 4.12). Дуал ове композиције је композиција пет октаедара, аналогно с тим да је октаедар дуал коцке.
 5. *Композиција њеи октаедара*, нотације $[5\{3, 4\}]2\{3, 5\}$, је стелација икосаедра (коришћена група 2 — слика 4.17б), односно има икосаедар за језгро, док нема правилно тело за омотач, него икосидодекаедар. Дуал ове композиције је композиција пет коцки.

4.4.2 Композиција дуалних тела

Ова композиција је могућа за било који пар дуалних тела. Пошто постоји 5 парова дуалних правилних тела, постоји 5 оваквих композиција грађених од правилних тела. У овим композицијама, два дуална тела деле средишта ивица. Језгро је полиедар сачињен од темених фигура оба тела, док је омотач дуал језгра. Композиције коцке и октаедра (слика 4.18а), као и додекаедра и икосаедра (слика 4.18б) су заправо прве стелације кубоктаедра и икосидодекаедра, који су њихова језгра. При грађењу композиције малог звездастог додекаедра и великог додекаедра, добије се да се цео велики додекаедар налази унутар малог звездастог додекаедра (слика 4.18ц). Ове композиције се такође могу добити и за парове Архимедових и Каталанових тела (од којих су 2 хиралне — примери: слике 4.18е, 4.18ф, 4.18г).

5

Литература

1. Н. S. М. Coxeter, *Regular Polytopes* 3. издање, Dover Publications (1973)
2. Зоран Лучић, *Еуклидска и хиперболичка геометрија* 2. издање, Total Design(1997)
3. Милан Митровић, Михаило Вељковић, Милан Вугделија, *Стереометрија за групу разред Математичке гимназије*, необјављена скрипта за Математичку гимназију
4. Н. S. М. Coxeter, Patrick du Val, Н.Т. Flather, J.F. Petrie, *The Fifty-nine Icosahedra*, University of Toronto studies (1938)
5. Милан Митровић, Михаило Вељковић, Срђан Огњановић, Љубинка Петковић, Ненад Лазаревић, *Геометрија за први разред Математичке гимназије* 4. издање, КРУГ (2013)

Извори за слике:

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
2. <https://en.wikipedia.org/wiki/Tetrahedrite>, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
3. <https://www.naturalhistorycuriosities.com/minerals/how-are-cubic-pyrite-crystals-formed/>, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
4. <https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetite>, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
5. <https://en.wikipedia.org/wiki/Radiolaria>, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.

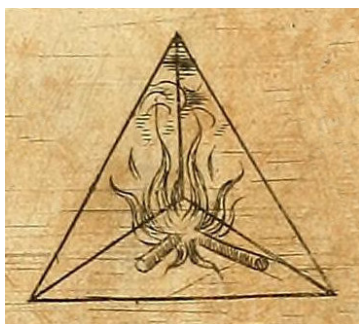
6. https://www.researchgate.net/figure/Figura-5-Solidi-platonici-con-la-costruzione-dei-relativi-poliedri-duali_fig10_293648058, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
7. https://en.wikipedia.org/wiki/Toroidal_polyhedron, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
8. https://sr.wikipedia.org/sr-el/%D0%BCDouble_torus_illustration.png, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
9. https://en.wikipedia.org/wiki/Vertex_figure, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
10. <https://www.technologyuk.net/mathematics/geometry/platonic-solids.shtml>, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
11. <https://johncarlosbaez.wordpress.com/2017/12/10/from-the-icosahedron-to-e8/>, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
12. <https://en.wikipedia.org/wiki/Disphenoid>, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
13. <https://www.abcteach.com/resource/clip-art-3d-solids-pentagonal-prism-grayscale/>, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
14. <https://en.wikipedia.org/wiki/Antiprism>, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
15. https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_solid, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
16. https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_solid, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
17. <https://graphicmaths.com/gcse/geometry/star-polygons/>, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
18. https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Regular_star_polygon_7-2.svg, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
19. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Star_polygon-6-2-vertex.svg, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
20. <https://mathworld.wolfram.com/DodecahedronStellations.html>, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.

21. https://en.wikipedia.org/wiki/Small_stellated_dodecahedron, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
22. https://en.wikipedia.org/wiki/Great_stellated_dodecahedron, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
23. https://en.wikipedia.org/wiki/Great_icosahedron, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
24. https://en.wikipedia.org/wiki/The_Fifty-Nine_Icosahedra, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
25. https://en.wikipedia.org/wiki/Polytope_compound, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
26. <https://mathworld.wolfram.com/IcosahedronStellations.html>, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.
27. <https://www.matematicasvisuales.com/english/html/geometry/space/volstellatedoctahedron.html>, датум последњег приступа: 29. 05. 2025.

Додатак А

Слике

1 Увод



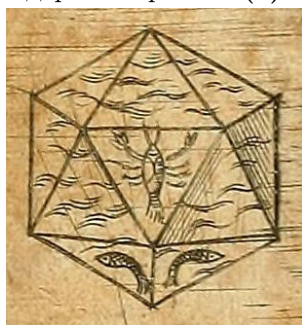
(а) Тетраедар — ватра



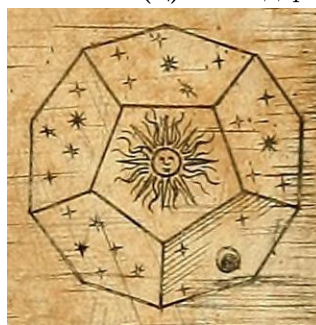
(б) Хексаедар — земља



(ц) Октаедар — ваздух

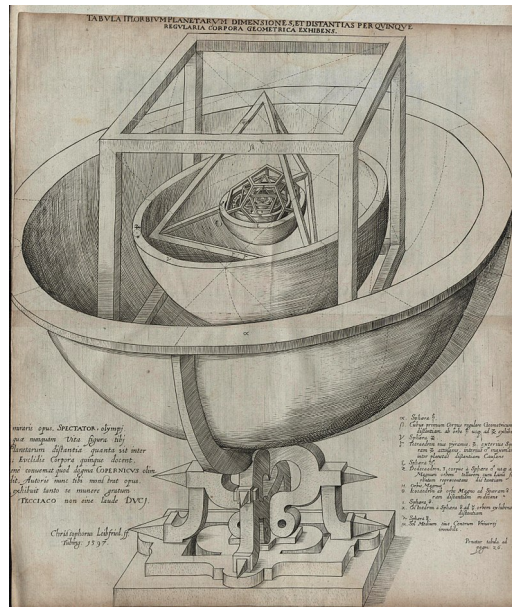


(д) Икосаедар — вода



(е) Додекаедар — космос

Слика 1.1: Кеплерове илустрације Платонових тела и елемената које представљају



Слика 1.2: Кеплеров модел сучевог система



(a) Тетрахидрит

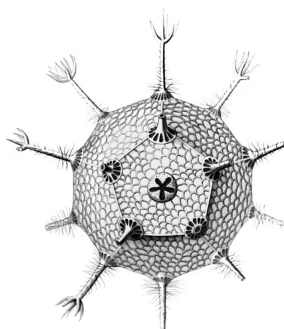


(б) Пирит

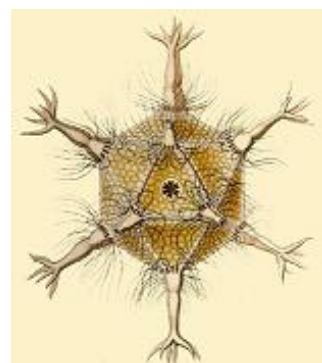


(ц) Магнетит

Слика 1.3: Примери кристалних решетка у облику Платонових тела



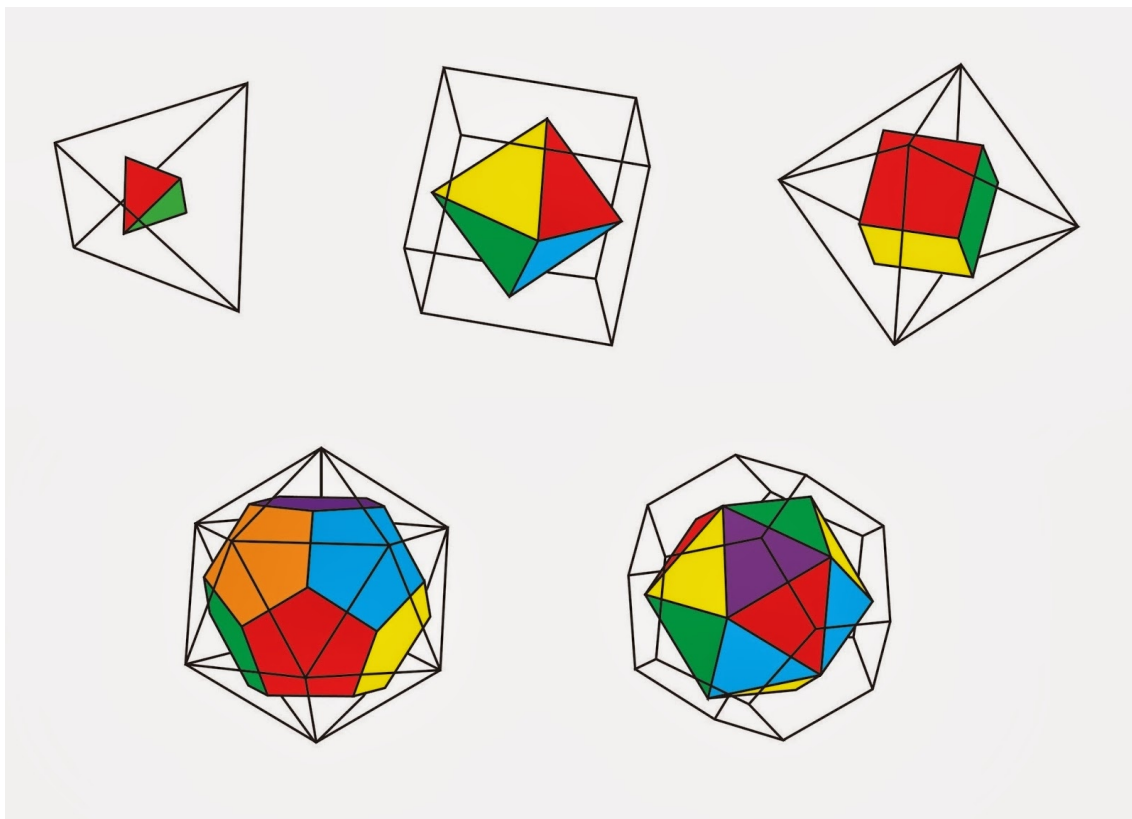
(a) Circorrhagma dodecahedra



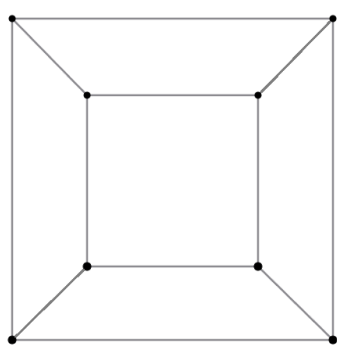
(б) Circogonia icosahedra

Слика 1.4: Радиоларије са ћелијским микроскелетом у облику Платонових тела

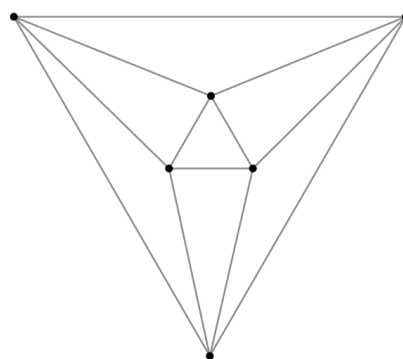
2 Полиедри



Слика 2.1: Платонова тела и њихови дуали уписани у њих

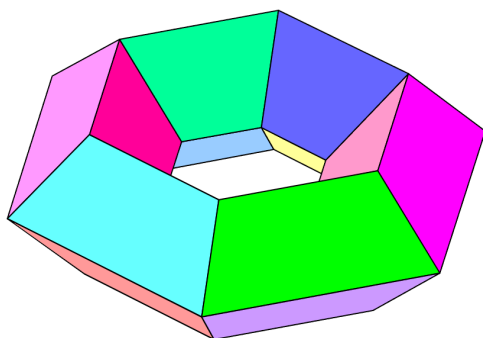
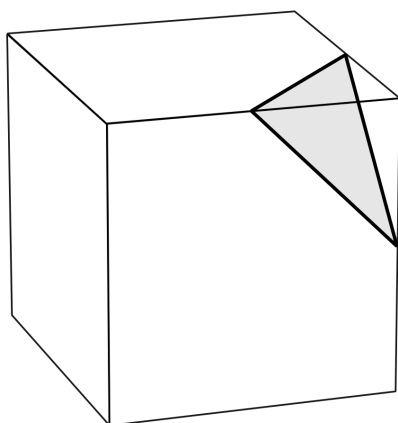
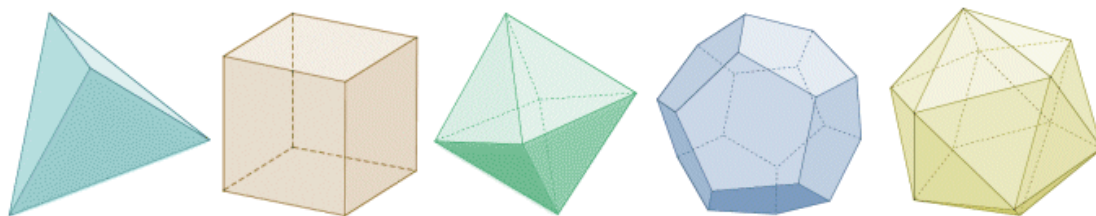


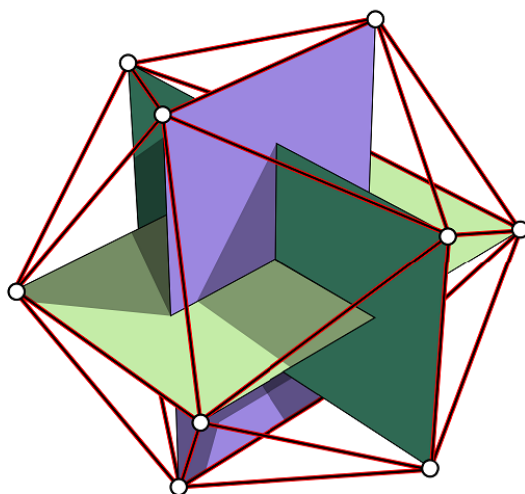
(a) Мапа коцке



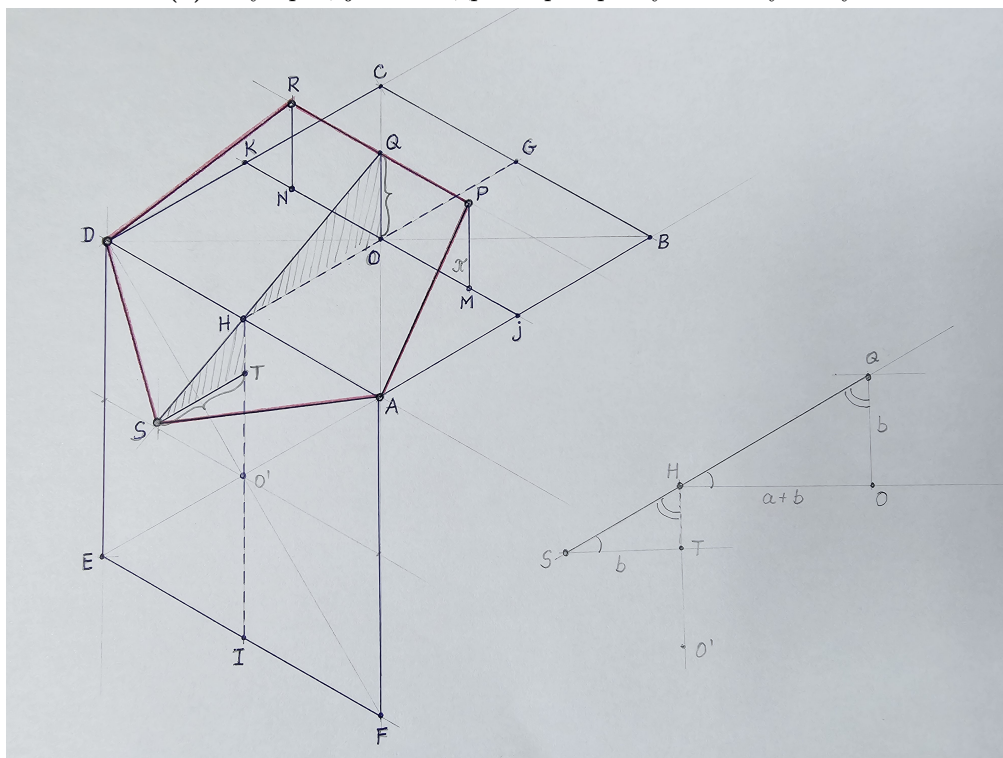
(b) Мапа октаедра

Слика 2.2: Пример дуалних мапа

(a) Торус $r = 1$ (б) Дупли торус $r = 2$ **Слика 2.3:** Примери тела са родом различитим од нула**Слика 2.4:** Темена фигура коцке**Слика 2.5:** Пет Платонових тела



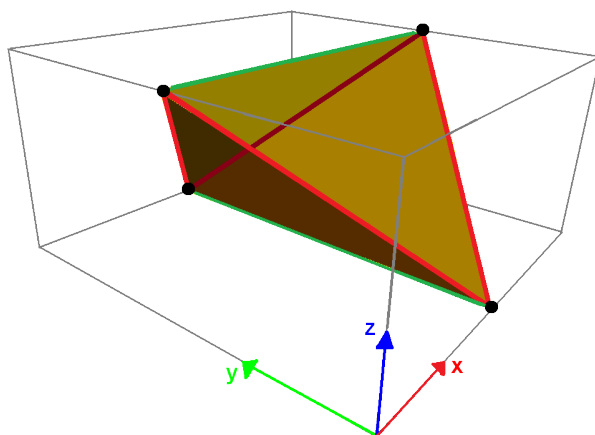
(а) Илустрација икосаедра и три правоугаоника у њему



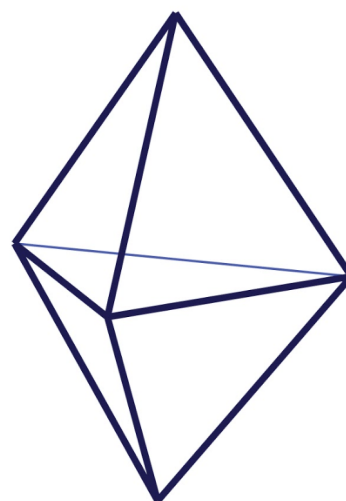
(б) Илустрација конструкције једне стране додекаедра

Слика 2.6: Илустрације конструкција икосаедра и додекаедра

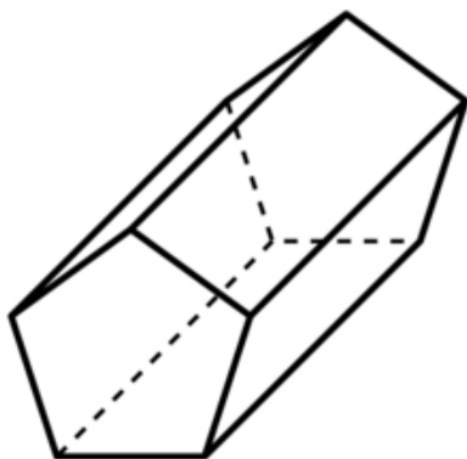
3 Архимедова тела



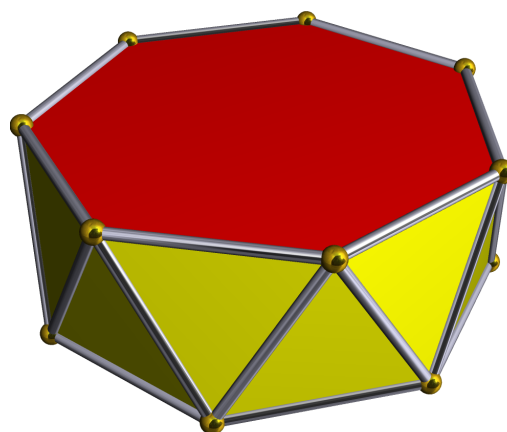
Слика 3.1: Дисфеноид



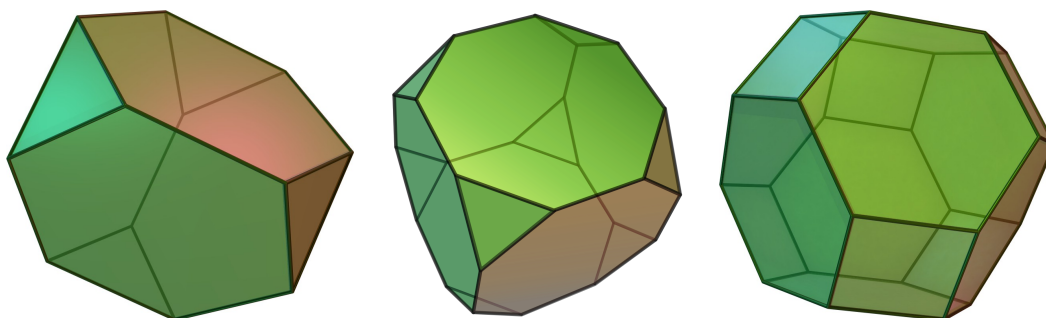
Слика 3.2: Тространа дипирамида



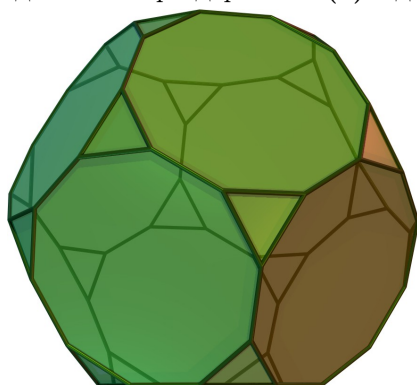
Слика 3.3: Петострана призма



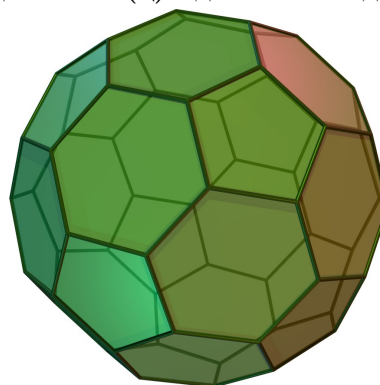
Слика 3.4: Седмоострана антипризма



(а) Одсечени тетраедар $3 \cdot 6^2$ (б) Одсечена коцка $3 \cdot 8^2$ (ц) Одсечени октаедар $4 \cdot 6^2$

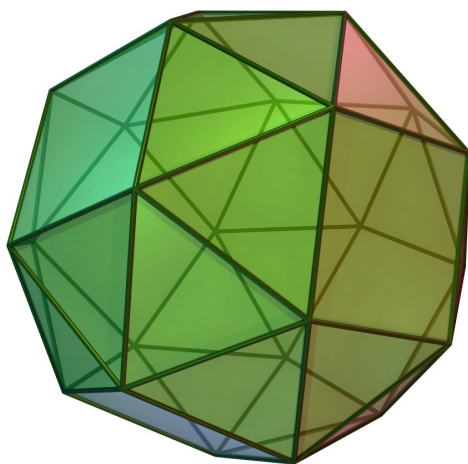


(д) Одсечени додекаедар $3 \cdot 10^2$

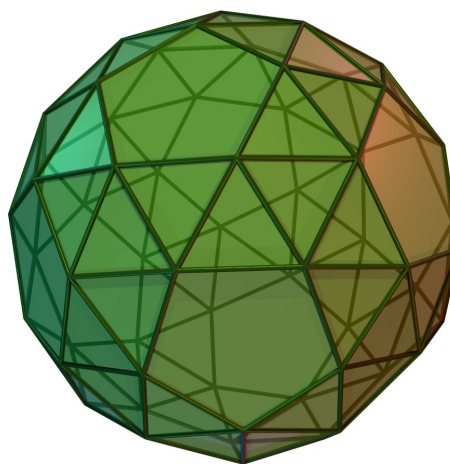


(е) Одсечени икосаедар $5 \cdot 6^2$

Слика 3.5: Архимедова тела добијена одсецањем правилних полиедара

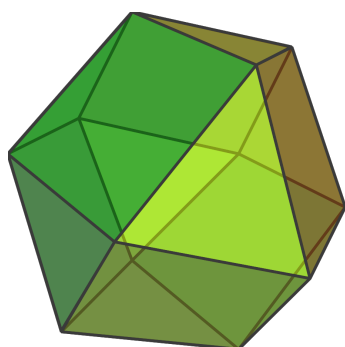


(а) Уврнута коцка

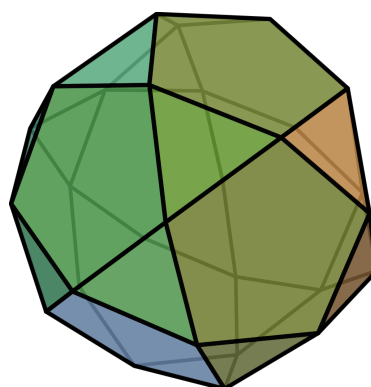


(б) Уврнути додекаедар

Слика 3.6: Архимедова тела добијена увртањем правилних полиедара

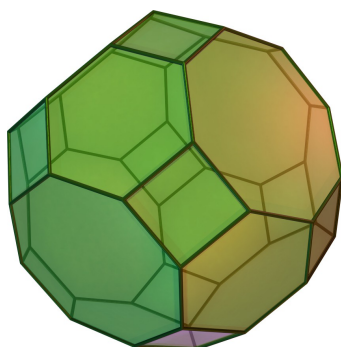


(a) Кубоктаедар

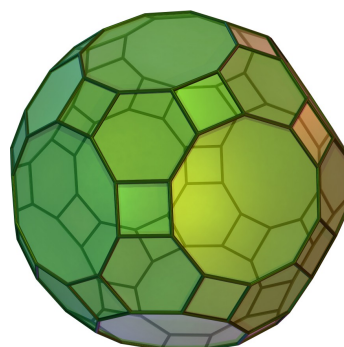


(б) Икосидодекаедар

Слика 3.7: Архимедова тела добијена пресецањем правилних полиедара

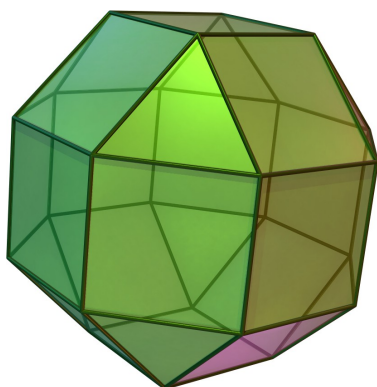


(a) Одсечени кубоктаедар

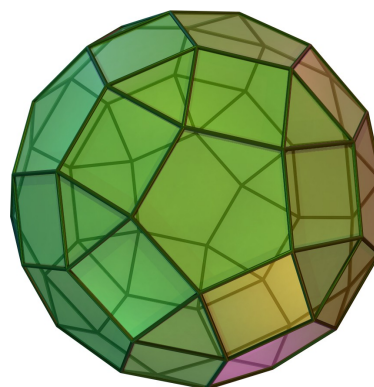


(б) Одсечени икосидодекаедар

Слика 3.8: Архимедова тела добијена одсецањем тела добијених пресеком правилних полиедара

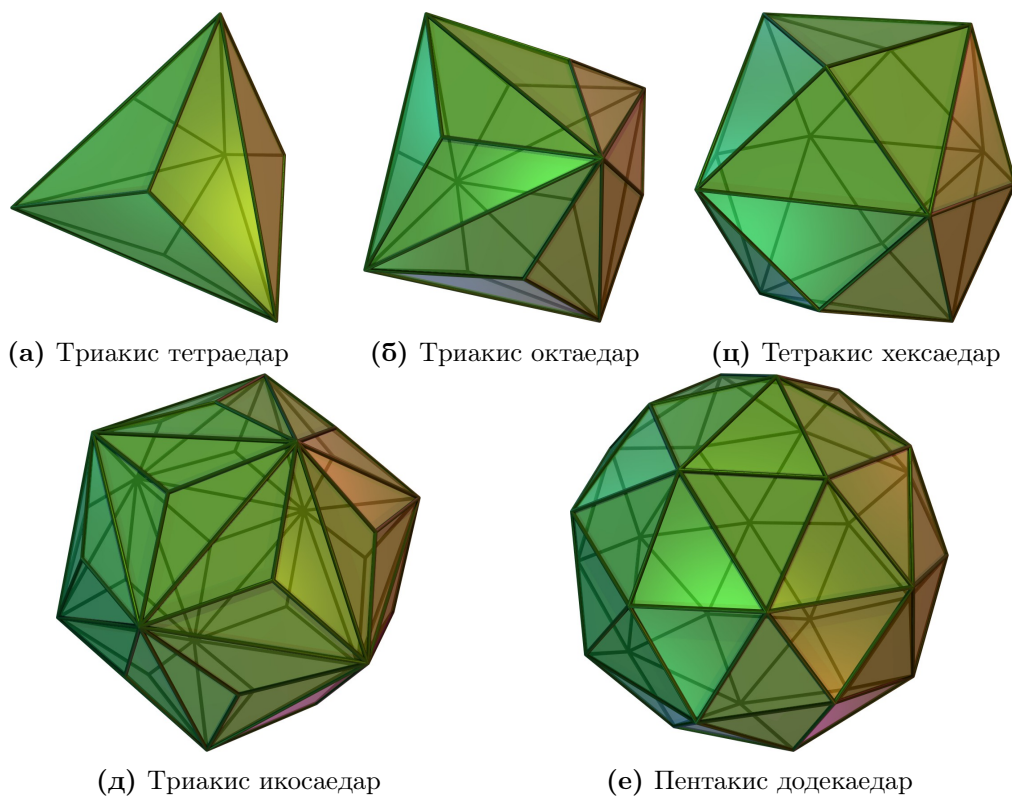


(a) Ромбични кубоктаедар

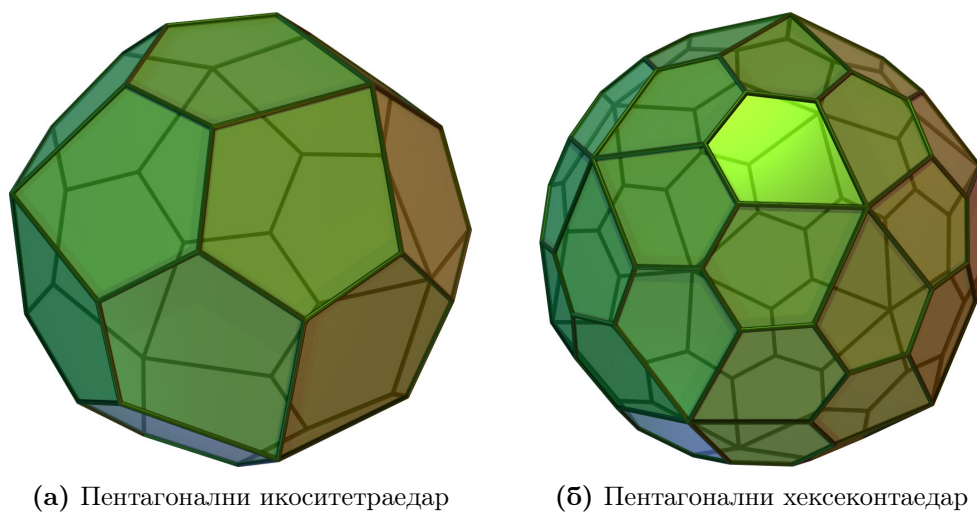


(б) Ромбични икосидодекаедар

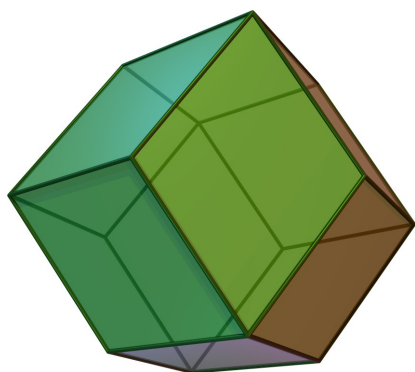
Слика 3.9: Ромбична Архимедова тела



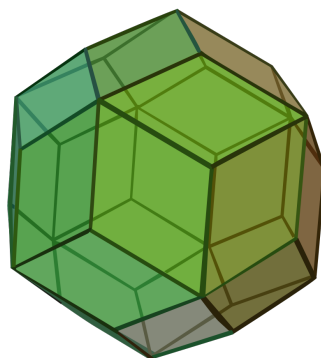
Слика 3.10: Каталанова тела која су дуали одсеченим правилним полиедрима



Слика 3.11: Каталанова тела која су дуали уврнутих правилних полиедара

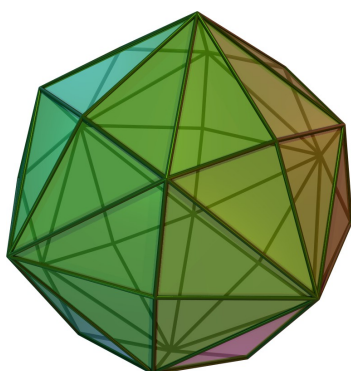


(а) Ромбични додекаедар

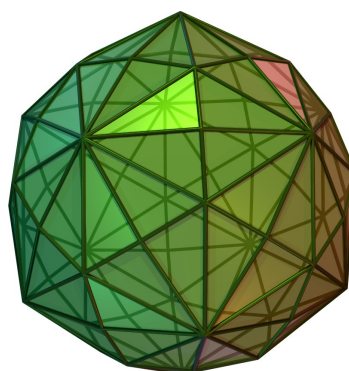


(б) Ромбични триаконтаедар

Слика 3.12: Каталанова тела која су дуали пресека правилних полиедара

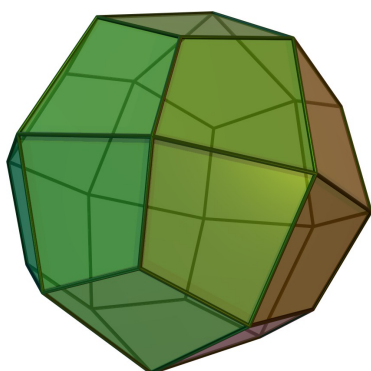


(а) Дисдјакис додекаедар

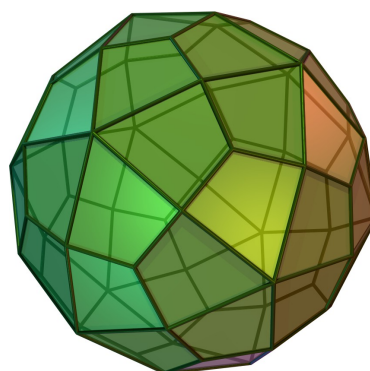


(б) Дисдјакис триаконтаедар

Слика 3.13: Каталанова тела која су дуали одсечених пресека правилних полиедара



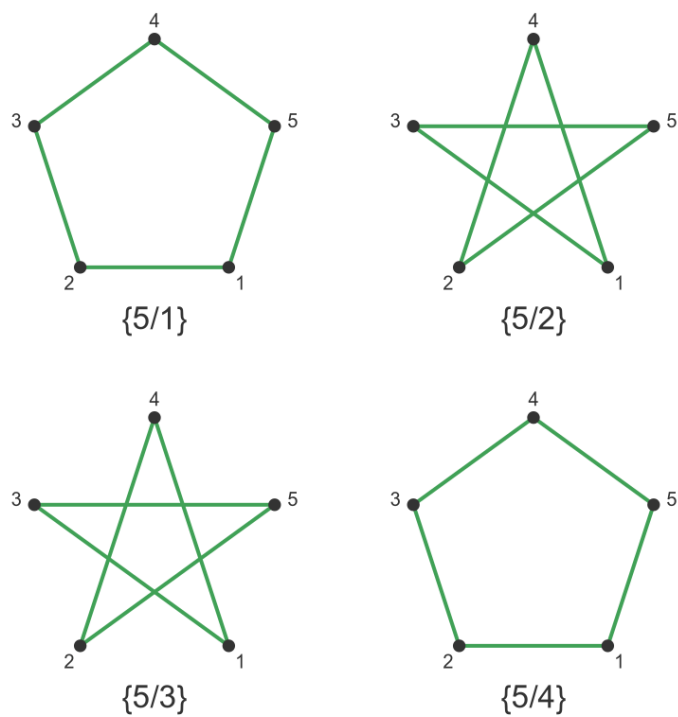
(а) Делтоидни икоситетраедар



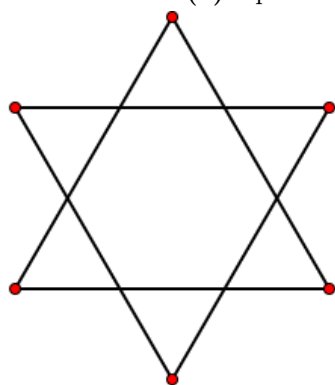
(б) Делтоидни хексеконтаедар

Слика 3.14: Каталанова тела која су дуали ромбичним Архимедовим телима

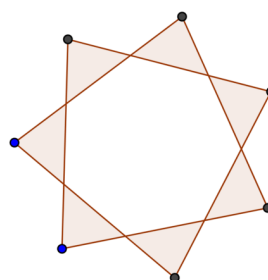
4 Стелације и композиције



(а) Правилни полигони са 5 темена

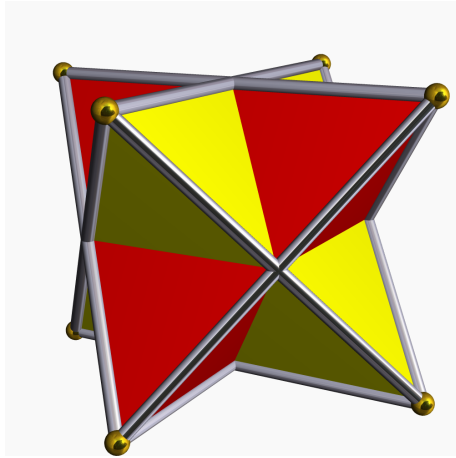


(б) Правилни полигон $\{6/2\}$

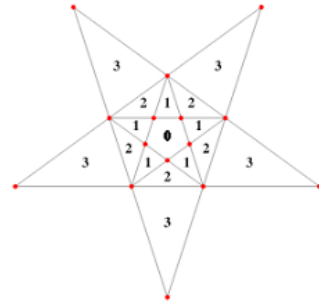


(ц) Правилни полигон $\{7/2\}$

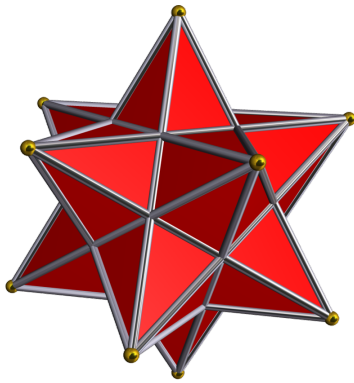
Слика 4.1: Правилни звездасти полигони



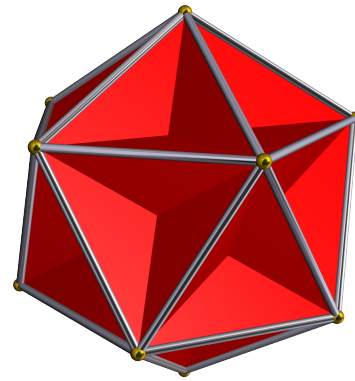
Слика 4.2: Stella octangula



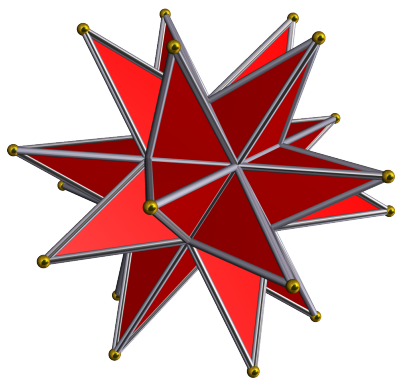
Слика 4.3: Дијаграм стелације додекаедра



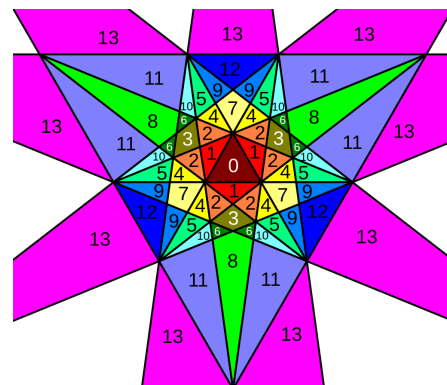
Слика 4.4: Мали звездасти додекаедар $\{5/2, 5\}$



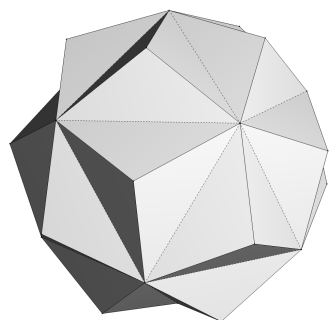
Слика 4.5: Велики додекаедар $\{5, 5/2\}$



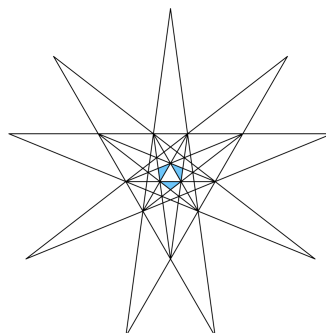
Слика 4.6: Велики звездасти додекаедар $\{5/2, 3\}$



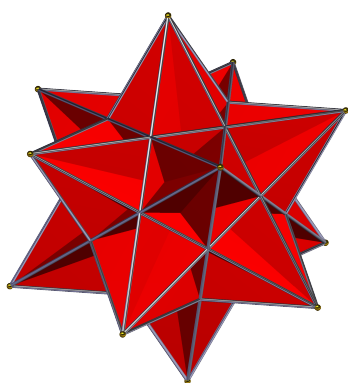
Слика 4.7: Дијаграм стелације икосаедра



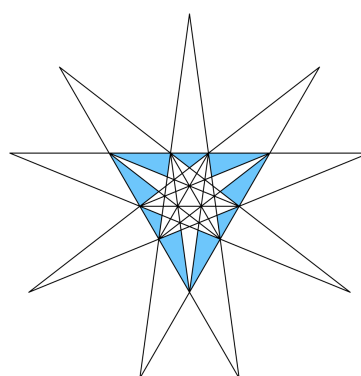
(а) Прва стелација икосаедра



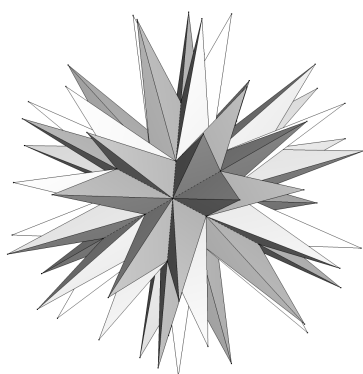
(б) Дијаграм прве стелације икосаедра

Слика 4.8: Прва стелација икосаедра и њен дијаграм

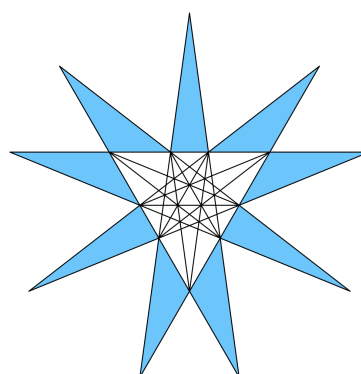
(а) Велики икосаедар



(б) Дијаграм стелације великог икосаедра

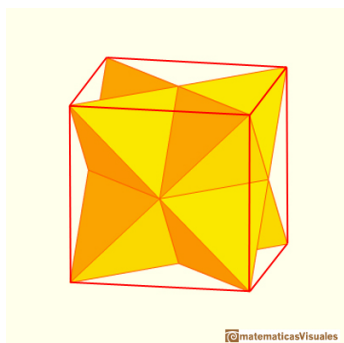
Слика 4.9: Велики икосаедар и дијаграм њене стелације

(а) Финална стелација икосаедра

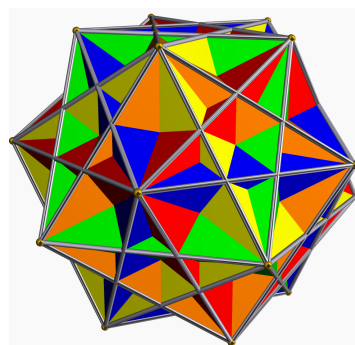


(б) Дијаграм финалне стелације икосаедра

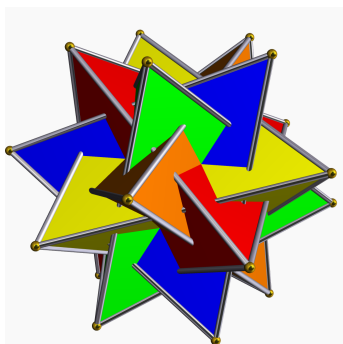
Слика 4.10: Финална стелација икосаедра и њен дијаграм



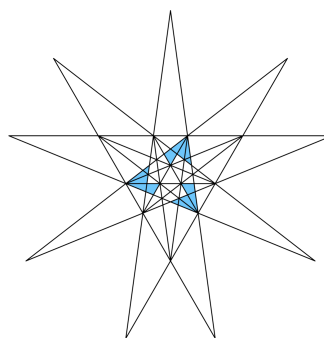
Слика 4.11: Stella octangula уписана у коцку



Слика 4.12: Композиција пет коцки

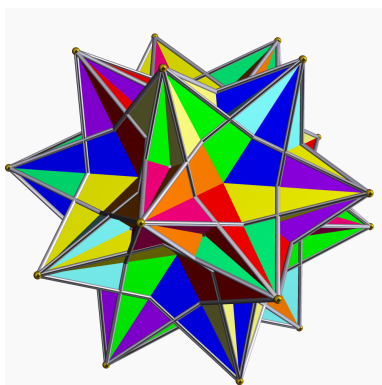


(а) Композиција пет тетраедара

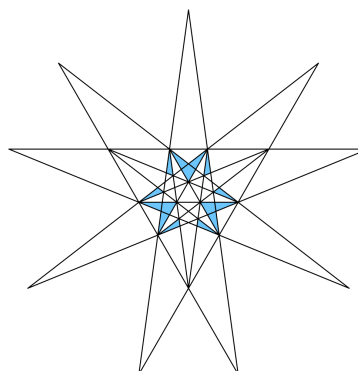


(б) Дијаграм стелације композиције пет тетраедара

Слика 4.13: Композиција пет тетраедара и дијаграм њене стелације

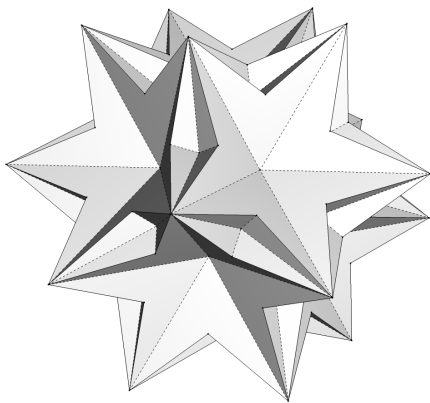


(а) Композиција десет тетраедара

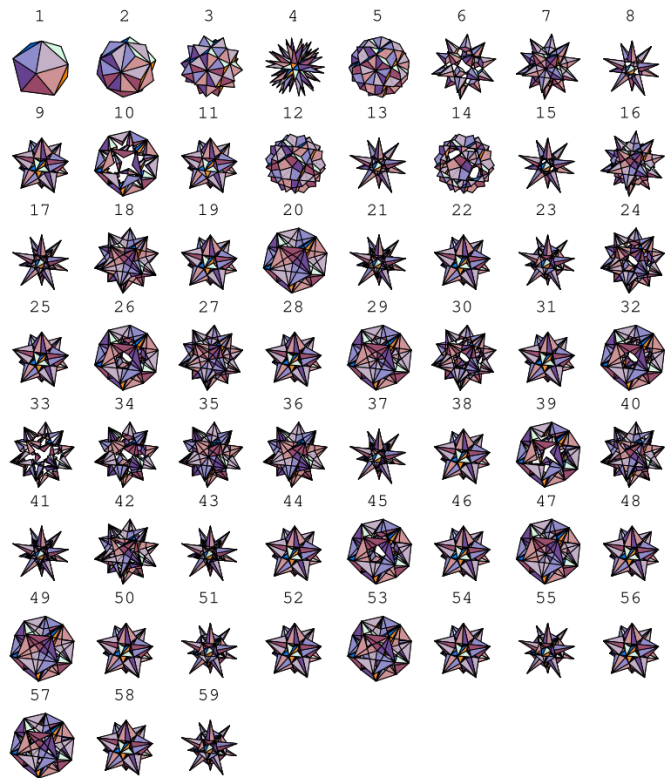


(б) Дијаграм стелације композиције десет тетраедара

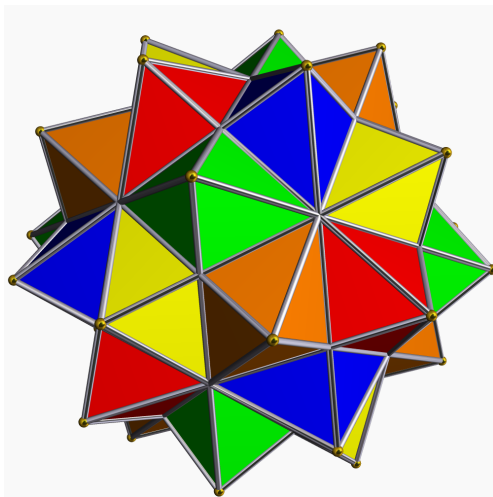
Слика 4.14: Композиција десет тетраедара и дијаграм њене стелације



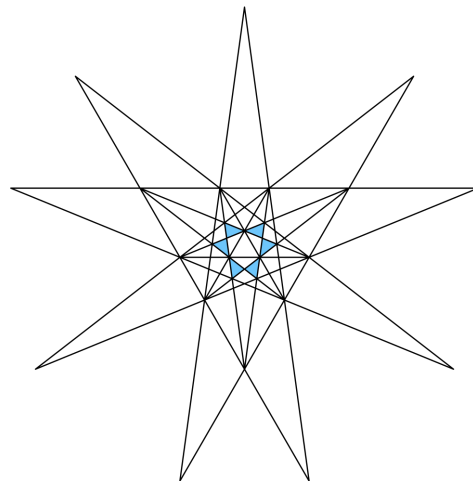
Слика 4.15: Композиција 10 тетраедара представљена искључиво као стелација икосаедра



Слика 4.16: 59 Стелација икосаедра

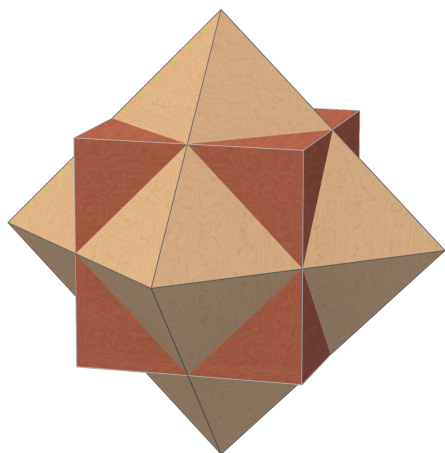


(а) Композиција пет октаедара

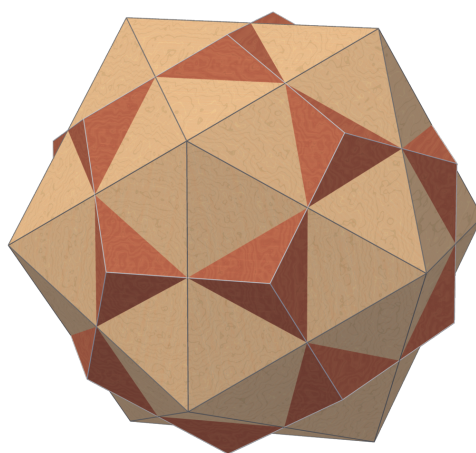


(б) Дијаграм стелације композиције пет октаедара

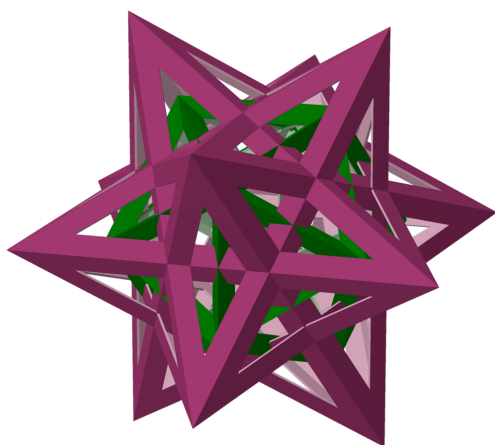
Слика 4.17: Композиција 5 октаедара и дијаграм њене стелације



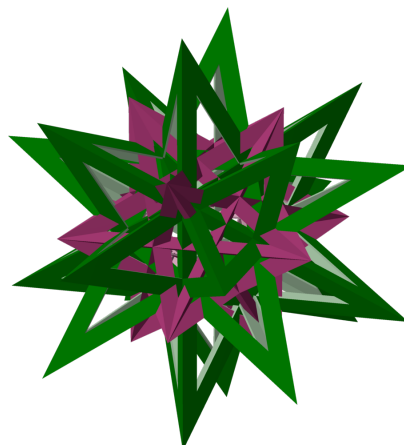
(а) Коцка и октаедар



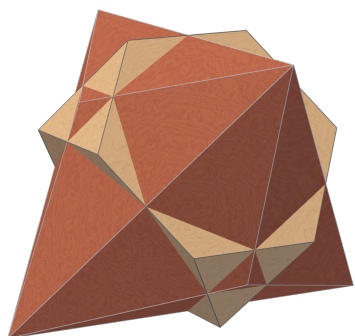
(б) Додекаедар и икосаедар



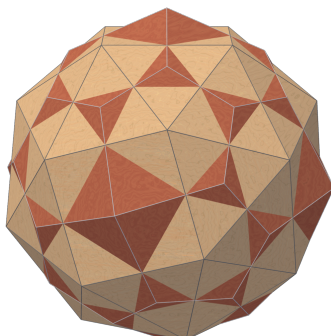
(ц) Мали звездасти додекаедар и велики додекаедар



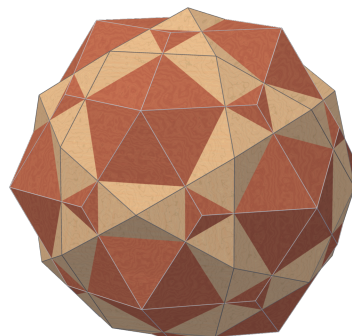
(д) Велики икосаедар и велики звездасти додекаедар



(е) Одсечени тетраедар и триакис тетраедар



(ф) Уврнута коцка и пентагонални икоситетраедар



(г) Икосидодекаедар и хексеконтаедар

Слика 4.18: Композиције дуалних тела

Додатак Б

Табеле

Име	$\{p, q\}$	Темена	Пљосни	Ивице	Дуал
Тетраедар	$\{3, 3\}$	4	4	6	Тетраедар
Хексаедар (коцка)	$\{4, 3\}$	8	6	12	Октаедар
Октаедар	$\{4, 3\}$	6	8	12	Коцка
Додекаедар	$\{5, 3\}$	20	12	30	Икосаедар
Икосаедар	$\{3, 5\}$	12	20	30	Додекаедар

Табела 1: Платонова тела

,

Име	Ознака	Темена	Пљосни	Ивице
n -тострана призма	$4^2 \cdot n$	$2n$	n квадрата, 2 n -тоугла	$3n$
n -тострана антипризма	$3^3 \cdot n$	$2n$	$2n$ троуглова, 2 n -тоугла	$4n$
Одсечени тетраедар	$3 \cdot 6^2$	12	4 троугла, 4 шестоугла	12
Одсечена коцка	$3 \cdot 8^2$	24	8 троуглова, 6 осмоуглова	36
Одсечени октаедар	$4 \cdot 6^2$	24	6 квадрата, 8 шестоуглова	36
Одсечени додекаедар	$3 \cdot 10^2$	60	20 троуглова, 12 петоуглова	90
Одсечени икосаедар	$5 \cdot 6^2$	60	12 петоуглова, 20 шестоугова	90
Уврнута коцка	$3^4 \cdot 4$	24	32 троугла, 6 квадрата	60
Уврнути додекаедар	$3^4 \cdot 5$	60	80 троуглова, 12 петоуглова	150
Кубоктаедар	$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$	12	8 троуглова, 6 квадрата	24
Икосидодекаедар	$3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5$	30	20 троуглова, 12 петоуглова	60
Одсечени кубоктаедар	$4 \cdot 6 \cdot 8$	48	12 квадрата, 8 шестоуглова, 6 осмоуглова	72
Одсечени икосидодекаедар	$4 \cdot 6 \cdot 10$	120	30 квадрата, 20 шестоуглова, 12 десетоуглова	180
Ромбични кубоктаедар	$3 \cdot 4^3$	24	8 троуглова, 18 квадрата	48
Ромбични икосидодекаедар	$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4$	60	20 троуглова, 30 квадрата, 12 петоуглова	120

Табела 2: Архимедова тела

Име	Темена	Пљосни	Ивице	Дуал
Триакис тетраедар	8	12	12	Одсечени тетраедар
Триакис октаедар	14	24	36	Одсечена коцка
Тетракис хексаедар	14	24	36	Одсечени октаедар
Триакис икосаедар	32	60	90	Одсечени додекаедар
Пентакис додекаедар	32	60	90	Одсечени икосаедар
Пентагонални икоситетраедар	38	24	60	Уврнута коцка
Пентагонални хексеконтаедар	92	60	150	Уврнути додекаедар
Ромбични додекаедар	14	12	24	Кубоктаедар
Ромбични триаконтаедар	32	30	60	Икосидодекаедар
Дисдјакис додекаедар	26	48	72	Одсечени кубоктаедар
Дисдјакис триаконтаедар	62	120	180	Одсечени икосидодекаедар
Делтоидни икоситетраедар	26	24	48	Ромбични кубоктаедар
Делтоидни хексеконтаедар	62	60	120	Ромбични икосидодекаедар

Табела 3: Каталанова тела

Име	$\{p, q\}$	Темена	Пљосни	Ивице	χ
Мали звездасти додекаедар	$\{5/2, 5\}$	12	12	30	-6
Велики додекаедар	$\{5, 5/2\}$	12	12	30	-6
Велики звездасти додекаедар	$\{5/2, 3\}$	20	12	30	2
Велики икосаедар	$\{3, 5/2\}$	12	20	30	2

Табела 4: Kepler-Poinsot-ова тела

Композиција	Schläfli-јев симбол	Омотач	Језгро
2 Тетраедра	$\{4, 3\}[2\{3, 3\}]\{3, 4\}$	Коцка	Октаедар
5 Тетраедара	$\{5, 3\}[5\{3, 3\}]\{3, 5\}$	Додекаедар	Икосаедар
10 Тетраедара	$2\{5, 3\}[10\{3, 3\}]2\{3, 5\}$	Додекаедар	Икосаедар
5 Коцки	$2\{5, 3\}[5\{4, 3\}]$	Додекаедар	Ромбични три-аконтаедар
5 Октаедара	$[5\{3, 4\}]2\{3, 5\}$	Икосидодекаедар	Икосаедар

Табела 5: Правилна композитна тела

Композиција	Омотач	Језгро
2 Тетраедра	Коцка	Октаедар
Коцка и октаедар	Ромбични додекаедар	Кубоктаедар
Додекаедар и икосаедар	Ромбични триаконтаедар	икосидодекаедар
Мали звездасти додекаедар и велики додекаедар	Икосаедар	Додекаедар
Велики звездасти додекаедар и велики икосаедар	Додекаедар	Икосидодекаедар

Табела 6: Композиције дуалних тела