

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД
ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Стабла декомпозиције

Ученик

Владимир БРАНКОВИЋ,
IVд

Ментор

др Лука МИЛИЋЕВИЋ

Београд, 30. мај 2025.

Садржај

1	Увод	1
2	Уводни појмови	2
2.1	Основни графовски појмови	2
2.2	Подграф и операције над графовима	3
2.3	Повезаност графова	4
3	Теорема о минору графа	8
3.1	Добар-квази-поредак	8
3.2	Теорема о минору графа	11
4	Стабла декомпозиције	15
4.1	Стабла декомпозиције	15
4.2	Клика-сума граф	20
4.3	Парцијална k -стабла	21
4.4	Теорема о минору графа	23
4.5	Теорема о искљученим минорима	25
5	Алгоритамске импликације и примене	28
5.1	Израчунавање ширине стабла	28
5.2	Проблем k дисјунктних путева	29
5.3	Ширина стабла окарактерисана игром	29
5.4	НП-тешки проблеми	30
6	Закључак	33
	Литература	33

1

Увод

Вагнерова хипотеза, коју је добила име по немачком математичару Клаусу Вагнеру 30-тих година прошлог века, тврди да у свакој бесконачној секвенци графова, постоји један који је изоморфан минору неког другог. Почетком 80-тих, Нил Робертсон и Пол Симор бавили су се овим проблемом у серији радова *Графовски минори* који обухвата преко 500 страна, да би хипотезу коначно потврдили 2004. године, резултирајући *теоремом о минору графа* (*Graph minor theorem* или *Robertson-Seymour theorem*). Концепти и алати који су развијени зарад доказа имали су велики утицај у области графова, а један од најбитнијих резултата је *стабло декомпозиције* (tree decomposition).

Стабло декомпозиције и ширина стабла омогућују нам да опишемо колико неки граф личи на стабло и у којој мери дели особине са истим. Алгоритамска важност овога није уочена све док није показано да се неки НП-тешки проблеми постављени у монадној логици другог реда могу решити у полиномском времену користећи динамичко програмирање на графовима ограничене *ширине стабла*. За неке битне класе графова је показано да имају ограничену *ширину стабла*:

- стабла/шуме (ширина стабла 1)
- серијско-паралелни графови (ширина стабла 2)
- граф контроле података (у пракси ширина стабла ретко већа од 5)

Исто тако, неке класе графова, попут бипартитивних и планарних, немају ограничену ширину стабла.

2

Уводни појмови

2.1 Основни графовски појмови

Увешћемо неке основне појмове, зарад лакшег праћена наставка рада. Све ознаке су углавном исте као и у већини литературе.

Дефиниција 2.1.1. $Graf = (V, E)$ означава граф са скупом чворова V и скупом грана E . Надаље ћемо користити V и E , или $V(G)$ и $E(G)$ као скупове чворова и грана графа G без посебне напомене. Грану $e \in E$ између два чвора $u, v \in V$ означавамо са (u, v) или просто uv . Петља је грана vv .

Такође, граф може имати вишеструке гране између два чвора као и више од једне петље на чвору. У том случају граф зовемо *мултиграфом*. Код простих графова, E можемо посматрати као подскуп од $[V]^2$, скупа свих подскупова од V кардиналности 2. За мултиграфове ова дефиниција није довољна, са вишеструким гранама мултискуп E био би погоднији, на пример $E \mapsto V \cup [V]^2$. У овом раду посматраћемо E као мултискуп.

Дефиниција 2.1.2. Чворови u и v су суседни ако постоји грана uv . Степен чвора $d_G(v)$, или просто $d(v)$, једнак је броју чворова суседних са v , где се петља рачуна двоструко.

Дефиниција 2.1.3. *Суседство* чвора v је $N_G(v) = N(v) = \{u | uv \in E\}$. У случају петље чвор v је самом себи сусед.

Дефиниција 2.1.4. *Максимални степен* чвора је $\Delta(G) = \max_{v \in V} |N(v)|$. Суседство скупа $W \subseteq V$ дефинисано је са $N(W) = \bigcup_{w \in W} N(w)$.

Дефиниција 2.1.5. *Ред* графа $G = (V, E)$ је кардиналност $|V|$ скупа чворова. Коначан граф има ред $|V| = n \in \mathbb{N}$. Ако није другачије наглашено, графови у овом раду биће коначни неусмерени мултиграфови.

Дефиниција 2.1.6. *Комплетан* граф је граф G у ком су свака два чвора $u, v \in V(G)$ суседни. У комплентном графу реда n сваки чвор има степен $d(u) = n - 1$ и такав граф означавамо са K_n .

Дефиниција 2.1.7. Граф $G = (V, E)$ је *бипартитиван* ако скуп чворова може бити подељен у два скупа V_1, V_2 тако да $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ и $\nexists e \in E (e \subseteq V_1 \vee e \subseteq V_2)$. Другим речима, чворови графа могу да се обоје у две боје тако да су чворови сваке гране различите боје. (Прост) бипартитиван граф је *комплетан* ако није могуће додати грану тако да се не наруши својство бипартитивности. *Комплетан бипартитивни граф* $K_{m,n}$ је комплетан бипартитивни граф за који важи $|V_1| = m$ и $|V_2| = n$.

2.2 Подграф и операције над графом

У овом одељку представљамо операције над графовима и могуће релације измеђ два графа. У наставку разматрамо граф $G = (V, E)$.

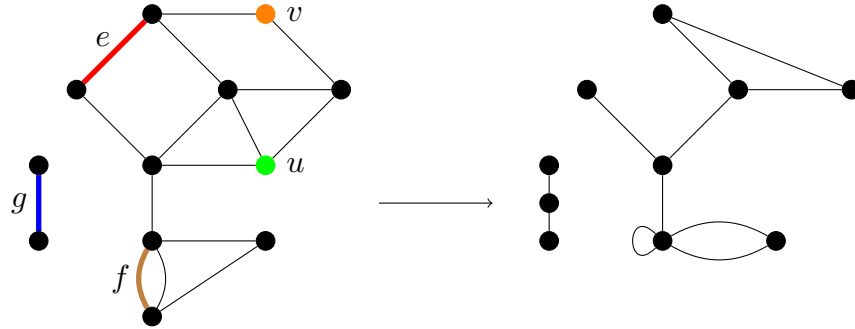
Дефиниција 2.2.1. (брисање гране) Брисањем графе добија се граф са истим скупом чворова V и скупом грана $E \setminus \{e\}$. Овакав граф означавамо и са $G - e$. За брисање скупа грана F , добија се граф $G - F = (V, E \setminus F)$.

Дефиниција 2.2.2. (брисање чвора) При брисању чвора v потребно је обрисати и све гране повезане са v . Дакле, $G - v = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{e \in E \mid v \in e\})$ и $G - W = (V \setminus W, E \setminus \{e \in E \mid \exists v \in W : v \in e\})$ за $W \subseteq V$.

Дефиниција 2.2.3. (контракција гране) Контракцијом гране $e = uv$ добија се граф G/e са новим чвором v_e који замењује e . Чворови u и v се бришу и v_e је спојен са свим њиховим суседима. Прецизније, свака грана $uw \in E$ или $vw \in E$ се замени граном $v_e w \in E(G/e)$. Гране неповезане са u или v остају непромењене, у мултиграфу вишеструке гране могу постати петље а петље не могу бити контраховане, само обрисане.

Дефиниција 2.2.4. (потподела) Потподела гране $e = uv$ додаје нови чвор w степена 2 на грану e коју дели на uw и wv . Уопштеније, e може бити замењено uv -путем чије све унутрашње гране имају степен 2.

Дефиниција 2.2.5. (сажимање чвора) Сажимање чвора је инверзна операција од потподеле гране, брише се чвор степена 2 и додаје грана између његових суседа. У случају вишеструких грана, овом операцијом се добијају нове петље. Чвор са петљом применом операције буде обрисан.



Слика 2.1. брисање гране e и чвора u , контракција f , потподела g и сажимање v

Дефиниција 2.2.6. (подграф) *Подграф* $G' = (V', E')$ графа G је граф за који важи $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. То записујемо $G' \subseteq G$, а G је *суперграф* графа G' .

Дефиниција 2.2.7. (индуковани подграф) За подграф $G' = (V', E')$ кажемо да је *индукован* скупом $W \subseteq V$ ако $V' = W$ и $E' = \{uv \in E \mid u, v \in W\}$. Подграф индукован скупом чворова W означавамо са $G[W]$. Аналогно, за $F \subseteq E$, $G[F] = (\{v \in V \mid \exists e \in F : v \in e\}, F)$ представља подграф индукован скупом грана F .

Последица 2.2.1. Граф индукован скупом грана не може садржати изолован чвор (чвор степена 0).

Дефиниција 2.2.8. (разапињући подграф) У случају $V(G') = V$, подграф G' је *разапињући подграф*.

Дефиниција 2.2.9. (клика) Максимални комплетан подграф C графа G називамо *клика* графа G . То значи да C није садржан у било ком другом подграфу графа G вишег реда. *Клика број* $\omega(G)$ једнак је највећем реду међу свим кликама графа G .

Дефиниција 2.2.10. (унија, пресек и разлика графова) *Унија* два графа G и G' је граф $G \cup G' = (V(G) \cup V(G'), E(G) \cup E(G'))$. *Пресек* два графа је $G \cap G' = (V(G) \cap V(G'), E(G) \cap E(G'))$. *Разлика* графова $G - G'$, или $G \setminus G'$ добија се када графу G обришемо све чворове и гране који се налазе и у графу G' . Два графа су *disjunctna* ако немају заједничких чворова.

2.3 Повезаност графова

До краја поглавља, посматрајмо граф $G = (V, E)$ и његова два чвора u и v . Пут P_G^{uv} од u до v , или uv -пут, представља (коначну) секвенцу различитих

чвора и грана

$$v_0 e_0, v_1 e_1 \dots v_{n-1} e_{n-1}, v_n$$

тако да је $v_0 = u$, $v_n = v$ и $e_i = v_i v_{i+1}$ за свако $i = 0, 1, \dots, n-1$. u и v су *почетни* и *крајњи* чвор, а остали су *унутрашњи*. *Дужина пута* је број грана на путу. Ако је референца чита, индекс G може бити изостављен.

Пут P у графу G можемо посматрати и као подграф од G састављен од чворова и грана из дефинисане секвенце. Ова интерпретација биће нам најкориснија, а самим тим можемо користити графовске операције и над путевима.

Два пута се *секу* ако имају бар један заједнички чвор. Они су (*унутрашње*) *дисјунктни* ако су скупови њихових (*унутрашњих*) чворова дисјунктни.

Пут P^{uw} између два сета $U, V \subseteq V$ за који важи $P^{uw} \cap U = \{u\}$ и $P^{uw} \cap W = \{w\}$ зовемо UW -пут. У случају $U = \{u\}$ или $W = \{w\}$ пишемо uW -пут или Uw -пут, респективно. *Циклус* је uv -пут уз услов да су u и v једнаки. Дефинисали смо петљу, те за циклус тражимо да има бар једну грану, тј. пут који се састоји од само једног чвора није циклус.

За граф кажемо да је *повезан* ако за свака два чвора u и v постоји uv -пут. *Повезана компонента* графа G је максимални повезани подграф G' графа G , тј. додавањем било ког чвора или гране из $G - G'$, подграф постаје неповезан. Број повезаних компоненти града означавамо са $c(G)$.

Стабло је повезан граф без циклуса, а *шума* граф чије су повезане компоненте стабла. Због непостојања циклуса, за свака два чвора u, v у стаблу T постоји јединствен пут између њих T^{uv} . У нашем раду, а и генерално, биће корисно издвојити један чвор и назвати га *корен* стабла, $r(T)$, или само r . Пошто је пут између два чвора јединствен, можемо дефинисати парцијално уређење над скупом чворова стабла T :

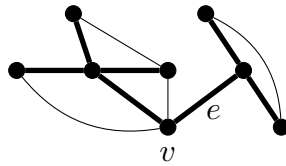
$$u \leq_T v \iff u \in T^{rv}.$$

Укорено стабло можемо посматрати и као усмерени граф у ком свака грана има *улазни* и *излазни* чвор и усмерене су од корена. Тада сваки чвор има тачно једног претходника (родитеља), сем корена који нема ниједног. Сваки чвор има неколико следбеника (деце), а у случају да нема ниједног, зовемо га *лист*. У случају неусмереног стабла (без назначеног корена), лист представља сваки чвор степена 1.

У усмереном графу, за чвор v и грану e чији је излазни чвор v , компоненту од $T - e$ која садржи v називамо *подстаблом* чвора v . То је заправо стабло чији је корен v и његови чворови и гране су парцијално уређени и усмерени исто као што су и у T .

Ако је разапињући подграф графа G уједно и стабло, назива се *разапињуће стабло*. У случају неповезаног графа, унија разапињућих стабала је *разапињућа шума*.

Грана $e \in E$ је *мост* ако се њеним брисањем повећава број компоненти у графу. У стаблу је свака грана мост. Чвор чијим се брисањем постиже исто назива се *артикулациона тачка*. У случају мултиграфова, чвор са петљом је исто артикулациона тачка.



Слика 2.2. разапињуће стабло (наглашене гране), мост e и артикулациона тачка v

Уопштеније, *сепаратор* је skup $S \subseteq V$ чијим се брисањем повећава број компоненти графа. Кажемо да S *раздваја* (сепарира) G . S (UV -сепаратор) *раздваја* скупове чворова $U, W \subseteq V$ ако $U \setminus S$ и $W \setminus S$ леже у различитим компонентама графа $G - S$. За граф $G = (V, E)$ кажемо да је n -повезан ако је $G - W$ повезан за свако $W \subseteq V$ за које важи $|W| < n$. *Повезаност* графа G је највећи број $k \in \mathbb{N}$ такав да је G k -повезан и означавамо са $\kappa(G)$. $\kappa(G) \geq 1$ имплицира да је граф повезан, а $\kappa(G) = 0$ да није. *Локална повезаност* $\kappa_G(u, v)$ једнака је $|S| - 1$, где је $S \subseteq V$ skup минималне кардиналности такав да S раздваја u од v .

Менгера теорема нам даје везу између сепаратора и дисјунктних путева у графу.

Теорема 2.3.1. (Менгера теорема) Нека је $G = (V, E)$ граф и $U, W \subseteq V$. Тада је минималан број чворова који раздвајају U и V једнак максималном броју дисјунктних UV -путева.

Доказ. У скупу дисјунктних UV -путева, за сваки мора да постоји један чвор у сепаратору S , дакле, сепаратор има бар толико елемената колико има дисјунктних путева.

Да бисмо доказали и обрнуто, користимо индукцију над бројем грана $|E|$. За индуктивну базу, $|E| = 0$, сепаратор минималне величине је $S = U \cap W$, а исто тако постоји $U \cap W$ тривијалних дисјунктних UV -путева, сваки састављен од једног чвора.

Нека сада да граф G има бар једну грану $e = xy$ и нека је s минимална

величина сепаратора скупова U и W . Претпоставимо да постоји највише $l < s$ дисјунктних UW -путева. Тада и G/e (контракција e) садржи највише l дисјунктних $U'W'$ -путева, где се U', W' разликују респективно од U, W тиме да садрже v_e (контракована грана e) ако неки од чворова гране e припада U, W . На основну индуктивне хипотезе, постоји сепаратор $S' \subseteq G/e$ скупова U' и W' кардиналности највише l . Ако S' не би садржао v_e , био би уједно и сепаратор U и W у G , а $|S'| \leq l < s$, контрадикција. Дакле, $S = S' \setminus v_e \cup \{x, y\}$ је сепаратор скупова U и W у G , тј. $|S| \geq s$ и $l + 1 \geq |S| \geq s \geq l + 1$. Можемо конструисати $l + 1$ дисјунктних UW -путева. Посматрајмо $G - e$. Сваки US -сепаратор уједно је и UW сепаратор и тиме садржи бар s чворова. Одатле можемо да нађемо s US -путева и аналогно s SW -путева у $G - e$. Како је $|S| = s$ и ови путеви могу да се секу само унутар S , можемо их комбиновати у s UW -путева, што је контрадикторно са избором l . $\square$

3

Теорема о минору графа

3.1 Добар-квази-поредак

У овом поглављу представљамо добар-квази поредак, концепт везан за скупо-
ве са поретком. Преко њега ћемо моћи да покажемо једну од интерпретација
теореме о минору графа.

Дефиниција 3.1.1. (изоморфизам) Изоморфизам два графа G и H предста-
вља пресликавање $f : V(G) \rightarrow V(H)$ такво да је uv грана у $E(G)$ ако и само
ако је $f(u)f(v)$ грана у $E(H)$. У случају мултиграфова, бројеви вишеструких
грانا и петљи морају бити исти у оба графа. За два графа G и H кажемо да
су *изоморфна*, у ознаци $G \simeq H$, ако постоји изоморфизам између њих.

Обично када причамо о графу мислимо на класу свих изоморфних графо-
ва, не правимо разлику између два из исте класе. У нашем раду, међутим,
нећемо поистовећивати изоморфне графове и увек ћемо нагласити ако рела-
цију (минора) посматрамо до на изоморфизам.

Дефиниција 3.1.2. (својство графа) Својство графа (или инваријанта гра-
фа) представља функцију која за све изоморфне графове враћа исту вредност
(ред графа, максимални степен, број компоненти, бипартитивност...).

Дефиниција 3.1.3. (потподела) *Потподела* H графа G добија се подподелом
грانا графа G .

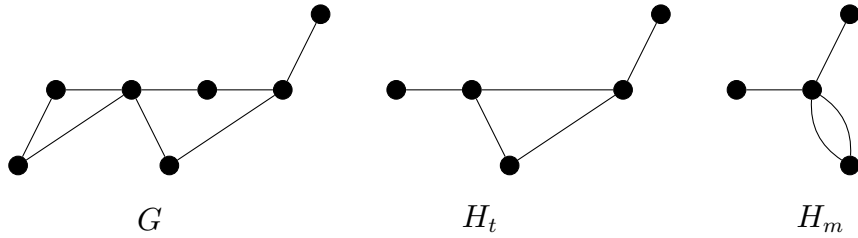
Дефиниција 3.1.4. (Тополошки минор) *Тополошки минор* H графа G добија
се брисањем чворова и грана и сажимањем чворова графа G . Кажемо да G
тополошки садржи H ако је H изоморфан тополошком минору графа G .

Дефиниција 3.1.5. (минор) *Минор* H граф G добија се брисањем чворова
и грана и контракцијом грана графа G . Ако H није изоморфан са G , тада је

прави минор графа G .

Релацију минора " H је изоморфан са G " означавамо са $H \lesssim G$ и кажемо да је $H \lesssim$ -минор графа G . G је H -слободан ако не садржи H као минор.

Сажимање чвора је исто што и контракција гране чији је један крајњи чвор степена 2, те је сваки тополошки минор уједно и минор, али не и обротно. Класа графова $\mathcal{G}$ је *затворена у односу на минор* ако за сваки граф у $\mathcal{G}$ садржи и све његове $\lesssim$ -миноре.



Слика 3.1. граф G , тополошки минор H_t и минор H_m

Дефиниција 3.1.6. (квази поредак) *Квази-поредак* $\leq$ је релација која је рефлексивна и транзитивна. Квази-поређан скуп $(X, \leq)$ је *добро-квази-поређан* и $\leq$ је добар-квази-поредак, ако за сваки бесконачан низ $x_0, x_1, x_2, \dots$ из X постоје индекси i, j такви да је $i < j$ и $x_i \leq x_j$. Такав пар (x_i, x_j) називамо *добрим*. Дobar низ је онај која садржи добар пар, а *лош* у супротном.

Тврђење 3.1.1. Квази-поредак $(X, \leq)$ је добар-квази-поредак ако и само ако X не садржи ни бесконачни антиланац ни бесконачно опадајући низ $x_0 > x_1 > \dots$

Доказ. $\Rightarrow$: Из дефиниције доброг-квази-поретка следи да X не може садржати ни бесконачан опадајући низ ни бесконачни антиланац, у супротном постоји бесконачни низ која не садржи добар пар.

$\Leftarrow$: Нека је $x_0, x_1, x_2, \dots$ бесконачан низ елемената из X и претпоставимо да је лош. Означимо са X_{x_0} скуп свих $x_i \in x_0, x_1, \dots$ тако да је $x_0 \geq x_i$. X_{x_0} не садржи ни бесконачан опадајући ланац ни бесконачан антиланац, те је X_{x_0} коначан скуп. Подниз $y_1, y_2, \dots$ низа $x_1, x_2, \dots$ који не садржи елементе из X_{x_0} има само елементе неупоредиве са x_0 . Посматрајмо максимални подниз $(y_0 = y_{i_0}), y_{i_1}, y_{i_2}, \dots$ од $y_1, y_2, \dots$ где је сваки индекс i_j најмањи могући тако да је $y_{i_0}, \dots, y_{i_{j-1}}, y_{i_j}$ антиланац. То значи да је и цео подниз антиланац и самим тим коначан. Ако је i_n највећи индекс у поднизу, тада је $\bigcup_{j=0}^n X_{y_{i_j}}$ као унија

коначно много коначних скупова исто коначан скуп, што је контрадикторно са почетном претпоставком да је $x_0, x_1, \dots$ бесконачан низ. $\square$

За низ $x_0, x_1, x_2, \dots$ квази-поретка $(X, \leq)$, елемент s_i је *терминал* ако не постоји s_j тако да је $i < j$ и $s_i \leq s_j$.

Лема 3.1.1. Ако је $(X, \leq)$ добар-квази-поредак, сваки бесконачан низ елемената из X садржи коначно много терминала, као и бесконачни растући низ.

Доказ. Бесконачно много терминала садржало би или бесконачни строго опадајући низ или бесконачни антиланац, контрадикторно услову да је X добар-квази поредак.

Дакле, за бесконачан низ $x_0, x_1, x_2, \dots$ постоји индекс j такав да сваки терминал овог низа има мањи индекс. Са циљем да направимо бесконачан растући низ $x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots$, изаберимо $i_0 \geq j$. Пошто не постоји терминал са индексом већим од j , можемо наћи i_1 тако да је $i_0 < i_1$ и $x_{i_0} \leq x_{i_1}$, затим i_2 тако да је $i_1 < i_2$ и $x_{i_1} \leq x_{i_2}$ и аналогно додајемо елемент по елемент на крају креирајући бесконачан растући низ $x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots$ $\square$

Лема 3.1.2. Ако су $(X, \leq_X)$ и $(Y, \leq_Y)$ добри-квази-поређани скупови, тада је и $(X \times Y, \leq)$ добар-квази-поредак за релацију $\leq$ дефинисану са:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_X y_2 \wedge y_1 \leq_Y y_2$$

Доказ. Нека је $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ бесконачан низ елемената из $X \times Y$. Како је X добро-квази-поређан, постоји бесконачан растући низ $x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots$, а како је и Y добро-квази-поређан, секвенца $y_{i_0}, y_{i_1}, y_{i_2}, \dots$ садржи пар (y_j, y_k) тако да је $j < k$ и $y_j \leq_Y y_k$. Самим тим нашли смо парове $(x_j, y_j), (x_k, y_k)$ тако да је $j < k$ и $(x_j, y_j) \leq (x_k, y_k)$. $\square$

За два коначна подскупа $A, B \subseteq X$, где је $(X, \leq)$ добар-квази-поредак, пишемо $A \leq B$ ако постоји инјективно пресликавање $f : A \rightarrow B$ тако да је $a \leq f(a)$ за свако $a \in A$. Тиме се у неком смислу својства $\leq$ преносе на квази-поредак скупа $[X]^{<\omega}$, скуп свих коначних подскупова скупа X .

Лема 3.1.3. Ако је $(X, \leq)$ добар-квази-поредак, онда је и $([X]^{<\omega}, \leq)$.

Доказ. Претпоставимо супротно, да $([X]^{<\omega}, \leq)$ није добар-квази-поредак, а $(X, \leq)$ јесте. То значи да постоји лош низ у $[X]^{<\omega}$, и почећемо са конструкцијом једног лошег низа $A_0, A_1, A_2, \dots$. За неко $n \in \mathbb{N}$, индуктивно претпоставимо да су $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ одређени тако да чине почетак неког лошег низа у $[X]^{<\omega}$ (индуктивна база је случај $n = 0$, празан низ је почетак лошег низа, која сигурно постоји у $[X]^{<\omega}$.) A_n бирамо тако да је $A_0, A_1, \dots, A_n$ почетак неког

лошег низа у $[X]^{<\omega}$ и $|A_n|$ је минимално. Овим поступком добија се бесконачан лош низ $A_0, A_1, A_2, \dots$.

За свако $n \in \mathbb{N}$ изаберемо неко $a_n \in A_n$ и дефинишемо $B_n = A_n \setminus \{a_n\}$. На основу Леме 3.1.1, низ $a_0, a_1, a_2, \dots$ садржи бесконачан растућу подниз $a_{i_0}, a_{i_1}, a_{i_2}, \dots$. Како је A_{i_0} минимизиран при избору за лош низ $A_0, A_1, A_2, \dots$, низ

$$A_0, \dots, A_{i_0-1}, B_{i_0}, B_{i_1}, B_{i_2} \dots$$

мора бити добар. $A_0, A_1, A_2, \dots$ је лош низ и $A_i \geq A_j \geq B_j$ за $i < j$, те добар пар у низу није облика (A_i, A_j) или (A_i, B_j) , већ (B_i, B_j) , $i < j$. Тада из $a_i \leq a_j$ следи $B_i \cup \{a_i\} \leq B_j \cup \{a_j\}$, то јест $A_i \leq A_j$, што је у контрадикцији са избором лоше секвенце $A_0, A_1, A_2, \dots$ $\square$

3.2 Теорема о минору графа

Теорема 3.2.1. (Робертсон-Симор) У свакој бесконачној секвенци коначних графова, постоје нека два тако да је један $\lesssim$ -минор другог.

Другим речима, релација $\lesssim$ -минор је добар-квази-поредак над скупом свих коначних графова. Како је сваки граф минор самог себе, и минор минора графа G је минор графа G , релација минора $\lesssim$ је квази-поредак. Бесконачан строго опадајући низ $\lesssim$ -минора не постоји, те је $\lesssim$ је добар-квази-поредак ако и само ако не постоји бесконачан антиланац.

За другачију интерпретацију ове теореме, увешћемо појмове везане за *искључене миноре*.

Дефиниција 3.2.1. (искључени минор) Граф H називамо *искљученим минором* из класе графова $\mathcal{G}$ ако не постоји граф у $\mathcal{G}$ који садржи H као $\lesssim$ -минор.

Лема 3.2.1. Класа $\mathcal{G}$ затворена у односу на минор може бити описана њеним искљученим минорима.

Најпростије је само узети све графове који нису у $\mathcal{G}$. Природно је дефинисати минималне елементе $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ овог скупа, то јест графови чији се прави минори не налазе у $\mathcal{G}$. Важи и супротно, дефинисањем скупа искључених минора $\mathcal{M}$, добијамо класу графова затворену у односу на минор, коју ћемо означавати са

$Forb(\mathcal{M})$.

На основу теореме о графу минора, следи да је довољно коначно много графова да би се описало својство које не подлеже операцији минора.

Последица 3.2.1. (Теореме 3.2.1.) Свака класа графова $\mathcal{G}$ затворена у односу на минор може се описати коначним скупом $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ (међусобно неупоредивих) искључених минора.

Доказ. Нека је $\mathcal{G}$ једнако $Forb(\mathcal{M})$. Такав скуп $\mathcal{M}$ постоји, могуће је узети све графове ван $\mathcal{G}$. Ако је $\mathcal{M}$ бесконачан скуп, тада према Теорему 3.2.1. и добром-квази-поретку следи да постоје два графа из $\mathcal{M}$ тако да је један минор другог. У том случају посматрамо само $\lesssim$ -минималне графове у $\mathcal{M}$ и добијамо коначан скуп $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ искључених минора.

Дефиниција 3.2.2. (планарни граф) Граф је планаран ако може бити нацртан у равни без пресецања.

Додавање петље или вишеструке гране не мења планарност графа. Такође, операција минора очувава планарност, то јест, ако је граф G планаран, тада је и сваки његов минор H . Класа свих планарних графова $\mathcal{P}$ је затворена у односу на минор.

Теорема 3.2.2. (Куратовски) Граф је планаран ако и само ако не садржи тополошки минор изоморфан комплетном графу K_5 или комплетном бипартитивном графу $K_{3,3}$.

Теорема 3.2.2. може се слично описати и минорима. Како K_5 и $K_{3,3}$ нису планарни и (не)планарност се очувава операцијом (тополошког) минора, планарни граф не може садржати K_5 или $K_{3,3}$ као (тополошки) минор. Сваки прави минор K_5 или $K_{3,3}$ је планаран, то јест, K_5 и $K_{3,3}$ су минимално непланарни. Сваки други непланарни граф мора садржати један од ова два као (тополошки) минор, па је заиста $\mathcal{K}_{\mathcal{G}} = \{K_5, K_{3,3}\}$.

Сада ћемо доказати Крускалову теорему, и техника коју презентујемо биће коришћена и у другим доказима везаним за миноре. На пример, концепт „минималног лошег низа” коришћен је доказу Леме 3.1.3.

Релација тополошког минора је исто врста уграђивања графа у граф, то јест, тополошки минор H графа G можемо уградити у граф G , нацртати над

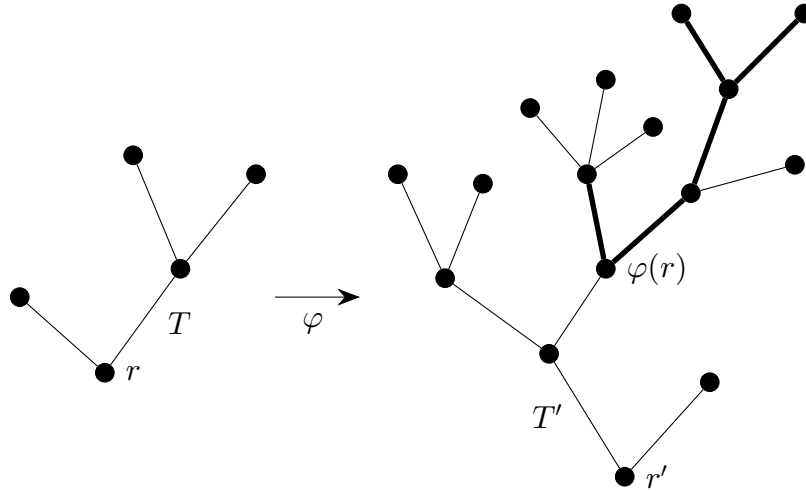
графом G тако да се сви чворови из $V(H)$ налазе над неким чворовима из $V(G)$, а гране из $E(H)$ „развучемо” над путевима графа G . Дефинисаћемо уграђивање између два стабла, које ојачава услов уграђености релацијом тополошког минора. Посматрајмо два стабла T и T' и њихове корене r и r' . Пишемо $T \leq T'$ ако постоји изоморфизам φ из неке потподеле T у подстабло T' стабла T' које очувава поредак над $V(T)$ у односу на r . (ако је $x <_T y$ онда је и $\varphi(x) <_{T'} \varphi(y)$)

Још један концепт који ће нам бити потребан овде, а и кључан је за теорему о минору графа, јесте уграђивање.

Теорема 3.2.3. (Крускалова теорема) Коначна стабла су добро-квази-уређена релацијом тополошког минора.

Доказ. Показаћемо да су укореењена стабла добро-квази-поређана релацијом $\leq$ дефинисаном горе, што имплицира Теорему 3.2.3.

Претпоставимо супротно. Да бисмо добили контрадикцију користићемо исти метод као и за Лему 3.1.3. Нека је $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$ низ укореењених стабала тако да постоји лош низ који почиње овим низом. Изаберимо T_n минималног реда тако да је $T_0, T_1, \dots, T_n$ почетак неког лошег низа. Нека је r_n корен T_n за свако $n \in \mathbb{N}$. Овим поступком добијамо да је $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ лош низ.



Слика 3.2. уграђивање T у T' за које је $T \leq T'$

За свако $n \in \mathbb{N}$, нека A_n представља скуп компоненти у $T_n - r_n$, које су укореењена стабла са суседима чвора r_n изабраним за њихове корене. Поредак над овим стабалима је индуован поретком над T_n . Докажимо да је скуп $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ добро-квази-поређан.

Нека је $(T^k)_{k \in \mathbf{N}}$ низ стабала из A . За свако $k \in \mathbf{N}$ изаберемо $f(k)$ тако да $T^k \in A_{f(k)}$. Фиксирајмо k са најмањим $f(k)$. Тада је

$$T_0, \dots, T_{f(k)-1}, T^k, T^{k+1}, \dots$$

добар низ, на основу минималног избора $T_{f(k)}$ и $T^k \subsetneq T_{f(k)}$, то јест, T^k је мањег реда од $T_{f(k)}$. Нека је (T, T') добар пар. $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ је лош низ и ако је T међу првих $f(k)$ чланова $T_0, \dots, T_{f(k)-1}$, (T, T_i) не може бити добар пар ни за једно $i \leq f(k) - 1$, те мора бити $T' = T^i$ за неко $i \geq k$:

$$T \leq T' = T^i \leq T_{f(i)},$$

а како је $f(k) \leq f(i)$ на основу узбора k , $(T, T_{f(i)})$ би био добар пар у лошем низу $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Дакле T није у низу $T_0, \dots, T_{f(k)-1}$ него у $T^k, T^{k+1}, \dots$, па је (T, T') заправо и добар пар у $(T^k)_{k \in \mathbf{N}}$. Дакле, A је добро-квази-поређан.

На основу Леме 3.1.3, $[A]^{<\omega}$ је добар-квази-поредак, то јест, низ $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ($A_n \in [A]^{<\omega}, \forall n \in \mathbf{N}$) садржи добар пар (A_i, A_j) , $i < j$. $A_i \leq_\omega A_j$ значи да свако стабло T из A_i може бити уграђено у (различито) стабло T' из A_j . Ако пресликавање проширимо тако да је $\varphi(r_i) = r_j$, онда се T_i уграђује у T_j , дакле $T_i \leq T_j$, што је у контрадикцији са конструкцијом лошег низа $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$. $\square$

4

Стабла декомпозиције

У претходном поглављу стекли смо осећај да је нека својства графова лакше прво посматрати на простијим структурама, конкретно стаблима, а онда их генерализовати на све графове. То нас мотивише да поставимо питање у којој мери је неко својство могуће пренети на граф који није стабло, али је попут стабла у неком смислу. Тај смисао ће зависити од својства које посматрамо и примене. У овом поглављу се бавимо концептом сличности са стаблима који омогућује генерализацију својстава (попут Крускалове теореме) и игра кључну улогу у теореме о минору графа. Уводимо појмове стабла декомпозиције и ширине стабла, а касније и клика-сума графове и парцијална k -стабла.

4.1 Стабла декомпозиције

Сада ћемо увести концепт стабала декомпозиције, као и нека основна тврђења која важе за њих.

Дефиниција 4.1.1. Нека је G граф, T стабло и $\mathcal{V} = (V_t)_{t \in T}$ фамилија скупова чворова $V_t \subseteq V(G)$ индексираних чворовима t стабла T . *Стабло декомпозиције* је пар $(T, \mathcal{V})$ за који важе услови:

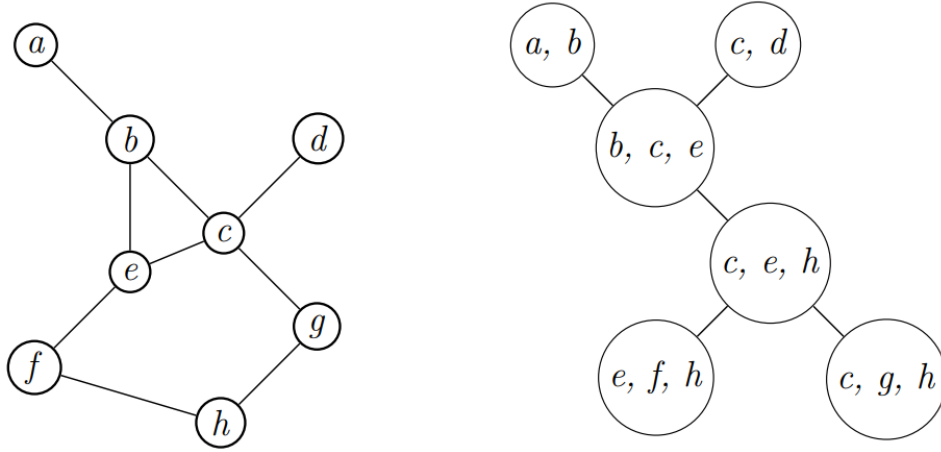
$$(T1) \quad V(G) = \bigcup_{t \in T} V_t$$

(T2) за сваку грану $e \in E(G)$, постоји $t \in T$ тако да се оба чвора гране e налазе у V_t

$$(T3) \quad V_{t_1} \cap V_{t_3} \subseteq V_{t_2} \text{ за } t_1, t_2, t_3 \in T, \text{ када год } t_2 \in T^{t_1 t_3}.$$

Услови (T1) и (T2) нам кажу да је G унија подграфова $G[V_t]$. Скупове V_t и њихове индуковане подграфове $G[V_t]$ називамо *деловима*, а за $(T, \mathcal{V})$ кажемо да је стабло декомпозиције графа G на те делове. Услов (T3) имплицира да

су делови декомпозиције $(T, \mathcal{V})$ уређени отприлике као стабло.

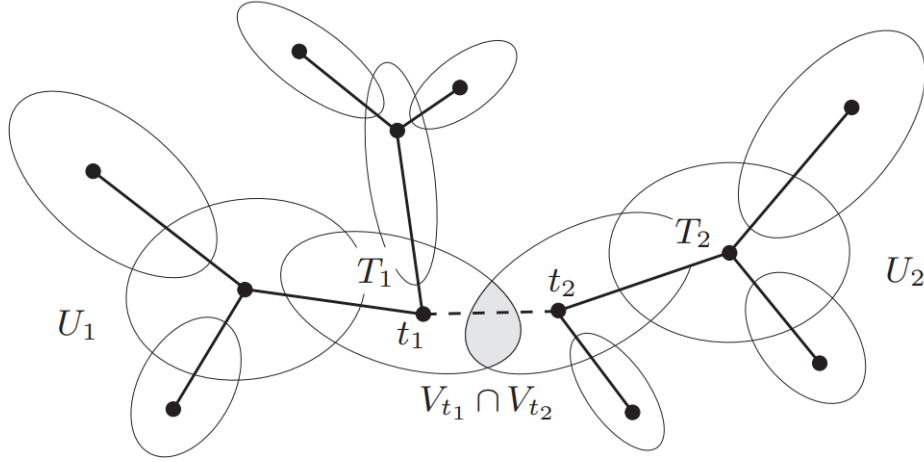


Слика 4.1. граф G и стабло декомпозиције ширине 2

Дефиниција 4.1.2. *Ширина* стабла декомпозиције је $\max_{t \in V(T)} (|V_t| - 1)$.

Ширина стабла $tw(G)$ графа G је минимална ширина по свим стаблима декомпозиције графа G . Декомпозиција може да се посматра и као унија подстабала, на основу (ТЗ). Једно од најважнијих својстава стабла декомпозиције је да преноси сепараторска својства стабла на граф:

Лема 4.1.1. Нека је $t_1 t_2$ грана у T и нека су T_1, T_2 компоненте од $T - t_1 t_2$, тако да $t_1 \in T_1$ и $t_2 \in T_2$. Онда је $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ сепаратор, то јест, раздваја $U_1 = \bigcup_{t \in T_1} V_t$ од $U_2 = \bigcup_{t \in T_2} V_t$ у графу G .



Слика 4.2. $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ раздваја U_1 од U_2 у G

Доказ. Како се t_1 и t_2 налазе на путу $T^{tt'}$ за свако $t \in T_1$ и $t' \in T_2$, на основу (Т3) имамо да је $U_1 \cap U_2 \subseteq V_{t_1} \cap V_{t_2}$. Стога довољно је показати да не постоји грана uv из G тако да $u_1 \in U_1 \setminus U_2$ и $u_2 \in U_2 \setminus U_1$. У случају да постоји, из (Т2) би следило да постоји $t \in T$ тако да $u_1, u_2 \in V_t$. Због избора u_1 и u_2 , $t \notin T_2$ и $t \notin T_1$, дакле, контрадикција. $\square$

Кажемо да је сепарација $\{U_1, U_2\}$ графа G индукована граном t_1t_2 стабла T , или декомпозицијом $(T, \mathcal{V})$. Сепаратор $U_1 \cap U_2 = V_{t_1} \cap V_{t_2}$ називамо *адхезионим скупом* од V_{t_1} и V_{t_2} . *Адхезија* стабла декомпозиције је максимална величина адхезионих скупова. *Торзои* стабла декомпозиције су суперграфови делова $G[V_t]$ добијеним употпуњавањем њихових адхезионих скупова до комплетних. Прецизније, додавањем сваке гране ван G чији се чворови налазе у заједничком адхезионим скупу $V_t \cap V_{t'}$ за $tt' \in E(T)$.

Лема 4.1.2. За $H \subseteq G$, $(T, V_t \cap V(H))_{t \in T}$ је стабло декомпозиције графа H .

Лема 4.1.3. Сваки скуп чворова који није садржан у неком делу $(T, \mathcal{V})$ садржи два чвора који су раздвојени адхезионим скупом од $(T, \mathcal{V})$.

Доказ. Нека је $W \subseteq V(G)$ скуп чворова. Од T ћемо направити усмерено стабло на следећи начин. За сваку грану $t_1t_2 \in T$, дефинишемо U_1, U_2 као у Леми 4.1.1, тада $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ сепарира U_1 од U_2 . Ако не постоје два чвора из W које $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ раздваја, можемо наћи $i \in \{1, 2\}$ тако да је $W \subseteq U_i$ и усмеримо грану t_1t_2 ка t_i .

Нека је t последњи чвор у најдужем усмереном путу у стаблу T , тада су све гране које садрже чвор t усмерене ка t . За произвољно $w \in W$, изаберимо

$t' \in T$ тако да $w \in V_{t'}$. Ако је $t' \neq t$, тада грана e која садржи t и раздваја t' и t у T мора бити усмерена ка t , па се w налази у $V_{t'}$ за неко t'' из компоненте $T - e$ која садржи t . Онда, на основу (ТЗ), следи да $w \in V_t$, а одатле и да је $W \subseteq V_t$. $\square$

Последица 4.1.1. Сваки комплетни подграф (клика) садржан је у неком делу $(T, \mathcal{V})$.

Могли смо и другачије да докажемо ову последицу. Посматрајмо неку клику C . За сваку њену грану $e = (u, v)$, на основу (Т2), постоји део који садржи оба чвора. Раније смо констатовали да скуп делова који садрже исти чвор чини подстабло од T , те ако са T_v означимо подстабло које чине сви делови који садрже чвор v , онда свака два подстабла T_u и T_v за грану (u, v) клике C имају пресек. На основу Хелијеве теореме за стабла, која каже да ако се свака два подстабла из неког подскупа секу, онда постоји и пресек свих стабала из тог скупа, добијамо да постоји део који садржи све чворове и гране клике C . $\square$

Ширина стабла је инваријанта графа, и даје информације о структури графа и њеној сличношћу са стаблима. Интуитивно, што је мања ширина стабла, оригиналан граф је ближи стаблу по структури. Стабла и шуме имају ширину стабла 1, а комплетан граф K_n има ширину стабла $n - 1$.

Дефиниција 4.1.3. (серијско-паралелни граф) *Серијско-паралелни граф* је сваки граф који може да се добије од једне гране секвенцом операција потподеле или додавања паралелних грана на већ постојећу грану. (додавање паралелних грана на грану (u, v) подразумева да се додају још две гране са истим тим чворовима, дакле, у питању је мултиграф.

Еквивалентна дефиниција, то јест, конструкција серијско-паралелних графова била би:

- *Двотерминални граф* је граф $G(s, t)$ са два специјална чвора s и t које зовемо *извор* и *излаз*.
- *Серијска композиција* је операција спајања два двотерминална графа $G(s_1, t_1), H(s_2, t_2)$ у двотерминални граф $\Gamma(s_1, t_2)$, тако што се дода грана (t_1, s_2) .
- *Паралелна композиција* је операција спајања два двотерминална графа $G(s_1, t_1), H(s_2, t_2)$ у двотерминални граф $\Gamma(s, t)$, тако што се чворови s_1 и s_2 споје у чвор s (суседи чворова s_1 и s_2 постану суседи чвора s), а t_1 и t_2 се споје у t .

- *Двоштерминални серијско паралелни граф* је граф који се добија секвенцом серијских и паралелних композиција почевши са скупом неколико графова K_2 који имају назначене изворе и излазе.
- Граф је *серијско-паралелни* ако за неки одабир два чвора да буду извор и излаз постаје двотерминални серијско-паралелни граф.

Лема 4.1.4. Серијско-паралелни граф има ширину стабла највише 2.

Доказ. Почнимо од графа K_2 који има ширину стабла 1. На основу прве дефиниције, додавање паралелних грана, тј додавање мултиграна не повећава ширину стабла. У случају потподеле неке гране (u, v) новим чвором w , стабло декомпозиције $(T, \mathcal{V})$ може се проширити новим делом $\{u, v, w\}$ који спојимо са делом који садржи грану (u, v) . $\square$

На основу Леме 4.1.2, подграф H графа G увек има не већу ширину стабла од графа G . Исто ће важити и када је H минор:

Лема 4.1.5. Ако је H минор графа G , онда је $tw(H) \leq tw(G)$.

Доказ. Очито брисање гране или чвора не повећава ширину стабла. Посматрајмо како се мења ширина стабла при контракцији неке гране. Нека је $(T, \mathcal{V})$ декомпозиција графа G и нека је $e = (u, v)$ контрахована грана у чвор w . Тврдимо да за $V'_t = V_t \setminus \{u, v\} \cup \{w\}$ (ако неки део садржи u или v , избацимо их и заменимо са w), пар $(T', \mathcal{V}' = (V'_t)_{t \in T})$ чини стабло декомпозиције графа $G' = G/e$. Проверимо редом сва три својства. Што се тиче (Т1), сваки чвор из $E(G) \setminus \{u, v\}$ остаје у деловима у којима је и био, а чвор w се налази у деловима у којима су раније били u и v , те се сваки чвор графа G' налази у неком делу. Да бисмо проверили (Т2), разликујемо три случаја за грану $(a, b) \in E(G')$:

- $a, b \neq w$, тада $(a, b) \in E(G)$ исто, дакле постоји t тако да $\{a, b\} \subseteq V_t$, а самим тим и $\{a, b\} \subseteq V'_t$.
- $(a, b) = (w, b)$ (аналогно случај $(a, b) = (a, w)$), што значи да је чвор b у графу G био повезан са u или v , без умањења општости, рецимо са u . Онда постоји t тако да $\{u, b\} \subseteq V_t$, то јест, $\{w, b\} \subseteq V'_t$ за одговарајућу грану (w, b) у графу G' .
- $a = b = w$, у овом случају грана a, b се контрахује и не постоји у G' .

Да би важио услов (Т3), за сваки чвор из G' скуп делова који га садрже треба да чини подстабло од T' . То важи за сваки чвор из $E(G) \setminus \{u, v\}$, пошто они не мењају делове декомпозиције у којима се налазе. Услов (Т2) декомпозиције

$(T, \mathcal{V})$ и постојање гране (u, v) у графу G гарантују да подстабла T_u и T_v , сачињена од делова који садрже респективно u и v , имају заједнички пресек. Подстабло T'_w у стаблу T' сачињено од делова са чвором w добија се као унија T_u и T_v , што ће исто бити подстабло због постојања пресека. Дакле, (ТЗ) важи за сваки чвор из G' . $\square$

Следеће две леме дају просту али корисну горњу границу, говоре нам да ширина стабла у најгорем случају расте линеарно са додавањем чворова или грана.

Лема 4.1.6. Нека је $G = (V, E)$ граф и $W \subseteq V$ подскуп чворова. Тада је $tw(G) \leq tw(G - W) + |W|$.

Доказ. Ако је $(T, \mathcal{V})$ стабло декомпозиције графа $G - W$ ширине k , онда је $(T, \mathcal{W})$ са деловима $W_t = V_t \cup W$, $t \in T$, декомпозиција графа G ширине највише $k + |W|$.

Лема 4.1.7. Нека је $G = (V, E)$ и $F \subseteq E$ подскуп грана. Тада је $tw(G) \leq tw(G - F) + |F|$.

Доказ. Нека је W скуп минималне кардиналности тако да свака грана из скупа F има бар један крајњи чвор у W . Очигледно је $|W| \leq |F|$, а како је $G - W$ подграф од $G - F$, следи $tw(G - W) \leq tw(G - F)$. Сада, на основу Леме 4.1.6, имамо $tw(G) \leq tw(G - W) + |W| \leq tw(G - F) + |W| \leq tw(G - F) + |F|$. $\square$

На основу Последице 4.1.1, имамо и доње ограничење за ширину стабла, преко величине максималне клике: $tw(G) \geq \omega(G) - 1$.

У наставку ћемо се бавити другим репрезентацијама стабла декомпозиције, које у зависности од проблема који решавамо, могу бити практичније.

4.2 Клика-сума граф

Видели смо да стабло декомпозиције $(T, \mathcal{V})$ даје одређене информације о сепарационим својствима графа G . За грану (t_1, t_2) , знамо да је $S = V_{t_1} \cap V_{t_2}$ сепаратор скупова U_{t_1} и U_{t_2} у графу G . Онда G можемо посматрати као два подграфа индукована скуповима U_{t_1} и U_{t_2} који су спојени преко скупа S . Генерално, граф G се састоји од тих подграфова који су међусобно спојени сепараторима. Овај концепт прецизирамо увођењем клика-сума.

Дефиниција 4.2.1. k -клика графа G је клика реда k .

Дефиниција 4.2.2. Нека су G_1, G_2 графови и C_1, C_2 k -клике у њима. Граф G је k -клика сума графова G_1 и G_2 ако се G може добити од G_1 и G_2 поклапањем

чворова из C_1 и C_2 (k чворова из C_1 поклопимо са по једним (различитим) чвором из C_2 и чвор који је настао поклапањем v_1 из C_1 и v_2 из C_2 сада има све суседе које су имали v_1 и v_2) и брисањем неколико (потенцијално нула) грана из нове клике реда k . Кажемо да је G добијен лепљењем графова G_1 и G_2 преко C_1 и C_2 , или да је клика-сума реда k .

Лема 4.2.1. Ако оба графа G_1 и G_2 имају ширину стабла највише k , онда сваки граф који је клика-сума графова G_1 и G_2 реда највише k исто има ширину стабла највише k .

Доказ. Нека су C_1, C_2 k -клике графова G_1, G_2 и нека је G k -клика-сума G_1 и G_2 у којој није обрисана ниједна грана. Ако су $(T_1, \mathcal{V}_1), (T_2, \mathcal{V}_2)$ стабла декомпозиције графова G_1, G_2 , на основу Последице 4.1.1. знамо да постоје делови $V_1 \in \mathcal{V}_1, V_2 \in \mathcal{V}_2$ у којима су садржане клике C_1, C_2 . Комбиновањем две декомпозиције тако што се дода грана између делова V_1 и V_2 , $(T = T_1 \cup T_2 \cup \{V_1, V_2\}, \mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)$ чини стабло декомпозиције графа G , ширине не веће од ширина декомпозиција графова G_1 и G_2 . $\square$

Лема 4.2.2. Нека је G граф ширине стабла k . Онда граф G може бити добијен као клика-сума графова реда највише $k + 1$.

Доказ. Посматрајмо неко стабло декомпозиције $(T, \mathcal{V})$ графа G . Нека је $H_t = G[V_t]$ подграф индукован чворовима из дела V_t за свако $t \in T$. Сваки подграф H_t , као и део V_t , кардиналности је највише $k + 1$, те граф G можемо добити редом спајањем подграфова H_i, H_j у клика суму реда највише k . $\square$

На пример, граф са слике 4.1. може се конструисати операцијама клика-сума реда највише 2 над графовима индукованим деловима декомпозиције, који су кардиналности највише 3.

4.3 Парцијална k -стабла

Парцијална k -стабла су еквивалент графова са ширином стабла највише k . Многи комбинаторни проблеми, када се ограниче на парцијална k -стабла, могу бити решени у полиномијалној сложености за ограничено k .

Дефиниција 4.3.1. (k -стабло) k -стабла дефинишемо рекурзивно:

- Комплетан граф K_k је k -стабло.
- Ако се k -стаблу H реда n дода чвор да буде сусед са k међусобно повезаних чворова из H (дакле они чине k -клику у H), добија се k -стабло G реда $n + 1$.

Теорема 4.3.1. Нека је $G = (V, E)$ граф. Следећи описи су еквивалентни:

- Граф G је k -стабло.
- G је повезан, садржи k -клику, али не и $(k+2)$ -клику и сваки минимални сепаратор пута у графу G је k -клика.
- G је повезан, $|E| = k|V| - \frac{k(k-1)}{2}$ и сваки минимални сепаратор графа G је k -клика.
- G садржи k -клику, али не и $(k+2)$ -клику, сваки минимални сепаратор пута је k -клика и за свака два чвора $u, v \in V$ постоји тачно k дијсунктних путева између њих.

Дефиниција 4.3.2. Парцијално k -стабло је подграф k -стабла.

Лема 4.3.1. За k стабло G и свака два његова чвора u, v , сваки њихов минимални сепаратор је уједно и минимални сепаратор графа G .

Доказ. Нека је S_{uw} минимални uw -сепаратор. На основу Теореме 4.3.1, S_{uw} је k -клика. Претпоставимо да S_{uw} није минимални сепаратор графа G , већ неко S . Тада је $|S| < |S_{uw}| = k$. S је сепаратор графа G , те је за нека два чвора v_1, v_2 такође v_1v_2 -сепаратор, то јест, $k = |S_{v_1v_2}| = |S| < |S_{uw}| = k$, контрадикција. $\square$

Теорема 4.3.2. Графа G је парцијално k -стабло ако и само ако има ширину стабла највише k .

Доказ. $\Rightarrow$: Желимо доказати да свако парцијално k -стабло има ширину стабла највише k , то јест, да заправо свако k -стабло има ширину стабла највише k , с обзиром на то да парцијално k -стабло као подграф k -стабла нема већу ширину стабла од њега. Радимо индукцију по броју чворова графа G . Базни случај, $G = K_k$, стабло декомпозиције које има један део и у њему свих k чворова, има ширину k . Претпоставимо сада да граф H реда n , који је k -стабло, има ширину стабла највише k и нека додајемо чвор v тако да је нови граф G исто k -стабло. Ако је $(T, \mathcal{V})$ декомпозиција графа H ширине највише k , на основу Последице 4.1.1. постоји $t \in T$ тако да k -клика C коју образују суседи чвора v припада делу V_t . Ако декомпозицији $(T, \mathcal{V})$ додамо нови део $V_{|T|+1}$ који садржи чворове из клике C и чвор v и повежемо га са делом V_t , $(T \cup \{|T|+1\}, \mathcal{V} \cup V_{|T|+1})$ представља стабло декомпозиције графа G ширине највише k .

$\Leftarrow$: Сада доказујемо да је сваки граф са ширином стабла највише k , заправо k -стабло. k -стабло реда k или $k+1$ је комплетан граф K_k или K_{k+1} , који свакако имају ширину стабла не већу од k , те посматрајмо граф $G = (V, E)$

реда бар $k + 2$. Ако докажемо да за стабло декомпозиције $(T, \mathcal{V})$ ширине највише k постоји k -стабло $H = (V, F)$ тако да је, за свако $t \in T$, индуковани подграф $G[V_t]$ подграф неке $(k + 1)$ -клике од H , завршили смо посао. Опет користимо индукцију по броју чворова графа G . База су нам случајеви $|V| = k$ и $|V| = k + 1$. За индуктивни корак, посматрајмо неки лист l стабла T , и нека је V_r једини сусед делу V_l . Ако је $V_l \subseteq V_r$, можемо избацити V_l из декомпозиције и поновити процес све док не нађемо l такво да није $V_l \subseteq V_r$. Нека $v \in V_l - V_r$. Претпоставимо, на основу индуктивне хипотезе над графом $G - \{v\}$, да његова декомпозиција $(T, \mathcal{V}' = \bigcup_{t \in T} (V_t - \{v\}))$ даје k -стабло H' . Како $v \notin X_r$, сви суседи чвора v морају бити у делу X_l , те они формирају подскуп k -клике C у графу G , тако да можемо додати v и гране од v до свих чворова из C у граф H' и добићемо k -стабло H . $\square$

На основу претходне теореме и конструкције k -стабла, сваки граф G ширине стабла највише k садржи чвор степена највише k (нпр. последњи чвор додат при прављењу k -стабла чији је G подграф).

4.4 Теорема о минору графа

Узимајући у обзир обимност доказа ове теореме о графу минора, у кратким цртама ћемо представити кључне кораке и осликати значај стабала декомпозиције:

1. Добар-квази-поредак над графовима ограничене ширине стабла

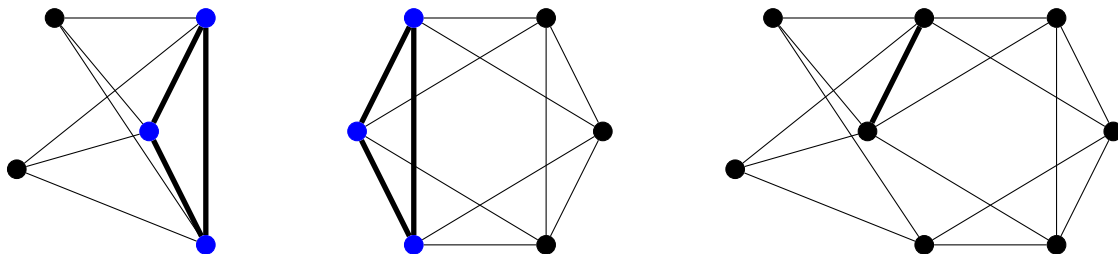
- Фиксирамо индуктивно константу k . Нека је $\mathcal{G}_k$ скуп свих коначних графова ширине стабла највише k .
- Сваки граф из $\mathcal{G}_k$ представимо као стабло користећи декомпозицију, чије су величине кеса ограничене одозго са k и сваку кеси означимо неким информацијама, које сугеришу својства попут величине кесе, повезаности чворова у кеси ...
- (Крускалова теорема) Операција тополошког минора чини добар-квази-поредак над скупом коначних стабала.
Доказали смо је у претходном поглављу. Генерализација Крускалове теореме на скуп означених стабала где постоји добар-квази-поредак над ознакама даће нам жељени резултат, добар-квази-поредак над стаблима декомпозиције, а самим тим и над графовима са ширином стабла највише k .

2. Теорема о искљученим минорима и теорема о структури графа

- (Теорема о искљученим минорима) За сваку коначну класу графова $\mathcal{G}$ постоји коначан скуп $\mathcal{K}_{\mathcal{G}}$ искључених (често другачије речено, забрањених) минора.
- (Теорема о структури графа) Интуитивно, да би граф G великог реда био H -слободан, мора да постоји неки разлог. Ова теорема нуди одговор у виду описа структуре графа: или је G локално превише редак да би садржао H , или је тополошки уградив на површину која је превише проста да би на њу могао да се угради граф H . Уграђивање графа је цртање истог на некој површини (на пример раван или сфера) тако да се поштују одређена тополошка правила. Дакле, гране графа представљају криве које се секу само у крајњим тачкама.

3. Клика-сума декомпозиција и добар-квази поредак

- Докаже се добар-квази-поредак над „скоро уградивим” графовима користећи стала декомпозиције и уграђивање на површинама.
- (Клика-сума граф) Клика-сума граф је граф који се добија комбинацијом два графа спајањем у заједничкој клици. Прецизније, у оба графа се уочи клика исте величине, рецимо k , и нови граф се добија тако што се чворови те две клике споје у k чворова нове клике, гране које су спајале чвор из клике са чвором ван клике сада спајају чвор нове клике са чвором ван клике а гране између два чвора клике се у зависности од одређених услова бришу или додају. Такав граф се специфично назива k -клика-сума граф.

Слика 4.3. граф G , граф H и 3-клика-сума графова G и H

- Затим се покаже да се добар-квази-поредак одржава под операцијом добијања клика-сума-графа, индукцијом по одређеним параметрима (ширина стабла, комплексност графова уграђиваних на површинама) - са базног случаја графова ограничене ширине стабла прелази се на комплексније графове користећи операцију добијања клика-сума графа.

4. Конвертовање графова у структуре налик стаблима

- Графови се кодирају користећи коначан алфабет и означена стабла (свака кеса представља неки карактер), а затим се применом Крускалове теореме и Хигманове леме (ове две тврдње заједно генерализују горенаведену Крускалову теорему на стабла са додељеним алфабетом над којим важи добар-квази поредак). Хигманова лема заправо тврди да је скуп свих коначних речи у коначном алфабету парцијално уређеном релацијом подсеквенце, заправо добар-квази-поредак. Применом свих корака уназад добијамо добар-квази-поредак над релацијом минора.

4.5 Теорема о искљученим минорима

У поглављу 3.2. видели смо да када желимо описати све графове са неким својством, то јест, описати све графове који немају то својство, то постижемо скупом графова који не смеју да се појављују као минори. Прецизније, видели смо у Последици 3.2.1. да свака класа затворена у односу на минор може бити описана скупом искључених минора, а дефинисањем скупа искључених минора $\mathcal{M}$ добијамо затворену класу $Forb(\mathcal{M})$.

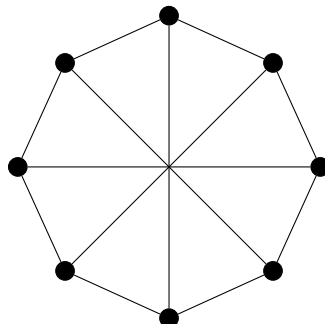
Занима нас ако искључимо неки минор H , како то утиче на структуру у $Forb(H)$? На пример, споменули смо раније да искључивањем $K_{3,3}$ и K_5 добијамо планарне графове.

Теорема 4.5.1. Граф G припада $Forb(K_{3,3})$ ако и само ако може бити представљен као клика-сума реда највише 2 планарних графова и (неколико) K_5 .

Теорема 4.5.2. Граф G припада $Forb(K_5)$ ако и само ако може бити представљен као клика-сума реда највише 3 планарних графова и подграфа Вагнеровог графа V_8 .

Доказ $\Leftarrow$ смера није тежак: Планарни графови и V_8 не садрже минор K_5 , а клика-сума реда највише 3 графова који немају K_5 минор исто не садржи

минор K_5 .



Слика 4.4. Вагнеров граф V_8

Дефиниција 4.5.1. (апекс граф) Граф који брисањем једног чвора постаје планаран назива се *апекс*.

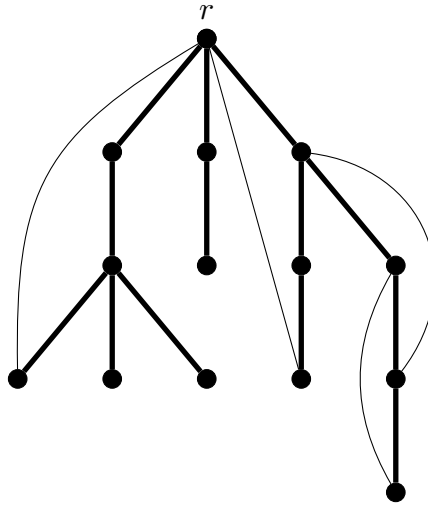
Дефиниција 4.5.2. (хроматски број) *Хроматски број* графа G је минималан природан број $\chi(G)$ за који чворови графа могу бити обојени тако да свака два суседна чвора буду различите боје.

Генерално, још увек нема графова H са више од петнаестак грана чији су $Forb(H)$ потпуно окарактерисани. Теорема о структури графа, коју смо споменули у поглављу 3.2. у опису доказа теореме о минору графа, апроксимира структуру H -слободног графа у општем случају. Добијене су апроксимације у још неким случајевима. На пример, доказано је да је довољно велики 6-повезан граф K_6 -слободан ако и само ако је апекс граф.

Хипотеза 4.5.1. (Хадвигерова хипотеза) Граф G је K_n -слободан ако и само ако је $\chi(G) < n$.

Хипотеза представља уопштење теореме 4 боје, а доказана је за $n \leq 6$.

Теорема 4.5.3. Нека је $k \geq 3$ фиксирано. Сваки граф $G = (V, E)$ без циклуса дужине k или више као минор, има ширину стабла највише $k - 2$.



Слика 4.5. DFS стабло и повратне гране(танке)

Доказ. Посматрајмо *DFS*-стабло T укоренењено у чвору r . Гране графа G ван стабла T , твз. *повратне гране*, спајају два чвора u и v тако да $u \in T^{rv}$. Нека $p(v)$ представља родитеља чвора v у стаблу T . За свако $v \in T$, дефинишимо низ $p_0(v), p_1(v), \dots, p_{k-2}(v)$ на следећи начин:

$$p_0(v) = v, \quad p_i(v) = p(p_{i-1}(v)), \text{ за } i = 1, 2, \dots, k-2,$$

и $p_0(r) = r$. Тврдимо да је $(T, \mathcal{V})$, за $V_t = \{p_0(t), p_1(t), \dots, p_{k-2}(t)\}$, $t \in T$ задовољавајуће стабо декомпозиције. (T1) важи јер $t \in V_t$ за свако $t \in V$. Како у графу G не постоји циклус дужине бар k , свака повратна грана спаја нека два чвора u, v тако да је дужина пута T^{uv} највише $k-2$, то јест, постоји $t \in T$ тако да $u, v \in V_t$. Дакле, (T2) је исто испуњен. Ако за свако $v \in V$, са W_v означимо скуп свих чворова w тако да је $p_{k-2}(w) = v$, онда v припада свим деловима V_t тако да t формирају неко (неукорењено) подстабло стабла T чији су листови из скупа W , те је испуњен и услов T3. Ширина стабла декомпозиције $(T, \mathcal{V})$ износи $k-2$, те је и ширина стабла графа G највише $k-2$. $\square$

5

Алгоритамске импликације и примене

Серија радова *Минори графова* Робертсона и Симора имала је велики утицај на алгоритме графова, како у теоријском делу, тако и у практичном. Доказали су да постоји алгоритам који у полиномијалном времену одређује да ли дати граф G садржи фиксирани граф H као минор. Како свака класа затворена операцијом минора може бити описана коначним скупом забрањених минора, постоји алгоритам који у полиномијалном времену одређује да ли граф припада некој класи. Видећемо и како се стабла декомпозиције користе при решавању НП-проблема у полиномијалном времену за графове са ограниченом ширином стабла.

5.1 Израчунавање ширине стабла

У општем случају, налажење ширине стабла графа G представља НП-комплетан проблем. Ако проверавамо да ли је ширина стабла највише k за неко фиксирано k , то постаје једноставнији проблем:

Теорема 5.1.1. Нека је k фиксиран број. Постоји алгоритам који за улаз узима граф G и за излаз даје или стабло декомпозиције ширине k или информацију да је $tw(G) > k$ у временској сложености $\mathcal{O}(|V(G)|)$.

Алгоритам рекурзивно своди проблем на мањи граф. У свако кораку, граф се редукује или контракцијом грана из неког максималног упаривања или брисањем неких чворова.

Теорема 5.1.2. Нека је k фиксиран број. Постоји алгоритам који за улаз узима граф G и за излаз даје или стабло декомпозиције ширине k или подграф H графа G тако да је $tw(H) > k$ и декомпозицију подграфа H ширине највише $2k$.

Теорема 5.1.3. Постоји алгоритам и полином p тако да за било који граф $G = (V, E)$, алгоритам рачуна стабло декомпозиције ширине $k = tw(G)$ у временској сложености $\mathcal{O}(2^{p(k)}|V|)$.

5.2 Проблем k дисјунктних путева

При решавању проблема да ли граф G садржи фиксирани граф H као минор, проблем k дисјунктних путева показао се уско повезаним и још у серији радова *Минори графова* дат је алгоритам у сложености $\mathcal{O}(|V(G)|^3)$. Касније је оптимизован у $\mathcal{O}(|V(G)|^2)$, а за планарне графове и графове са ограниченом ширином стабла постоје алгоритми линеарне сложености.

Дефиниција 5.2.1. (проблем k дисјунктних путева) Дат је граф (V, E) и k парова чворова $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_k, t_k)$. Проблем k дисјунктних путева бави се питањем да ли постоји k унутрашње дисјунктних путева $P_1, P_2, \dots, P_k$ тако да пут P_i спаја чворове s_i и t_i .

Алгоритам Робертсона и Симора, сложености $\mathcal{O}(|V(G)|^3)$, функционише на следећи начин. Ако G има ограничену ширину стабла, проблем се може решити динамичким програмирањем у линеарном времену. У супротном, за велико $tw(G)$, тражи се велика c -клика којом би се спојили парови (s_i, t_i) дисјунктним путевима. Ако таква клика не постоји или постоји сепаратор мале величине који раздваја s_i и t_i , тражи се чвор који не утиче на проблем, то јест, проблем над графом G се може решити ако и само ако може и над графом $G - v$. Уклањањем таквог чвора прелази се у следећу итерацију. Теоријски значајан због метода коришћених у конструкцији, алгоритам је ипак непрактичан. Скривена константа у $\mathcal{O}$ -нотацији је израчунљива, али огромна. Сличне недостатке има и верзија алгоритма у сложености $\mathcal{O}(|V(G)|^2)$.

5.3 Ширина стабла окрарактерисана игром

Полицајци и лопоџ је игра над графом у којој полицајци покушавају да ухвате лопова. Прецизније, k претражује граф. Сваки полицајац се налази у неком чвору или је ван графа. У сваком потезу, сваки полицајац који је у том тренутку у графу, може(а не мора) прећи ван графа, а они који су били ван графа, могу ући у граф у чвор по избору. Лопов је на почетку негде у графу, и

може произвољно брзо да се креће гранама графа, то јест, може се померити у било који чвор пре него што се полицајци смене, али не сме да се креће кроз чворове који су окупирани полицајцима. Полицајци све време знају позицију лопова и циљ им је да га ухвате, да се у неком потезу поставе по чворовима тако да лопов не може да се помери.

Математички записано, стање игре је пар $(P_i, C_i), i \in \mathbb{N}$, где $P_i \subseteq V(G)$, уз услов $|P_i| \leq k$, представља скуп чворова окупираних полицијом у i -том потезу, и $C_i \subseteq V(G)$ представља повезану компоненту графа $G \setminus P_i$ у којој се налази лопов када се обришу чворови из скупа P_i . Почетно стање је $(P_0, C_0) = (\emptyset, V(G))$, а у случају победе (полицајаца), $R_i \subseteq C_{i+1}$ и $R_{i+1} = \emptyset$.

Теорема 5.3.1. Нека је G граф и $k \in \mathbb{N}$. Ширина стабла $tw(G)$ је највише $k - 1$ ако и само ако k полицајаца може ухватити лопова у графу G .

Посматрајмо сличај када је G стабло, $G = T$. Један полицајац никада не може ухватити лопова. Што се тиче стратегије за два полицајца, укорене стабло T и у сваком потезу, један полицајац остане на свом месту а други се помери низ грану која води ка подстаблу у којем је лопов. Након коначно много потеза, стижу до листа стабла и хватају лопова.

У општем случају, сличну стратегију можемо применити користећи стабло декомпозиције $(T, \mathcal{V})$ ширине $k - 1$. У првом потезу полицајци се поставе у неки део, рецимо V_i , то јест, $P_1 = V_i$. Лопов се налази у некој од компонената шуме $T \setminus \{i\}$, рецимо T_j и нека је (i, j) грана ка тој компоненти. На основу Леме 4.1.1, скуп $V_i \cap V_j$ раздваја лопова и $R_1 \subseteq T_j$ од $G \setminus T_j$. Ако изаберемо $P_2 = V_i \cap V_j$ и $P_3 = V_j$ (што је могуће јер је $|V_t| \leq k$, за свако $t \in T$), лопов не може да прође кроз ниједан од чворова из V_j , те мора да се помери дубље ка подстаблу T_j , или да остане у делу X_j . Дакле, $C_2, C_3 \subseteq T_j$. Ако полицајци наставе да понављају ову стратегију, после коначно много потеза сатераће лопова у неки лист V_t , а онда за $P_{i+1} = V_t \supseteq R_i$, полицајци хватају лопова и побеђују.

Овиме смо доказали $\Rightarrow$ смер теореме, а други смер може се наћи у [6].

5.4 НП-тешки проблеми

Многи НП-тешки проблеми лако су решиви динамичким програмирањем у случају стабла. Један од њих је и проблем мајксималног независног скупа. Објаснићмо и како се решава проблем у случају графова ограничене ширине стабла.

Дефиниција 5.4.1. (независан скуп) Дат је граф $G = (V, E)$. Независан скуп граф G је подскуп $I \subseteq V$ тако да за сваки пар $u, v \in I$, $(u, v) \notin E$.

Да бисмо решили тај проблем, морамо бити у могућности да одговоримо на питање: да ли у графу G постоји независан скуп кардиналности k ?

Теорема 5.4.1. Дато је стабло $T = (V, E)$. Величина максималног независног скупа може бити израчуната у временској сложености $\mathcal{O}(|V|)$.

Доказ. Укоренимо T тако да је корен r , и нека T_u означава подстабло чвора u . Користимо динамичко програмирање. $dp_{u,0}$ представља величину максималног независног скупа у подстаблу T_u који не садржи u , а $dp_{u,1}$ величину максималног независног скупа ако садржи чвор u . Транзиција је:

$$dp_{u,0} = \sum_{v \in adj(u) \setminus \{p_u\}} \max(dp_{v,0}, dp_{v,1})$$

$$dp_{u,1} = 1 + \sum_{v \in adj(u) \setminus \{p_u\}} dp_{v,0}$$

где $adj(u)$ представља листу суседства чвора u , а p_u је родитељски чвор од u . Како је сваки чвор дете тачно једног чвора, и сложеност транзиције је $\mathcal{O}(|adj(u)|)$, укупна сложеност је $\mathcal{O}(|V|)$.

У случају тежинског максималног независног скупа, за тежински граф $G = (V, E, w)$ (чворовима додељене тежине), у транзицији за $dp_{u,0}$ уместо 1 стоји w_u .

Дефиниција 5.4.2. Стабло декомпозиције је $(T, \mathcal{V})$ смислено ако не постоји грана (i, j) у T тако да је $V_i \subseteq V_j$.

Свако стабло декомпозиције може постати смислено, све док постоји пар (i, j) , делове V_i и V_j спајамо у један. Смислено стабло значи да нема сувишне делове.

Тврђење 5.4.1. За свако смислено стабло декомпозиције $(T, \mathcal{V})$ графа $G = (V, E)$ важи $|T| \leq |V|$.

Доказ. Индукцијом по $|T|$. Базни случај $|T| = 1$, тада је $V = V_t$. У индуктивном кораку, нека је i лист стабла T и j његов родитељ. Како је стабло смислено, важи $W = V_i \setminus V_j \neq \emptyset$. На основу ТЗ, ниједан чвор из W није садржан у $T' = T \setminus \{i\}$. T' је исто смислено стабло, те је $|T| - 1 = |T'| \leq |G \setminus W| = |G| - |W| \leq |G| - 1$. Дакле, $|T| \leq |G|$. $\square$

У алгоритамске сврхе, биће нам корисно да T буде бинарно стабло. Заправо, за сваку декомпозицију $(T, \mathcal{V})$ графа G , могуће је направити декомпозицију $(f(T), f(\mathcal{V}))$ исте ширине тако да је $f(T)$ бинарно стабло. Нека је v корен стабла T и $T_1, \dots, T_n$ подстабла његове деце. $v(T_1, \dots, T_n)$ представља стабло T . Ако $f(T)$ представља транзицију стабла T у бинарно стабло, онда можемо узети $f(T) = v(f(T_1), f(v(T_2, \dots, T_n)))$ и рекурзивно дефинисати операцију добијања бинарног стабла. Приликом сваке итерације, стаблу T се дода један нови чвор који је корен стабла $f(v(T_2, \dots, T_n))$, те $f(T)$ има $2|T|$ чворова. Дакле, можемо рећи да за сваки граф $G = (V, E)$ постоји бинарно стабло декомпозиције минималне ширине тако да је величина стабла $\mathcal{O}(|V|)$. Надаље сва стабла декомпозиције сматрамо бинарним и величине $\mathcal{O}(|V|)$.

Главни разлог зашто ефикасно можемо израчунати максималан независан скуп у стаблу јесте тај да између два подстабла (тако да једно није подскуп другог) не постоје гране, те налажење независних скупова у сваком од стабла доводи до целокупног независног скупа. Слично својство важи и за стабло декомпозиције.

Ако је t чвор стабла декомпозиције $(T, \mathcal{V})$ и t_1, t_2 његова деца, због услова (Т3), свака грана између индукованих подграфа $G[V_{t_1}]$ и $G[V_{t_2}]$ мора да садржи чвор из дела V_t . Посматрајмо тежински граф $G = (V, E, w)$ и стабло декомпозиције $(T, \mathcal{V})$ ширине k . За $t \in T$, нека T_t представља подстабло са кореном t , а G_t подграф индукован чворовима из T_t . За независни скуп $U \subseteq V_t$, нека је $I(t, U)$ максимални независни скуп у G_t тако да је $I(t, u) \cap V_t = U$.

Лема 5.4.1. Нека је $t \in T$ и $t_1, \dots, t_n$ његова деца. Ако је $U_j = I(t, U) \cap G_{t_j}$, онда је I_j максимални независни скуп у G_{t_j} и важи $I_j \cap V_t = U \cap V_{t_j}$.

Теорема 5.4.2. Дат је тежински граф $G = (V, E, w)$ са ширином стабла k . Максимални тежински независни скуп може бити израчунат у временској сложености $\mathcal{O}(2^k |V|)$.

Доказ. Користећи Теорему 5.4.1, нађемо стабло декомпозиције $(T, \mathcal{V})$ ширине k . За $t \in T$ и независан скуп $U \subseteq V_t$, нека је $dp_{t,U}$ тежина максималног тежинског независног скупа. Тада је транзиција:

$$dp_{t,U} = \sum_{v \in \text{adj}(t) \setminus t} \left\{ \left(\max_{W: W \cap V_t = U \cap V_v} dp_{v,W} \right) - w(U \cap V_v) \right\} + w(U)$$

Како је $(T, \mathcal{V})$ смислено, $|T| \leq |V|$, те је број потпроблема највише $2^k |V|$. За сваки потпроблем, $dp_{t,U}$ приступамо највише 2^{k+1} пута, те је укупна временска сложеност $\mathcal{O}(2^{k+1} 2^k |V|) = \mathcal{O}(2^k |V|)$. $\square$

6

Закључак

Кроз овај рад представили смо стабла декомпозиције. У првом делу смо уве-
ли неопходне појмове. У другом делу смо представили сам концепт стабала
декомпозиције и еквивалентне репрезентације, клика-сума графове и парци-
јална k -стабла. У трећем делу повезали смо све то са најдубљом теоремом
у теорији графова - теоремом о минору графа и описали улогу стабала де-
композиције у доказу исте. У четвртом делу представили смо импликације
теоријског дела, и конкретну примену на НП-тешке проблеме.

Овом приликом хтео бих да се захвалим свом ментору, Луки Милићевићу,
на корисним коментарима и сугестијама и што ме је још у првом разреду
дубље упознао са теоријом графова. Такође хтео бих да се захвалим свим
професорима који су ми предавали, били део мог сазревања последњих 6
година и продубили моја интересовања према математици и информатици.

Литература

- [1] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer, Germany, 2017.
- [2] I. Sau, *Introduction to treewidth*, Université de Montpellier, Montpellier, 2021.
- [3] P. Heggernes, *Treewidth, partial k -trees, and chordal graphs*, University of Oslo, Oslo, 2006.
- [4] G. Ding, C. Liu, *Excluding a small minor*, School of Mathematical Science and Computing Technology, Central South University, Changsha, China, 2012.
- [5] S. Driessen, *Treewidth*, RWTH Aachen University, Aachen, Germany, 2022.
- [6] P. Seymour, R. Thomas, *Graph searching and a minmax theorem for tree-width*, Journal of Combinatorial Theory, 1993.
- [7] M. Viswanathan, *Tree Decompositions*, University of Illinois, 2018.