

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД ИЗ ФИЗИКЕ

Динамика и стабилност вортекса у суперфлуиду

Ученик

Вук ДИМИТРИЈЕВИЋ, IVa

Ментори

маст Ана ЂОРЂЕВИЋ
маст Стефан ЂОРЂЕВИЋ

Београд, 30. мај 2025.

Садржај

1	Увод	2
2	Ландау-Гинзбург теорија суперпроводности	4
2.1	Феноменолошки приступ	4
2.2	Слободна енергија	6
2.3	Ландау-Гинзбург једначине	7
2.3.1	Линеарни диференцијални облик	9
2.3.2	Грос-Питаевски једначина	10
2.4	Валидност Ландау-Гинзбург теорије	11
3	Примена ЛГ теорије на различите физичке системе	12
3.1	Магнетик	12
3.2	Суперфлуид	16
3.3	Суперпроводник	16
3.4	Спојеви суперпроводника	18
3.4.1	Проводник и суперпроводник	19
3.4.2	Феромагнет и суперпроводник	20
4	Вортекси у суперфлуидима	24
4.1	Вортексне екситације	24
4.1.1	Густина струје суперфлуида	26
4.1.2	Један вортекс	27
4.1.3	Мајнсеров ефекат	31
4.2	Динамика и стабилност $\mathbf{N}$ вортекса	34
4.2.1	Два вортекса	34
4.2.2	Грос-Питаевски једначина за $\mathbf{N}$ вортекса	36
4.2.3	Динамика $\mathbf{N}$ вортекса	40
4.2.4	Стабилност $\mathbf{N}$ вортекса	42
4.3	Вортекси у ограниченим просторима	43
4.3.1	Суперфлуид у полуравни	43
4.3.2	Суперфлуид унутар круга	44

Садржај	1
5 Закључак	46
Литература	46

1

Увод

Суперфлуиди су флуиди који немају вискозно трење. Недостатак трења код суперфлуида је само једна од последица физике која стоји иза њих. Касније ћемо формално дефинисати шта је тачно суперфлуид.

Суперфлуидност је фаза која се јавља у неким материјалима при екстремним условима, који су најчешће веома ниске температуре, али могу зависити и од притиска. Постоји више теорија које теже томе да објасне понашање суперфлуида и међу њима постоје два различита приступа; микроскопске, од којих је најпознатија БКШ (Бардин-Купер-Шрифер) теорија суперпроводности, и макроскопске, где је Ландау-Гинзбург најпознатија. У овом раду ћемо посматрати проблем макроскопски, односно користећи Ландау-Гинзбург теоријом [5], [6].

Приметићемо да се микроскопска теорија која описује суперфлуиде зове БКШ теорија *суперпроводности*. Да ли постоји неки добар разлог иза тога? Да. Наиме, суперфлуиди и суперпроводници веома слични облици материја, агрегатна стање у којима честице не осећају вискозно трење. Разлика је у томе што су честице о којима причамо у суперфлуиду ненаелектрисане, док то у суперпроводнику није случај. У овом раду, користићемо термине суперпроводник и суперфлуид често као исти; у добром делу рада бавимо се генерализацијом суперфлуида у којој допуштамо да честице имају наелектрисање.

У суперпроводницима се формирају такозвани Куперови парови, парови електрона које ми заједно третирамо као честице. Ова нотација је, историјски гледано, уведена да не би дошло до забуне између електрона и Куперовог пара.

У овом раду ћемо, користећи се методама Ландау-Гинзбург теорије фазних прелаза, [1], изучавати различите појаве у суперфлуидима, односно суперпроводницима. Изучаваћемо појаве које настају спонтано, попут вортекса, видећемо како тачно суперпроводник делује на присуство спољашњег маг-

нетног поља, видећемо како суперпроводници интерагују са другим материјалима и још много тога.

У претпоследњем поглављу фокусираћемо се на тему овог рада. Вортекси су вртлози честица који настају у суперфлуиду. Они у случају суперфлуида настају спонтано, за разлику од суперпроводника, где могу настати и под утицајем магнетног поља. Бавићемо се кретањем вортекса, и видећемо када су уопште различите конфигурације вортекса физички могуће, тј. када су оне стабилне.

На крају самог рада испитаћемо како суперфлуиди интерагују са различитим облицима судова.

Пре него што кренемо са увођењем појмова и са радом, искористио бих прилику да се захвалим Душану Ђорђевићу на инспирацији за тему рада.

2

Ландау-Гинзбург теорија суперпроводности

Ландау-Гинзбург теорија је феноменолошка теорија чији је циљ објашњавање макроскопске особине неког термодинамичког система, не проучавајући физику која описује систем на микроскопском нивоу. Она полази од развоја слободне енергије датог система и минимизацијом исте долази до једначина које тај систем описују. Иако ова теорија има капацитет да објасни најразличитије физичке системе, она се најчешће користи за објашњавање магнетних система [1].

У овом поглављу увешћемо основне појмове Ландау-Гинзбург (ЛГ) теорије попут параметра уређења, слободне енергије и функција одзива, показатељемо како се минимизује слободна енергија, и извешћемо ЛГ једначине за суперпроводник (самим тим и за суперфлуид). На крају ћемо видети врлине и мане овог приступа.

2.1 Феноменолошки приступ

ЛГ теорија је теорија која анализира макроскопске параметре система. Она почиње од параметара уређења, физичких величина, или математичких појмова које описују систем. Потом се из њих рачуна слободна енергија, чијом се минимизацијом добијају тачне вредности параметара уређења. Из параметара уређења се потом извлаче функције одзива система, које су макроскопске величине које можемо да измеримо. Неки примери функција одзива су топлотни капацитет и ентропија [2].

Основна питања од којих почињемо у ЛГ теорији су: који су то параметри уређења, који су спољашњи параметри који утичу на систем, и како то спољни параметри утичу на систем. Параметре система је некад веома лако одабрати, нпр. магнетизација за феромагнетике, али у општем случају није толико

тривијално. Иако на систем може утицати произвољно много ствари, када се бавимо изучавањем неког узорка, то радимо у контролисаним условима и изучавамо веома конкретне и пажљиво одабране физичке величине, што нам помаже да одаберемо спољне параметре које теоријски разматрамо.

Честа пракса у ЛГ теорији је посматрање густине неке величине. Просто речено, мотивација за то је што густина енергије не зависи од димензија система, па је веома природна за рад. Исто важи и за параметар уређења, корисније (и лакше!) је посматрати густину магнетизације, уместо магнетизације.

Важно је напоменути како се ЛГ теорија у основи бави утицајем спољних параметара на систем. Иако у овом раду то није нужно био предмет изучавања, ЛГ теорија даје одговоре на питања како енергија, параметар уређења, функције одзива... зависе од спољних параметара.

Веома значајна примена ЛГ теорије (и мотивација за њен настанак) јесте анализа фазних прелаза. ЛГ теорија веома добро предвиђа фазне прелазе и њихове типове. Баш зато што све време гледамо само енергију, лако се види како мењање неких спољних параметара система утиче на параметре уређења, и како из тога следе различите фазе система. Ми се у овом раду нисмо нарочито бавили фазним прелазима, али из анализе глаткости параметара уређења као функција од спољашњих параметара, уочавамо тип фазних прелаза, а саме услове фазних прелаза добијамо из минимизације слободне енергије.

Постоје две изражене мане овог приступа, о њима више на крају овог поглавља. Прва је што је развој функције тачан само у околини тачке, а друга је што немамо (лак) начин да знамо како изгледају функције које стоје у развоју енергије. Први проблем ћемо продискутовати на крају поглавља, а за сад ћемо га одстранити тако што ћемо рећи да се бавимо суперпроводником у близини критичне температуре (у чијем лимесу је овај развој у потпуности тачан).

Други проблем немамо начин да одстранимо тако лако. За добијање функција у развоју енергије теоријски, нама је потребна нека микроскопска теорија. Ово јесте веома незгодно, параметри се најчешће добијају експериментално. У решавању система, увек ћемо добити неку зависност од функција спољних параметара, које ћемо остављати у најопштијем облику сем ако немамо потребу да детаљније тумачимо решење. Касније, при решавању магнетног система, биће изложени најчешћи облици ових функција [1], [2].

2.2 Слободна енергија

Будући да немамо нарочиту интуицију за то шта значи да је нешто суперпроводно (за разлику од нпр. магнетизације, која је поприлично интуитивна величина), уведемо комплексан параметар уређења ψ . Увешћемо га са сличном мотивацијом као за таласну функцију, то је функција из које можемо извући све што нас занима о систему, за сад ћемо само рећи да је његов квадратни модуо једнак густини суперфлуида, односно суперпроводника. Сад кад смо одабрали параметар уређења, напишимо функционал густине слободне енергије (надаље у тексту када буде неће бити напомињано да је реч о густини слободне енергије) преко њега:

$$F_s = F_n + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} + \alpha(T, \vec{H})|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta(T, \vec{H})|\psi|^4 + \gamma(T, \vec{H})|\psi|^6 + \dots, \quad (2.1)$$

тј. у општем облику имамо:

$$F_s = F_n + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(T, \vec{H})|\psi|^{2n}, \quad (2.2)$$

где су F_s и F_n слободне енергије у суперпроводној и „нормалној” фази, T и $\vec{H}$ су температура и спољашње магнетно поље, и α, β, γ тј. α_n су функције које дефинишу систем у ЛГ теорији, [1], и оне су коефицијенти у развоју. Члан $\frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}$ је запреминска густина енергије спољашњег магнетног поља индукције $\vec{B}$.

Када мало размислимо о овом изразу, примећујемо да нешто фали. Наиме, ако су T и $\vec{H}$ константни у простору, онда је и ψ константно. Ово није нешто што нам одговара (како бисмо иначе добили вортексе?) и из тог разлога у развој додајемо и кинетички члан:

$$F_s = F_n + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(T, \vec{H})|\psi|^{2n} + \frac{1}{2m^*} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(T, \vec{H}) \left| \left(-i\hbar\nabla - q^*\vec{A} \right)^{2n} \psi \right|^2. \quad (2.3)$$

У изразу (2.3) β_n је аналогно са α_n само за кинетички члан, $\vec{A}$ је векторски магнетни потенцијал, m^* и q^* су ефективна маса и ефективно наелектрисање, а $(-i\hbar\nabla - q^*\vec{A})$ је оператор импулса за наелектрисану честицу у магнетном пољу.

Проблем је што не знамо да решавамо нелинеарне диференцијалне једначине бесконачног реда. Тако да ћемо морати да занемаримо неке чланове:

$$F_s = F_n + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} + \alpha(T, \vec{H})|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta(T, \vec{H})|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(-i\hbar\nabla - q^*\vec{A} \right) \psi \right|^2. \quad (2.4)$$

Ово ће бити главни израз за слободну енергију који ћемо користити кроз рад. Некад ћемо додати, односно занемарити одређене чланове у зарад решавања одређених проблема, наравно свако додавање или занемаривање чланова ће бити физички оправдано.

Такође треба напоменути да уз кинетички члан ове једначине може стајати неки кефицијент (тј. функција спољашњих параметара).

2.3 Ландау-Гинзбург једначине

Сада, када коначно имамо једначине за слободну енергију, треба наћи и услов када се оне минимизују. Ово нећемо моћи да урадимо тражењем извода, из простог разлога што је ψ комплексно. Овде радимо варијацију израза (2.4). Користићемо вариациони рачун (смена $D = (-i\hbar\nabla - q^*\vec{A})$):

$$\delta F_s = \int dx^3 \left[\delta \left(F_n \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \right) + \delta (\alpha \psi \psi^* + \frac{1}{2} \beta (\psi \psi^*)^2) + \frac{1}{2m^*} \delta (\psi^* D^* \psi D) \right], \quad (2.5)$$

израз (2.5) можемо записати као:

$$\delta F_s = I_1 + I_2, \quad (2.6)$$

где су I_1 и I_2 :

$$I_1 = \int dx^3 [(\alpha + \beta \psi \psi^*) \delta (\psi \psi^*)], \quad (2.7)$$

$$I_2 = \int dx^3 [(\delta D_i \psi)(D_i^* \psi^*) + (D_i \psi)(\delta D_i^* \psi^*)], \quad (2.8)$$

интеграли (2.7) и (2.8) само раздвојени ради боље прегледности. (2.7) је варијација суме у развоју слободне енергије по параметру уређења, а (2.8) је варијација суме у развоју слободне енергије по кинетичким члановима.

Интеграл (2.7), коришћењем правила варијације производа, лако сведемо на:

$$I_1 = \int dx^3 \left[[\alpha \psi + \beta \psi |\psi|^2] \delta \psi^* + [\alpha \psi^* + \beta \psi^* |\psi|^2] \delta \psi \right]. \quad (2.9)$$

Док интеграл из израза (2.8) захтева мало више труда:

$$I_2 = \int dx^3 [(D\delta\psi)(D^*\psi^*) + (D\psi)(D^*\delta\psi^*)],$$

варијација пролази кроз извод, па следи:

$$= \int dx^3 \left[(-i\hbar\nabla\delta\psi)(D^*\psi^*) + (i\hbar\nabla\delta\psi^*)(D\psi) - q^*\vec{A}(\delta\psi(D^*\psi^*) + \delta\psi^*(D\psi)) \right],$$

распишимо $D = (-i\hbar\nabla - q^*\vec{A})$ и потом ћемо искористити правило варијације производа уназад ($\delta(xy) - y\delta x = x\delta y$):

$$= \int dx^3 \left[-q^*\vec{A}(\delta\psi(D^*\psi^*) + \delta\psi^*(D\psi)) - i\hbar\nabla((\delta\psi)(D^*\psi^*)) \right. \\ \left. - (-i\hbar\nabla(D^*\psi^*))(\delta\psi) + i\hbar\nabla((\delta\psi^*)(D\psi)) - (i\hbar\nabla(D\psi))(\delta\psi^*) \right],$$

применимо Стоксову теорему, уз услов да поље не дивергира у бесконачности:

$$= \int dx^3 [D^2\psi\delta\psi^* + D^{*2}\psi^*\delta\psi]. \quad (2.10)$$

Сада, коначно можемо да убацимо (2.9) и (2.10) у (2.5) и из услова да су оба члана уз $\delta\psi$ и $\delta\psi^*$ једнака нули, добијамо:

$$\alpha\psi + \beta\psi|\psi|^2 + \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar\nabla - q^*\vec{A} \right)^2 \psi = 0. \quad (2.11)$$

Ово је прва од три ЛГ једначине. Из ње добијамо све информације о ψ које су нам потребне. Ако нас занима како се понаша суперфлуид (односно ненаелектрисани суперпроводник) губимо члан уз $\vec{A}$.

Овде наводимо преостале две једначине. Примећујемо да је једначина (2.12) само трећа Максвелова једначина:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (2.12)$$

$$\vec{j} = \frac{q^*}{m^*} \text{Re} \left\{ \psi^* \left(-i\hbar\nabla - q^*\vec{A} \right) \psi \right\}. \quad (2.13)$$

2.3.1 Линеарни диференцијални облик

Једначина (2.11) није увек решива, зато ћемо се сада фокусирати на другачије чланове у развоју него у једначини (2.4). Једначина коју ћемо извести уколико је параметар уређења мали. Ово радимо избацивањем свих сем првог члана суме по параметру уређења и додавањем још једног кинетичког члана.

У системима које ћемо овако решавати, параметар уређења стварно јесте мали.

Ево и израза за слободну енергију који ћемо варирати:

$$F_s = F_n + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} + \alpha(T, \vec{H})|\psi|^2 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(-i\hbar\nabla - q^*\vec{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{\beta}{2m^*} \left| \left(-i\hbar\nabla - q^*\vec{A} \right)^2 \psi \right|^2. \quad (2.14)$$

Четврти члан са десне стране има коефицијент $\frac{1}{2m^*}$, зато што одговара кинетичкој енергији.

Да бисмо знали како се ово варира, остало је да израчунамо варијацију последњег члана. Пре тога ћемо прегледности ради увести неколико смена и израчунаћемо неке ствари унапред:

$$\begin{aligned} D &= -i\hbar\nabla - q^*\vec{A}, \\ D^* &= +i\hbar\nabla - q^*\vec{A}, \\ D^2 &= (-i\hbar\nabla)^2 + i\hbar q^*\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + i\hbar q^*\vec{A} \cdot \vec{\nabla} + q^{*2} |\vec{A}|^2, \\ (D^*)^2 &= (i\hbar\nabla)^2 - i\hbar q^*\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - i\hbar q^*\vec{A} \cdot \vec{\nabla} + q^{*2} |\vec{A}|^2, \\ P &= D^2\psi. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Овде само треба бити пажљив, зато што је $\vec{A}$ вектор, и има свој извод, тако да $\vec{A} \cdot \nabla\psi$ и $\psi\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ нису иста ствар. Сада ћемо решисити како изгледа варијација новог кинетичког члана. Раздвојићемо интеграл по члановима уз $\delta\psi$ и $\delta\psi^*$:

$$\begin{aligned} I &= \int dx^3 \delta \left[(D^2\psi)((D^*)^2\psi^*) \right] \\ &= \int dx^3 \left[(D^2\psi)((D^*)^2\delta\psi^*) + (D^2\delta\psi)((D^*)^2\psi^*) \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Овде је само израчуната варијација производа. Погледајмо даље шта се дешава са интегралом који садржи $\delta\psi^*$:

$$\begin{aligned}
I &= \int dx^3 [P((D^*)^2 \delta\psi^*)] \\
&= \int dx^3 P \left[(i\hbar\nabla)^2 - i\hbar q^* \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - i\hbar q^* \vec{A} \nabla + q^{*2} |\vec{A}|^2 \right] \delta\psi^* \\
&= \int dx^3 \left[(i\hbar\nabla)^2 (P\delta\psi^*) - \delta\psi^* (i\hbar\nabla)^2 P - 2(i\hbar\nabla P)(i\hbar\nabla \delta\psi^*) \right. \\
&\quad \left. - i\hbar q^* [\vec{\nabla} \cdot \vec{A} P \delta\psi^* - \vec{A} \delta\psi^* \nabla P] \right] \tag{2.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad - i\hbar q^* [\vec{\nabla} \cdot \vec{A} P \delta\psi^* - \delta\psi^* \vec{\nabla} \cdot \vec{A} P] + q^{*2} |\vec{A}|^2 \delta\psi^* \\
&= \int dx^3 \left[(-i\hbar\nabla)^2 + i\hbar q^* \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + i\hbar q^* \vec{A} \nabla + q^{*2} |\vec{A}|^2 \right] (\delta\psi^*) (D^2 \psi) \\
&= \int dx^3 (\delta\psi^*) D^2 D^2 \psi \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Из првог у други ред долазимо заменом смене за D^2 из (2.15), из другог у трећи ред долазимо применом лапласијана производа (уназад!). До последњег реда долазимо применом Стоксове теореме и услова да поље не дивергира у бесконачности. На крају само приметимо да је израз у угластим заградама једнак D^2 .

Овим извођењем долазимо до линеарне диференцијалне једначине четвртог реда која описује суперпроводник (који има мало ψ):

$$\alpha\psi + \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar\nabla - q^* \vec{A} \right)^2 \psi + \frac{\beta}{2m^*} \left(-i\hbar\nabla - q^* \vec{A} \right)^4 \psi = 0. \tag{2.19}$$

2.3.2 Грос-Питаевски једначина

Да се приметити да су све једначине које смо до сад извели биле временски независне. Користећи само временски независне једначине не можемо добити временски зависан систем попут вортекса.

Да бисмо решили овај проблем, потражићемо инспирацију у квантној механици. Једначина (2.11) се може видети као:

$$H\psi = 0, \tag{2.20}$$

где је H , Хамилтонијан за система. По постулату о временској еволуцији у квантној механици знамо да важи $H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ [3], [4]. Користећи постулат о еволуцији добијамо:

$$\alpha\psi + \beta\psi|\psi|^2 + \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar\nabla - q^* \vec{A} \right)^2 \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{2.21}$$

Ова једначина зове се Грос-Питаевски једначина и биће кључна у раду са вортексима. Њена стационарна варијанта:

$$\alpha\psi + \beta\psi|\psi|^2 + \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar\nabla - q^*\vec{A} \right)^2 \psi = 0, \quad (2.22)$$

је иста ствар као и (2.11), само у другачијем контексту. Једначине (2.11) и (2.22) се не разликују.

2.4 Валидност Ландау-Гинзбург теорије

У овом поглављу смо видели главне мотивације ЛГ теорије и показали да из једноставне математичке формулације, можемо добити једначине које описују неки систем. Такође смо видели да те једначине могу бити адаптиране зарад лакшег решавања одређених система. Математичке импликације одабране формулације енергије су веома јасне, али поставља се једно веома велико и важно питање; да ли су сва занемаривања овде рађена математички и/или физички оправдана.

Разлог зашто је већина ових апроксимација оправдана, је зато што се резултати ЛГ теорија увек макар феноменолошки слажу са експерименталним подацима. Постоји и велико квантитативно подударање између резултата које даје ЛГ теорија и које дају експерименти. На пример, критични експоненти, који су израчунати при решавању магнетика се у потпуности поклапају са експерименталним радовима.

Потребно је напоменути да се експериментално виде скоро сви теоријски закључци које ћемо ми направити у овом раду. Од понашања параметра уређења на граници материјала, до постојања, и динамике вортекса.

3

Примена ЛГ теорије на различите физичке системе

У овом поглављу биће речи о примени једначина (2.11) и (2.19). Прво ћемо демонстрирати ЛГ теорију на магнетном систему, прецизније феромагнетику. Након тога биће решено неколико различитих конфигурација (тј. спојева): бесконачан раван суперфлуид, суперпроводник, спој бесконачног суперпроводника и бесконачног проводника (сваки у по једној полуравни)...

Нека од овде презентованих решења ћемо користити касније у раду при решавању неких конкретних проблема са вортексима, док су други проблеми рађени пре из радозналости.

У тексту испод, решавање су различите верзије ЛГ једначине (прве), које имају смисла у математичком и физичком контексту проблема. Прецизније, различите апроксимације су узимане у различитим контекстима, са неколико општих услова. У суперпроводнику генерално очекујемо да параметар уређења има неку константну вредност, док ван њега очекујемо да бесконачно далеко од границе, конвергира у нулу. Такође, параметар уређења мора бити непрекидан.

Горе наведено, даје нам довољне граничне услове за решавање већине спојева суперпроводника и датог материјала. У неким од примера решавања система користимо неке додатне физичке аргументе за (не)занемаривање одређених чланова једначине.

3.1 Магнетик

Демонстрације ради, решићемо најједноставнији систем који постоји у ЛГ теорији фазних прелаза - магнетик. Показаћемо како тачно ЛГ теорија описује различите фазе, и одакле следе различити услови за њих. Окарак-

терисаћемо ове фазне прелазе и израчунати неке функције одзива система.

За магнетик узимамо реалан параметар уређења m , густину магнетизације. Онда развој слободне енергије по магнетизацији изгледа овако:

$$F(m, T) = F_0 + \frac{\alpha(T)m^2}{2} + \frac{\beta(T)m^4}{4}. \quad (3.1)$$

Можемо да закључимо да је коефициент β већи од нуле. У супротном би енергетски најоптималније било да магнетизација дивергира. Како ово није могуће, закључујемо да је $\beta > 0$. Условом минимизације енергије добијамо:

$$\frac{\partial F}{\partial m} = m(\alpha(T) + 2\beta(T)m^2) = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m^2} = \alpha(T) + 6\beta(T)m^2 \geq 0. \quad (3.3)$$

Једначина (3.2) има два решења, и потребно је проверити које одговара глобалном енергетском минимуму.

$$m_1 = 0, \quad m_2 = \sqrt{\frac{-\alpha(T)}{2\beta(T)}} \wedge \alpha(T)\beta(T)^{-1} \leq 0, \quad (3.4)$$

глобални минимум можемо наћи упоређивањем разлике слободне енергије рачунате у вредностима магнетизација у локалним минимумима са нулом:

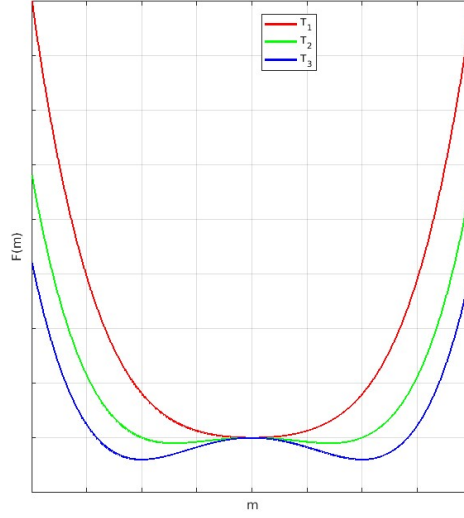
$$\begin{aligned} F(m_2, T) - F(m_1, T) &= \alpha(T) \frac{-\alpha(T)}{\beta(T)} + \beta \frac{\alpha(T)^2}{4\beta(T)^2} \\ &= -\frac{\alpha(T)^2}{4\beta(T)} \geq 0; \quad \forall m \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

То значи да је енергетски оптималније да систем увек буде у стању m_2 , што значи да је услов за постојање m_2 услов и за фазни прелаз.

Овде се први пут сусрећемо са проблемом незнања функција (коэффициєната) у развоју слободне енергије, које у овако постављеном систему, очигледно зависе само од температуре. Најчешћи облици ових функција могу бити нађене у литератури [1], и оне изгледају:

$$\alpha = \alpha_0 \frac{T - T_c}{T_c}, \quad \alpha_0 > 0, \quad (3.6)$$

$$\beta = \beta_0, \quad \beta_0 > 0, \quad (3.7)$$



Слика 3.1: Зависност слободне енергије од магнетизације на различитим температурама, користећи (3.6) и (3.7) у развоју слободне енергије.

где је T_c нека критична температура зависна од конкретног система, са којом имамо сличан проблем као и са функцијама у развоју, теорија коју користимо овде не даје одговор на питање која је то температура.

Сада можемо написати финални израз за m :

$$m = \begin{cases} 0, & T > T_C \\ \sqrt{\frac{-\alpha(T)}{2\beta_0}}, & T \leq T_C \end{cases} \quad (3.8)$$

Примећујемо да је у питању фазни прелаз другог реда, што значи да је промена параметра уређења при промене фазе континуална.

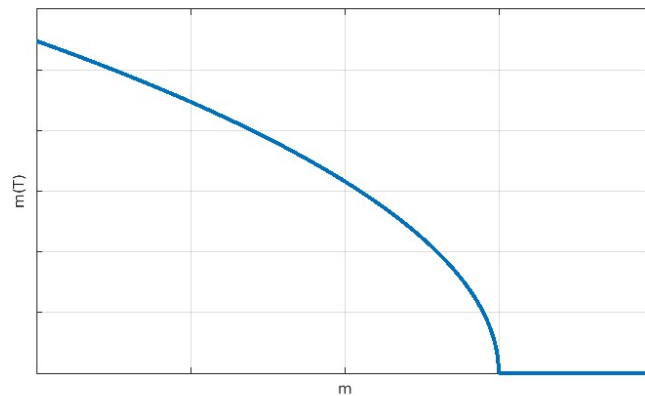
Сада можемо израчунати и неколико функција одзива, редом, јачину магнетног поља, магнетну сусцептибилност и топлотни капацитет:

$$H = \frac{\partial F}{\partial M} = 2\alpha_0(T - T_C)m + 4\beta_0 m^3 \propto m^3, \quad (3.9)$$

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{1}{2\alpha_0(T - T_C) + 12\beta_0 m^2} \propto (T - T_C)^{-1}, \quad (3.10)$$

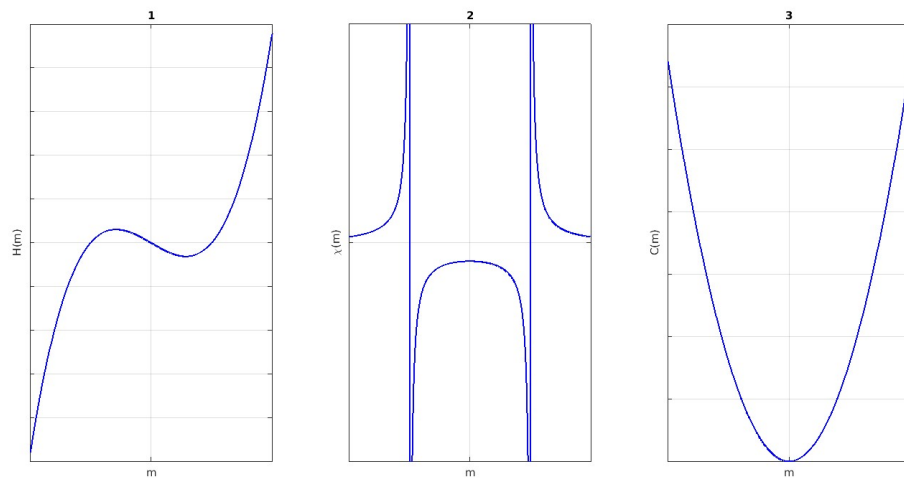
$$C = \frac{\partial F}{\partial T} = \beta_0 m^2 \propto (T - T_C)^0. \quad (3.11)$$

Наведене пропорционалности истичемо зато што су честе међу физичким системима у статистичкој физици [2]. Ове пропорционалности су нешто што је



Слика 3.2: Зависност густине магнетизације од температуре, формула (3.8).

у многоме инспирисало ЛГ теорију. Штавише ови коефициенти су за одређене врсте суперфлуида и магнетика исте. Конкретно пропорционалности везане за функције одзива, зато што се ми у лабораторији најчешће нађемо у опсегу вредности где ови лимеси стварно важе. Облици ових функција могу дати добар правац за размишљање приликом обрачунавања са разним системима.



Слика 3.3: Функције одзива, (1) - зависност јачине магнетног поља од густине магнетизације, (2) - зависност магнетне суспендибилност од густине магнетизације, (3) - зависност топлотног капацитета од густине магнетизације.

Још једна битна пропорционалност, која важи у околини критичне тем-

пературе је:

$$m \propto (T - T_C)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.12)$$

Она је иста за магнетик и за суперфлуид.

У овој секцији дат је преглед стандардне примене ЛГ теорије. Она се обично користи баш за анализу функција одзива у околини фазних прелаза. У наставку рада, ми се нећемо много фокусирати на то, више ће бити извесне генерализације ове теорије, и испитивања динамике и стабилности неких система.

3.2 Суперфлуид

У овој секцији решавамо једначину (2.11) за бесконачан једнодимензиони суперфлуид, ништа се не мења додавањем димензија. Претпоставићемо решење облика $\psi = \psi_\infty e^{kx}$ где је k комплексан број. Битан услов (који смо користили и раније) је да $\psi(x)$ не дивергира у бесконачности, односно да је $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = \psi_\infty$. Онда знамо:

$$\begin{aligned} \alpha\psi + \beta\psi|\psi|^2 - \frac{\hbar^2}{2m^*}\Delta\psi &= 0, \\ \implies \alpha\psi_\infty e^{kx} + \beta\psi_\infty^2 \cdot \psi_\infty e^{kx} - \frac{\hbar^2}{2m^*}\psi_\infty k^2 e^{kx} &= 0, \\ \implies \psi_\infty^2 &= \frac{1}{\beta} \left(\frac{\hbar^2}{2m^*}k^2 - \alpha \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где је Δ лапласијан, односно ∇^2 . У рачуну изнад смо само заменили наше предпостављено решење и мало средили једначину. Будући да знамо да $\psi(x)$ конвергира, онда мора важити $k = 0$. Што нам даје коначан израз за ψ :

$$\psi = \psi_\infty = \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}. \quad (3.14)$$

Дакле параметар уређења се не мења у простору. Овакав резултат је сасвим разуман, очекивано стање већине физичких система у осуству спољних утицаја је изотропно.

3.3 Суперпроводник

У прошлом одељку смо решили једнодимензиони бесконачни суперфлуид. Овде се бавимо изучавањем дводимензионог суперпроводника унутар маг-

нетног поља које је нормално на њега. Приметићемо да уколико нема магнетног поља, једначина која описује суперпроводник је иста као једначина која описује суперфлуид!

Уводимо упрошћење једначине (2.11), користећи апроксимацију $\beta \rightarrow 0$. Будући да нам у изразу фигурише векторски потенцијал, поћи ћемо од тога, нека је магнетна индукција усмерена дуж z -осе, онда важи:

$$\vec{B} = B\vec{e}_z \quad (3.15)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \quad (3.16)$$

$$(3.17)$$

Лако можемо погодити потенцијал, који иако није једнозначно математички дефинисан, сваки даје исто физичко решење. Покажимо да следећи потенцијал задовољава услов из једначине (3.16):

$$\vec{A} = (-yB, 0, 0), \quad (3.18)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = B\vec{e}_z.$$

Као што видимо ово је добар избор потенцијала. Сада ћемо унапред израчунати неке чланове упрошћене верзије једначине (2.11):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} & \left(-i\hbar\nabla - q^*\vec{A}\right)^2 \psi = -\hbar^2\Delta\psi + i\hbar q^*\vec{A} \cdot \nabla\psi + i\hbar q^*\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\psi + q^{*2}|\vec{A}|^2\psi, \\ \Rightarrow & \left(-i\hbar\nabla - q^*\vec{A}\right)^2 \psi = -\hbar^2\Delta\psi + 2i\hbar q^*\vec{A} \cdot \nabla\psi + q^{*2}|\vec{A}|^2\psi. \end{aligned} \quad (3.20)$$

α мора бити негативно у суперпроводној фази, уводимо смене:

$$f = \frac{\psi}{\psi_\infty}, \quad \xi^2 = \frac{\hbar^2}{2|\alpha|m^*}, \quad a = \frac{q^*B}{\hbar}. \quad (3.21)$$

Сада, можемо да започнемо процес решавања једначине (2.11), када $\beta \rightarrow 0$:

$$\alpha\psi + \frac{1}{2m^*} \left(-\hbar^2\Delta\psi - 2i\hbar q^*yB\frac{\partial}{\partial x}\psi + q^{*2}B^2y^2\psi \right) = 0,$$

када поделимо једначину са ψ_∞ и $|\alpha|$, добијамо:

$$-f + \xi^2 \left(-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f \right) - 2i\frac{q^*B}{\hbar}y\frac{\partial}{\partial x}f + \frac{q^{*2}B^2}{\hbar^2}y^2f \right) = 0,$$

убацивањем смена (3.21) имамо:

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f\right) - 2ia y \frac{\partial}{\partial x}f + a^2 y^2 f = -\xi^{-2}f. \quad (3.22)$$

Једначина (3.22) је диференцијална једначина другог реда, линеарна по x , и нелинеарна по y . То значи да је њено опште решење облика: $f(x, y) = e^{ikx} f_y(y)$, где је $k \in \mathbb{C}$. Убацивањем анзаца у (3.22), и даљим сређивањем добијамо:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f = ((ay + k)^2 + \xi^{-2})f, \quad (3.23)$$

формула (3.23) је евидентно једначина помереног квантног линеарног хармонијског осцилатора, па уводимо смену:

$$u = \frac{ay + k}{\sqrt{a}}, \quad (3.24)$$

убацивањем смене (3.24) назад у израз (3.23) добијамо:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f = (u^2 + \xi^{-2})f. \quad (3.25)$$

Једначина (3.25) је једначина квантног хармонијског осцилатора, чије је решење опште познато:

$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{1 + 2n}}, \quad (3.26)$$

$$f = e^{-\frac{u^2}{2} + ikx} \sum_{n=0}^{\infty} \left[u^n \cdot \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^n (2i - 3 + \xi_n^{-2}) \right]. \quad (3.27)$$

Из једначине (3.26) видимо да се облик коефицијента α мења. Наиме, то одговара тврђењу од раније да из неких одзива система можемо сазнати информације о коефицијентима у развоју слободне енергије. О томе шта је тачно параметар ξ (дужина кохеренције) у поглављу четири.

Комплексан број k , може се израчунати, али ми се нећемо бавити тиме овде.

3.4 Спојеви суперпроводника

У овом одељку анализираћемо шта се дешава са спојевима бесконачних суперпроводника, где сваки окупира по једну половину простора. У сваком случају који будемо анализирали, узимаћемо да је у делу простора где је

суперпроводник параметар уређења константа ($\psi = \psi_\infty$), тј. нормализовани параметар уређења је један ($f = 1$).

За граничне услове узимамо да је нормализовани параметар уређења на граници један и параметар уређења и сви његови изводи су у бесконачности (ван суперпроводника!) нула. Ово су довољни гранични услови за оно што ми желимо да урадимо.

Како се тачно ови материјали разликују. Одговор на то питање је у једначинама и феноменологији ових материјала.

3.4.1 Проводник и суперпроводник

Посматрајмо систем у ком имамо два материјала, један је суперпроводник у суперпроводној фази, а други је обичан проводник. Једноставности ради, причаћемо само о једнодимензионом проблему у коме је спољашње магнетно поље нула, који се може генерализовати и у више димензија. Поставка је дата на слици (3.4):



Слика 3.4: Систем суперпроводника и проводника.

Решимо ЛГ једначину (2.11) за почетне услове које смо задали на почетку одељку:

$$\alpha\psi + \beta\psi|\psi|^2 - \frac{\hbar^2}{2|\alpha|m^*} = 0,$$

увођењем смена:

$$\psi_\infty = \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}}, \quad f = \frac{\psi}{\psi_\infty}, \quad \xi^2 = \frac{\hbar^2}{2|\alpha|m^*}, \quad (3.28)$$

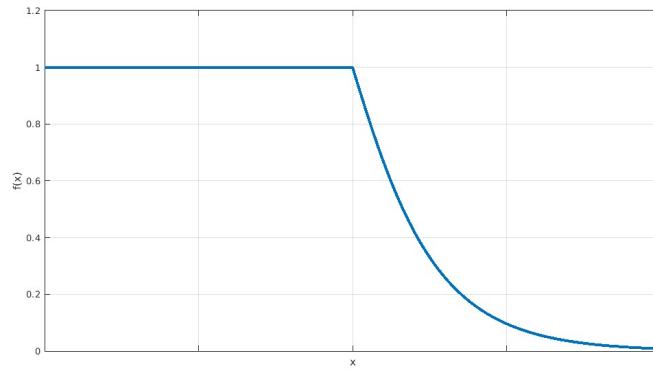
добивамо сређену верзију једначине (2.11):

$$\xi^2 \frac{d^2 f}{dx^2} - f - f^3 = 0. \quad (3.29)$$

Сменом $u = \frac{df}{dx}$, са већ установљеним граничним условима добијамо:

$$\psi = \psi_{\infty} \sqrt{2} \frac{1}{\cosh\left(-\frac{x+c}{\xi}\right)}. \quad (3.30)$$

Можемо видети да се стање у проводнику промени због самог постојања суперпроводника поред. Овај феномен испољава у природи. Најпознатији пример овога јесте Андреево расејање [7]. Добијамо да честице из суперпроводника могу да прођу кроз границу суперпроводник-проводник и нађу се у проводнику. Такође из квадратног модуа параметра уређења, можемо добити вероватноће за сваку појединачну дужину.



Слика 3.5: Зависност параметра уређења од позиције.

Још једна битна ствар коју овај пример сугерише је да постојање границе суперпроводника, односно суперфлуида, може пресудно утицати на понашање система.

3.4.2 Феромагнет и суперпроводник

Показали смо шта се дешава при контакту суперпроводника и проводника, али шта се дешава када је у питању контакт са феромагнетом?

Да бисмо одговорили на ово питање, неопходно је прво констатовати која је главна разлика између проводника и феромагнета. Будући да се бавимо енергијама, треба размишљати у том правцу.

У одсуству спољашњег електричног поља, у проводнику је највећи део енергије у облику енергије кристалне решетке, док у феромагнетику, енергија већински потиче од кретања електрона, односно „струјних контура”.

Математички гледано, то значи да ће у коефицијенти у развоју слободне енергије по параметру уређења за феромагнет и за проводник бити другачији.

Због раније наведених аргумената, предпоставићемо да у параметар уређења у феромагнету описује једначина (2.19).

Треба додати да ћемо се ми посветити решавању проблема у једној димензији, слика (3.6), без присуства спољашњег магнетног поља. Уведимо смене:

$$f = \frac{\psi}{\psi_{\infty}}, \quad b = \frac{\hbar^2}{2\alpha t^*}, \quad a = \frac{\beta \hbar^4}{2\alpha t^*}. \quad (3.31)$$



Слика 3.6: Систем суперпроводника и феромагнетика.

Знамо да је параметар $\alpha < 0$, па је онда и $b < 0$. Примећујемо да је једначина (2.19) линеарна, па убацујемо анзац $f = e^{kx}$, користимо смену и рачунамо изводе:

$$ak^4 - bk + 1 = 0. \quad (3.32)$$

Коришћењем квадратне једначине, добијамо:

$$k_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}}, \quad (3.33)$$

$$\psi = \psi_{\infty}(Ae^{k_1x} + Be^{k_2x} + Ce^{k_3x} + De^{k_4x}). \quad (3.34)$$

Из граничног услова $f(0) = 1$, добијамо:

$$A + B + C + D = 1. \quad (3.35)$$

Параметар β , квалитативно одређује облик решења (3.33). Да не бисмо анализирали сваки, фокусираћемо се случај који видимо у експерименту. Наравно могуће је одредити када се испољава које решење зависно од параметара система, али како је фокус оног рада на вортексима, ми ћемо овде обрадити само један случај. Експериментално се добија да ни имагинаран, ни реалан део k нису нула [6], [7].

Случај који ми анализирамо је:

$$a > \frac{b^2}{4} > 0. \quad (3.36)$$

Можемо написати једначину у мало погоднијем облику:

$$k_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{b \pm i\sqrt{4a - b^2}}{2a}}. \quad (3.37)$$

Ако изразимо решења за k у мало погоднијем облику:

$$(\lambda_{1,2} + i\mu_{1,2})^2 = \frac{b \pm i\sqrt{4a - b^2}}{2a}. \quad (3.38)$$

Бројеви $\lambda_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$, одговарају реалном, односно имагинарном делу решења (3.37), где парни, односно непарни, λ и μ одговарају парно, односно непарно, индексираним k , решења исте парности индекса се међусобно разликују до на знак.

На основу знака који стоји уз реалан део можемо одмах искључити два решења једначине, будући да поље не сме дивергирати у бесконачности. Можемо закључити да су (не битно како их зовемо) C и D једнаки нули. Овде смо имплицитно рекли да је $\lambda_{1,2} < 0$.

Израчунајмо вредности $(\lambda_{1,2} + i\mu_{1,2})^2$ и изједначимо из са реалним и имагинарним делом (3.37):

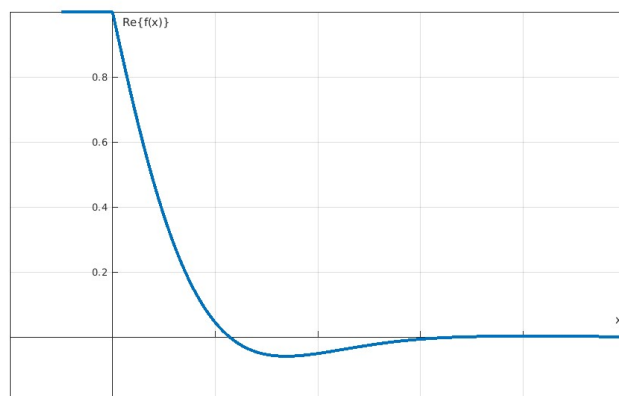
$$\lambda_{1,2}^2 - \mu_{1,2}^2 = \frac{b}{2a}, \quad (3.39)$$

$$\lambda_{1,2}\mu_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{4a - b^2}}{2a}. \quad (3.40)$$

Дакле имамо да је $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\mu_1 = -\mu_2 = \mu$. Посљедњи услов је да је ψ непрекидна, што нам даје услов да је параметар уређења у нули скроз реалан. Одатле уз мало рачуна можемо добити експлицитан облик параметра уређења:

$$\psi = \psi_\infty \exp \left(x \sqrt{\frac{b + i\sqrt{4a - b^2}}{2a}} \right). \quad (3.41)$$

Добијамо да параметар уређења при контакту суперпроводника и феромагнетика осцилује. Ово можемо интерпретирати као немогућност честица које су у суперпроводнику да се нађу на одређеним местима, за разлику од споја са проводником, слика (3.5), где је могуће да се честица нађе било где.



Слика 3.7: Зависност параметра уређења од позиције.

4

Вортекси у суперфлуидима

До сада смо разматрали само статичке системе суперфлуида. У овом поглављу, позабавићемо се динамиком суперфлуида, односно његовом временском еволуцијом. За ово нам је потребна Грос-Питаевски једначина, коју смо извели у другом поглављу.

Показаћемо шта је вортекс, зашто настаје, шта је густина струје у суперпроводницима, извешћемо израз за поље брзине, разматраћемо временску еволуцију система вортекса, као и њихову стабилност, на крају ћемо видети шта се дешава са суперфлуидом који се налази у „посуди”.

У целом овом поглављу, бавићемо се случајем када је $\vec{A} = 0$. Такође ограничићемо се на рад у две просторне димензије, под претпоставком да трећа димензија никако не утиче на систем (нпр. магнетним или електричним пољем).

4.1 Вортексне екситације

Крајње је време рећи шта је тачно један вортекс, прецизније шта је тачно вортексна екситација поља (вортекс јесте само вортексна екситација поља). Вортексна екситација поља је математички гледано специфичан скуп решења једначине (4.1). За сада је једино потребно рећи да је вортекс конкретно решење једначине (4.1).

Сада, се поставља питање: шта је вортекс у физичком смислу? Вортекс је речено вртлог у суперфлуиду, баш налик на вирове у реци, или вртологе које добијамо окретањем посуде са течностима. Главна разлика између класичног вртолога и вортекса је то што је вортекс много мањи.

Грос-Питаевски једначина (2.21) даје везу између параметра уређења и времена. Примићемо да је ова једначина нелинеарна диференцијална једначина која нема лако уочива решења. Стога, ми ћемо апроксимирати коефицијент уз $\psi|\psi|^2$ нулом.

Овако добијамо линеарну диференцијалну једначину, са којом је много лакше радити:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar \nabla - q^* \vec{A} \right)^2 \psi + \alpha \psi. \quad (4.1)$$

У овом поглављу, ми ћемо се фокусирати на решавање (4.1). Примећујемо да ако су ψ_1 и ψ_2 решења једначине (4.1), онда је и $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ решење једначине за $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Ову чињеницу ћемо користити касније, али она је потврда да је апроксимација коју примењујемо оправдана; у реалним системима постоји више вортекса!

Ако се присетимо до сада већ познате смене: $\xi^2 = \frac{1}{2|\alpha|m^*}$, приметићемо да је у димензијама дужине. Ова физичка величина, зове се *дужина кохеренције*. Она, иако није у геометријском смислу егзактна, представља пречник вортекса, односно ред величине истог [5].

Дужина кохеренције је веома леп и природан параметар за рад; и експериментално и теоријски. Експериментално, зато што се коришћењем различитих метода, може видети и проценити вредност ξ , на основу чега можемо имати информације о функцијама у развоју слободне енергије. Теоријски гледано, веома је корисна зато што има јасну физичку интерпретацију, самим тим при упоређивању дужине кохеренције са другим физичким величинама, можемо извући конкретне физичке закључке. Касније, у одељку 4.1.3, ћемо видети још једну корисну физичку величину, налик дужини кохеренције.

Будући да ћемо се у остатку рада бавити истом поставком проблема, овде ћемо дефинисати следеће смене:

$$\xi^2 = \frac{1}{2|\alpha|m^*}, \quad (4.2)$$

$$f = \frac{\psi}{\psi_\infty}. \quad (4.3)$$

Користећи ове смене, и сређивањем једначине (4.1) добијамо једначину којом ћемо се бавити до краја овог поглавља:

$$i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} = -\xi^2 \Delta f - f. \quad (4.4)$$

Односно стационарна верзија (4.4), која се добија из стационарне Грос-Питаевски једначине (2.22):

$$\Delta f = -\xi^{-2} f \quad (4.5)$$

4.1.1 Густина струје суперфлуида

Да бисмо у потпуности разумели вортекс, морамо увести нову физичку величину: *густина струје суперфлуида*, $\vec{j}$. Дефинишимо $\vec{j}$ као:

$$\vec{j} = \frac{q^* \hbar}{2m^* i} \left(\psi^* \left(\nabla - i \frac{q^*}{\hbar} \vec{A} \right) \psi - \psi \left(\nabla - i \frac{q^*}{\hbar} \vec{A} \right) \psi^* \right). \quad (4.6)$$

Овде је $\vec{A}$ остављено генерализације ради. Примећујемо да је ова дефиниција иста као густина струје вероватноће у квантној механици. Ово је у потпуности у духу свега што радимо, на крају крајева, Грос-Питаевски једначина се изводи такође узимајући инспирацију из квантне механике.

Када дефинишемо $\vec{j}$ на овај начин, очекујемо да испољава сличне особине као и у квантној механици. Дефинишимо густину наелектрисања, односно суперфлуида:

$$\rho = q^* |\psi|^2. \quad (4.7)$$

У једначинама (4.6) и (4.7) фигурише q^* , што може бити проблем ако је суперфлуид ненаелектрисан, односно ако је није суперпроводник. У том случају, само кажемо да је $q^* = 1$, и тада ове величине можемо звати и густина вероватноће и густина струје вероватноће.

У физици, једначина континуитета гласи:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (4.8)$$

докажимо да она важи. Прво ћемо средити израз:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= \vec{\nabla} \cdot \frac{q^* \hbar}{2m^* i} \left(\psi^* \left(\nabla - i \frac{q^*}{\hbar} \vec{A} \right) \psi - \psi \left(\nabla - i \frac{q^*}{\hbar} \vec{A} \right) \psi^* \right) \\ &= \frac{q^* \hbar}{2m^* i} (\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Овде смо искористили да је $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Из стационарне Грос-Питаевски једначине следи:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (4.10)$$

Ако представимо параметар уређења у облику:

$$\psi = |\psi|e^{i\theta}, \quad (4.11)$$

и убацимо у (4.6), добијамо да важи једначина континуитета за густину струје вероватноће, што смо и очекивали. ψ је само представљено у дводимензионим поларним координатама.

Заменом (4.11) у (4.6) добијамо да важи:

$$\vec{j} = \frac{q^*\hbar}{m^*} \left(\nabla\theta - \frac{q^*}{\hbar} \vec{A} \right) |\psi|^2, \quad (4.12)$$

односно ако суперфлуид није наелектрисан, добијамо:

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{m^*} |\psi|^2 \nabla\theta. \quad (4.13)$$

Одмах видимо да је ово поље конзервативно, самим тим је и безвртложно:

$$\vec{\nabla} \times \vec{j} = 0. \quad (4.14)$$

Овај закључак је само математичког карактера, он не искључује постојање вортекса као могућност.

Сада, када имамо поље густине струје, можемо добити и поље брзине:

$$\vec{v} = \frac{q^*\hbar}{m^*} \left(\nabla\theta - \frac{q^*}{\hbar} \vec{A} \right), \quad (4.15)$$

односно, ако нема наелектрисања:

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m^*} \nabla\theta, \quad (4.16)$$

где је θ аргумент комплексног броја. Ова врста везе између поља брзине и густине струје је стандардна у физици.

4.1.2 Један вортекс

Као што смо већ рекли, овде ћемо се бавити вортексима у одсуству спољашњег магнетног поља.

При почетку овог поглавља, рекли смо да је вортекс специфично решење једначине (4.1). Са овим решењем смо се сусрели при извођењу једначине континуитета за густину струје. Вортекс је решење једначине (4.1) облика:

$$\psi(r, \phi) = F(r)e^{in\phi}; \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (4.17)$$

Ово **није** свако решење једначине (4.1), већ класа решења којима модуо зависи од координате r , а аргумент им зависи само од ϕ као $\text{Arg}\{\psi\} = in\phi$,

где су r и ϕ поларне координате у две димензије. Потребно је напоменути да израз (4.17) зависи од координатног система, али нам свакако дозвољава да изометријски трансформишемо координате, другим речима вортекс може постојати у сваком координатном систему (доказаћемо касније, једначина (4.46)).

Број n је такозвани *број (сћејен) увијања вортекса*. У систему са једним вортексом, он не делује нарочито важно. Испоставитиће се да је овај број n најважнији број који описује вортекс, чак важнији и од дужине кохеренције.

Сада када знамо шта је вортекс, можемо да пробамо да видимо како тачно изгледа вортекс. Анализираћемо како изгледа параметар уређења, поље густине струје, поље брзине и поље густине. Почнимо од параметра уређења.

Пробајмо прво да извучемо што више информација из једначине (2.22), па ћемо тек након тога увести апроксимацију која нас доводи до једначине (4.1). Напишимо једначину (2.22) у поларном координатном систему:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \psi \right) + \alpha \psi + \beta \psi |\psi|^2 = 0. \quad (4.18)$$

Ова једначина нам веома лепо дочарава шта се дешава у лимесима када $r \rightarrow 0$, односно $r \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} F(r) = cr^n, \quad (4.19)$$

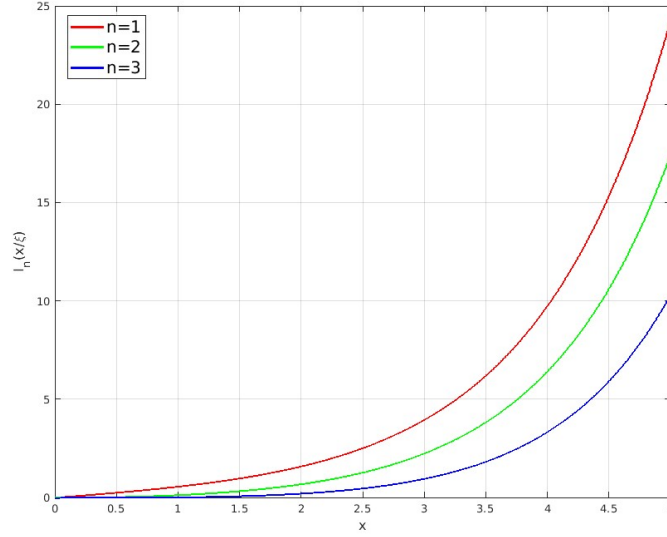
$$\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = \tanh \left(\frac{r}{\xi} \right). \quad (4.20)$$

Сада када смо извукли максималну количину информација о систему, претпоставимо да $\beta \rightarrow 0$. Након стандардних смена за $F(r) = \psi_0 f(r)$ и ξ добијамо једначину:

$$\Delta f = -\xi^{-2} f. \quad (4.21)$$

Решење ове једначине су модификоване Беселове функције. Гранични услов ја да у околини нуле, $\psi \rightarrow 0$, одакле закључујемо:

$$\psi = \psi_0 e^{in\phi} I_n \left(\frac{r}{\xi} \right). \quad (4.22)$$



Слика 4.1: Модификоване Беселове функције првог реда.

Једначина (4.22) не испољава асимптотско понашање у бесконачности, што наш систем јесте испољавао пре него што смо увели апроксимацију $\beta \rightarrow 0$. Свакако, ово нам не прави проблем, ова апроксимација важи само када је параметар уређења мали, дакле свакако не када он тежи бесконачности!

Тренутно нећемо извлачити никакве закључке из овог облика параметра уређења, вратићемо се на њега када будемо анализирали више вортекса у исто време.

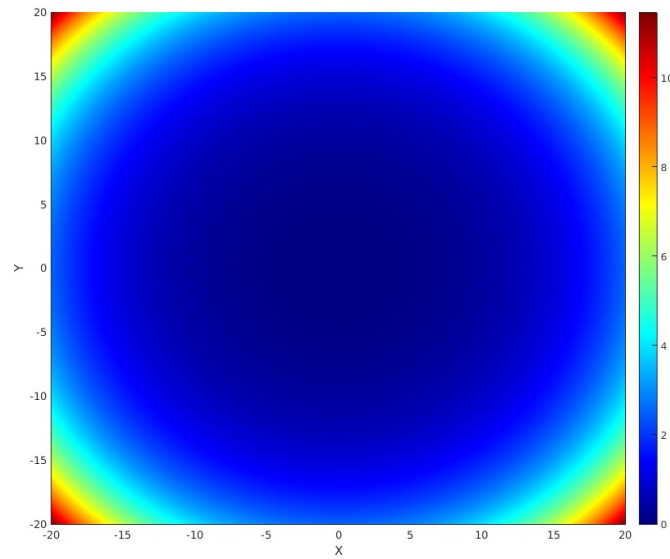
Остаје још видети како изгледају поље густине вероватноће, поље густине струје вероварноће и поље брзине, редом:

$$\rho = \psi_0^2 I_n \left(\frac{r}{\xi} \right)^2, \quad (4.23)$$

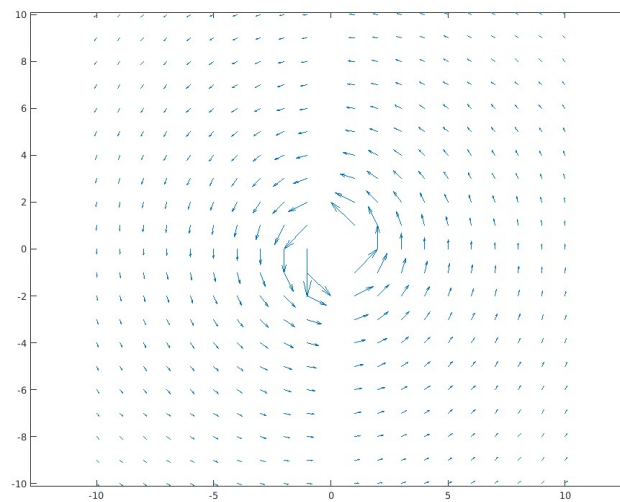
$$\vec{j} = \rho \frac{\hbar}{m^*} \frac{n}{r}, \quad (4.24)$$

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m^*} \frac{n}{r}. \quad (4.25)$$

Да бисмо добили ове једначине, искористили смо $\theta = n\phi$. Добијамо да суперфлуид не постоји близу центра вортекса, што се јавља и у класичним вртлозима. Такође, добијамо да како се одаљавамо од центра вортекса, брзина се драстично смањује, такође особина класичних вортекса.

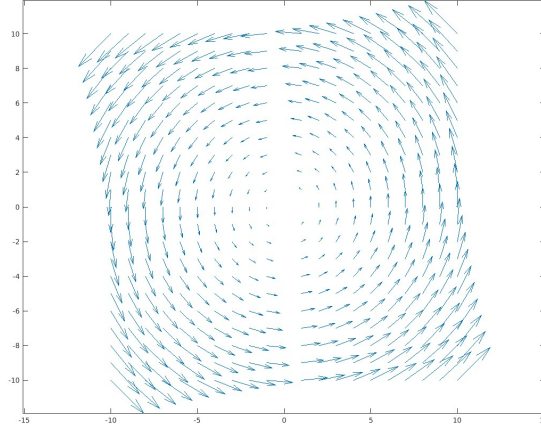


Слика 4.2: Густина вероватноће генерисана од стране једног вортекса.



Слика 4.3: Поље брзине генерисано једним вортексом.

Потребна је кратка дискусија о стабилности вортекса. Сабилности прису-
памо са енергетског аспректа. Пошто вортекс има само кинетичку енергију,
можемо проверити да када $r \rightarrow +\infty$, кинетичка енергија дивергира. Ово
значи да усамљени вортекс не мож бити стабилан.



Слика 4.4: Поље густине струје генерисано једним вортексом.

Извели смо све релевантне закључке за усамљен вортекс, израчунали смо све релевантне физичке величине које описују један вортекс и кроз дискусију о енергији, дошли смо до тога да усамљени вортекс није стабилан.

На сликама (4.2), (4.3) и (4.4) видимо да густина, поље брзине и густина струјања, редом, испољавају својства која смо уочили из једначина.

4.1.3 Мајнсеров ефекат

Мајнсеров ефекат је појава да суперпроводни материјали теже томе да „чувају” магнетни флукс. Конкретно, при укључивању спољашњег магнетног поља око суперпроводника у суперпроводној фази, у суперпроводнику се индукује кружна струја близу ивице. Ова струја поништава утицај спољашњег поља и тежи да очува магнетни флукс, индукувајући магнетно поље таман толико да магнетни флукс буде исти као у тренутку фазног прелаза.

Овде разматрамо бесконачан раван суперпроводник коначне дебљине у спољашњем магнетном пољу дате индукције.

Тачан механизам овог феномена и неке друге детаље можемо израчунати користећи ЛГ теорију. Почнимо од једначина (2.12) и (4.12), применом ротора на једначину (4.12):

$$\vec{\nabla} \times \vec{j} = \frac{q^* \hbar}{m^*} \left(\vec{\nabla} \times \nabla \theta - \frac{q^*}{\hbar} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) |\psi|^2. \quad (4.26)$$

Мотивисани да добијемо како се поље густине струје мења са висином, можемо приметити да је поље безвртложно, под убацивањем израза (2.13) у једначину (4.26) и применом дефиниције векторског лапласијана:

$$\begin{aligned}
\Delta \vec{j} &= -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{j}) + \nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) \\
&= -\vec{\nabla} \times \frac{q^* \hbar}{m^*} \left(0 - \frac{q^*}{\hbar} \vec{B} \right) |\psi|^2 \\
&= \frac{q^{*2} \mu_0 |\psi|^2}{m^*} \vec{j}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Ако на (4.27) применимо још један ротор на обе стране добијамо:

$$\Delta \vec{B} = \frac{q^{*2} \mu_0 |\psi|^2}{m^*} \vec{B}. \tag{4.28}$$

Једначина (4.28), даје нам још једну битну дужину везану за супрерпроводнике, *Лондонова дужина*:

$$\lambda^2 = \frac{m^*}{q^2 \mu_0 |\psi|^2} \tag{4.29}$$

При јављању Мајснеровог ефекта, Лондонова дужина говори колико дубоко спољашње магнетно поље успе да се „пробије” у суперпроводник. Она се лако може директно измерити различитим сензорима попут Холовог сензора за магнетно поље, или индиректно, мерењем $|\psi|^2$, што је, због Куперових парова, двострука концентрација електрона у суперпроводнику. Сада ћемо, примера ради, видети шта се дешава са магнетним пољем, ако имамо бесконачан раван суперпроводник девиљине L у равни x - y , који се налази у хомогеном спољашњем магнетном пољу $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$.

Нека су границе суперпроводника на $z = \pm \frac{L}{2}$, онда имамо граничне услове:

$$\vec{B}(z) = B_0 \vec{e}_z; \quad z \in \left(-\infty, \frac{-L}{2} \right] \cup \left[\frac{L}{2}, +\infty \right). \tag{4.30}$$

Сада, када знамо који су гранични услови нашег система, можемо почети са решавањем једначине. Да би смо лакше приступили решавању, приметимо, да због симетрије, једина компонента магнетне индукције која мож постојати, је она дуж z -осе, која такође може зависити само од z -координате, дакле важи $\vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(z) = B_z \vec{e}_z$. Имајући ово на уму, можемо написати једначину коју решавамо:

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = \lambda^{-2} B_z. \tag{4.31}$$

Ово је хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда и знамо да њено решење мора бити облика:

$$B_z = A_1 e^{kz} + A_2 e^{-kz}; \quad k \in \mathbb{C}. \quad (4.32)$$

Ако проверимо вредност израза (4.31) у граничним тачкама (тј. када наметнемо граничне случајеве), уз мало алгебре добијамо да важи: $A_1 = A_2 = A$.

Сада можемо да заменимо анстац (4.32) у (4.31), добијамо:

$$k = \frac{1}{\lambda}. \quad (4.33)$$

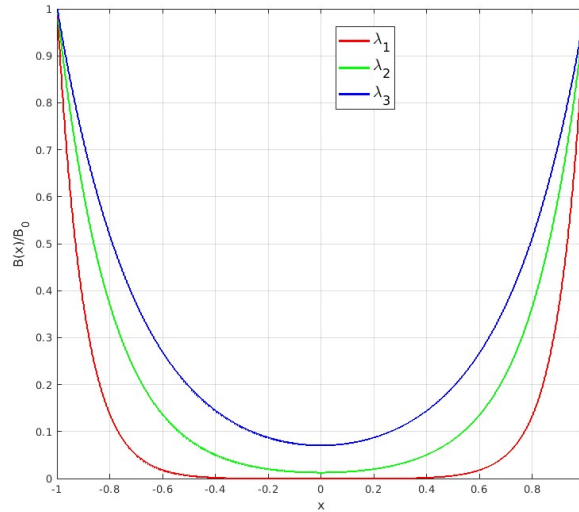
Заменом вредности за k у једначину (4.31), и рачунањем вредности када је $z = \pm \frac{L}{2}$, добијамо:

$$A = \frac{B_0}{\cosh\left(\frac{L}{2\lambda}\right)}. \quad (4.34)$$

Коначно, добили смо експлицитан израз за магнетну индукцију унутар суперпроводника:

$$\vec{B}(z) = B_0 \frac{\cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{2\lambda}\right)}. \quad (4.35)$$

Једначина (4.35) потврђује, нашу претпоставку (која је базирана на експерименталним подацима) да поље експоненцијално опада унутар суперпроводника. Визуелизација решења (4.35) може се видети на слици (4.5).



Слика 4.5: Зависности нормиране магнетне индукције од позиције за различите λ .

4.2 Динамика и стабилност N вортекса

Сада, када смо анализирали систем који сачињава један вортекс, погледајмо шта се дешава са суперфлуидом који има више вортекса. И даље ограничавамо нашу анализу на дводимензиони суперфлуид, чије честице нису наелектрисане.

4.2.1 Два вортекса

Прво ћемо се позабавити случајем са два вортекса. Развићемо неку основну интуицију за даље, која свакако неће бити на одмет. Овај случај је само подскуп система са N вортекса, али решавање случаја са два вортекса даје инспирацију за поступак решавања система N вортекса.

У случају са два вортекса, претпоставићемо решење облика:

$$\psi = F_1(r)e^{i\theta_1} + F_2(r)e^{i\theta_2}, \quad (4.36)$$

овде се није много променило од случаја са једним вортексом. У анализи два вортекса, нећемо улазити у дубину како изгледају $F_1(r)$ и $F_2(r)$; за детаљнију анализу тога погледати наредни одељак. Једино што хоћемо рећи је да $F_i(0) = 0$, и $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) \neq 0$.

Са овако задатим ψ , погледајмо како изгледају поље брзине и поље густине:

$$\rho = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \vec{j} = \frac{\hbar}{m^*} \Big[& F_1^2 \nabla \theta_1 + F_2^2 \nabla \theta_2 + F_1F_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \nabla(\theta_1 + \theta_2) \\ & + \sin(\theta_2 - \theta_1)(F_1 \nabla F_2 - F_2 \nabla F_1) \Big], \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{j}}{\rho}. \quad (4.39)$$

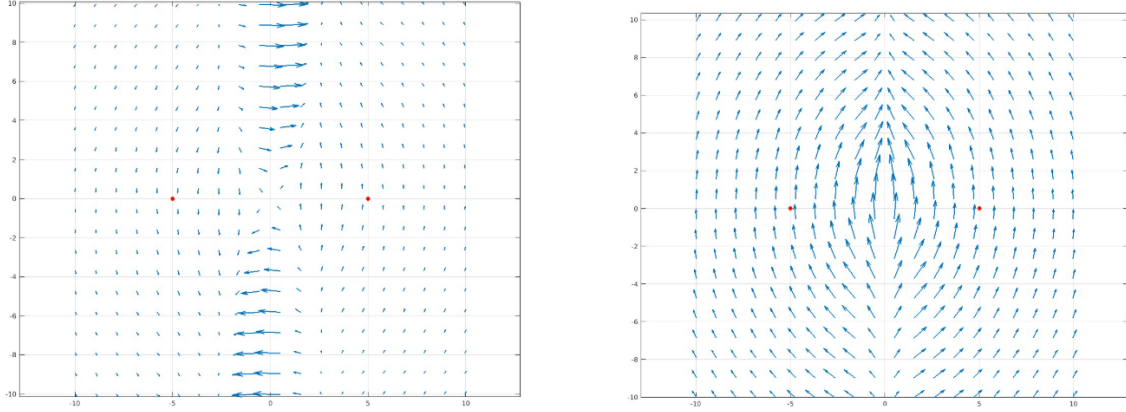
Примећујемо да су све величине су у потпуности реалне и инваријантне на замену индекса 1 и 2, да ово не важи, одмах бисмо знали да смо нешто лоше урадили.

Ако запишемо „аргументе” параметра уређења као $\theta_1 = n_1\phi_1$ и $\theta_2 = n_2\phi_2$, једна веома занимљива ствар се добија ако пустимо да $r \rightarrow +\infty$, добијамо да је $F_1 = F_2 = F$, $\nabla F_1 = \nabla F_2 = \nabla F$ и такође $\phi_1 = \phi_2 = \phi$. За густину вероватноће добијамо:

$$\rho = 2F^2(1 + \cos(\phi(n_1 - n_2))), \quad (4.40)$$

а за поље брзине суперфлуида:

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{2m^*} \nabla \phi(n_1 + n_2). \quad (4.41)$$



Слика 4.6: Лево: Поље брзине генерисано од два вортекса, са бројевима увијања 1. Десно: Поље брзине генерисано од два вортекса, са бројевима увијања 1 и -1.

На слици (4.6) можемо видети поље брзине генерисано од стране два вортекса, за различите степене увијања.

Сада, покушамо да проценимо кинетичку енергију у бесконачности, добијамо да важи:

$$E \propto (n_1 + n_2)^2. \quad (4.42)$$

Дакле ако $n_1 \neq n_2$, кинетичка енергија:

$$E = \int dx dy \frac{\rho v^2}{2} = +\infty. \quad (4.43)$$

Одавде можемо извући једно фасцинантно запажање. Да би систем од два вортекса био стабилан, довољно је да се њихови степени увијања сабирају у нулу!

Пре него што пређемо на N вортекса, проверићемо још једну ствар. Да ли постоји конфигурација два вортекса, где они мирују у односу на лабораторијски референтни систем (наравно $n_1, n_2 \neq 0$)? Одговор на ово питање можемо наћи ако почнемо да размишљамо о вортексима као о неколико поља која суперпонирају. Кретање једног вортекса условљено је брзином која се налази у његовом центру. Онда важи:

$$\vec{v}_2 = \frac{\hbar}{m^*} \nabla \text{Arg}\{\psi_2\}, \quad (4.44)$$

где је $\vec{v}_2$ брзина другог вортекса, а $\psi_2 \neq \text{const}$, параметар уређења у центру другог вортекса. Будући да $v_2 \neq 0$, закључујемо да други вортекс мора да се креће. Истим поступком, можемо показати да ни први вортекс не сме

мировати. Ово кретање ћемо детаљније изучити касније.

4.2.2 Грос-Питаевски једначина за N вортекса

Коначно долазимо до најопштијег случаја који ћемо анализирати у овом раду: бесконачан раван суперфлуид, ненаелектрисаних честица са N вортекса.

Пре него што се посветимо анализи динамике и стабилности, позабаavimo се прво са неколико формалности. Докажимо да је дозвољено да имамо више од једног вортекса и да је дозвољено да вортекс не буде у координатном почетку. Након тога, извешћемо најопштији облик (који је унутар обима овог рада) параметра уређења система N вортекса.

Будући да је једначина (4.1) линеарна, и ако су ψ_i њена решења, онда је:

$$\psi = \sum_i \lambda_i \psi_i; \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad (4.45)$$

такође решење једначине (4.1). Потребно је кратко прокоментраисати физички значај коефицијената λ_i . Иако λ_i могу бити било који комплексни бројеви, ми у овом раду узимамо да су сви једнаки јединици. Када би $\text{Arg}\{\lambda_i\} \neq 0$, то би просто додавало фазу коефицијенту $e^{in\phi}$, што не прави никакву физичку разлику у систему (као и у квантној механици!), док би мењање $|\lambda_i|$ давало различите „тежине” различитим вортексима, за шта немамо ни теоријско, а поготово не експериментално објашњење. Из ових разлога је код нас увек $\lambda_i = 1$.

Већ смо доказали је (4.22) решење једначине (4.1). Покажимо сада, да ово решење можемо да транслирамо за произвољан вектор $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$, и да оно и даље задовољава (4.1). Претпоставимо да је:

$$\psi' = \psi_0 e^{in\phi'} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right), \quad (4.46)$$

такође решење једначине (4.1). Сада остаје само да се ово решење провери убацивањем у једначину (4.21). Ово ћемо урадити у декартовом координатном систему (наравно, нетранслираном систему):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \psi_0 e^{in\phi'} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right) = -\xi^{-2} \psi_0 e^{in\phi'} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right). \quad (4.47)$$

Уведимо:

$$L_1 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_0 e^{in\phi'} I_n \left(\frac{r'}{\xi} \right) \quad (4.48)$$

Да бисмо доказали ово тврђење, потребна је незанемарљива количина рачуна:

$$\begin{aligned} L_1 &= I_n \left(\frac{r'}{\xi} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{in\phi'} + 2 \frac{\partial}{\partial x} I_n \left(\frac{r'}{\xi} \right) \frac{\partial}{\partial x} e^{in\phi'} + e^{in\phi'} \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_n \left(\frac{r'}{\xi} \right) \\ &\quad + I_n \left(\frac{r'}{\xi} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{in\phi'} + 2 \frac{\partial}{\partial y} I_n \left(\frac{r'}{\xi} \right) \frac{\partial}{\partial y} e^{in\phi'} + e^{in\phi'} \frac{\partial^2}{\partial y^2} I_n \left(\frac{r'}{\xi} \right) \\ &= I_n \left(\frac{r'}{\xi} \right) i n e^{in\phi'} \left(i n \left(\frac{\partial}{\partial x} \phi' \right)^2 + i n \left(\frac{\partial}{\partial y} \phi' \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi' + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi' \right) \\ &\quad + 2 i n e^{in\phi'} \left(\frac{\partial}{\partial x} I_n \left(\frac{r'}{\xi} \right) \frac{\partial}{\partial x} \phi' + \frac{\partial}{\partial y} I_n \left(\frac{r'}{\xi} \right) \frac{\partial}{\partial y} \phi' \right) \\ &\quad + e^{in\phi'} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} I_n \left(\frac{r'}{\xi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} I_n \left(\frac{r'}{\xi} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Прво ћемо се израчунати шта су тано парцијални изводи од ϕ' , што ћемо урадити тако што ћемо прво видети шта је експлицитан облик ϕ' :

$$\phi' = \arctan \left(\frac{y - y_0}{x - x_0} \right), \quad (4.50)$$

где су x и y координате у правоуглом координатном систему. Само ћемо навести потребне изразе који захтевају рачунање извода од ϕ' :

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi' = \frac{y - y_0}{r'^2}; \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \phi' = \frac{x - x_0}{r'^2}; \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi' = \frac{2(x - x_0)(y - y_0)}{r'^4}; \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi' = \frac{2(x_0 - x)(y - y_0)}{r'^4}. \quad (4.54)$$

$$(4.55)$$

Можемо искористити (4.51), (4.52), (4.53) и (4.54) да добијемо још неке корисне изразе:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\phi'\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\phi'\right)^2 = \frac{1}{r'^2} \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi' + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi' = 0. \quad (4.57)$$

Увршћавањем (4.51), (4.52), (4.56) и (4.57) у (4.49), па назад у (4.47), а потом дељењем са $e^{in\phi'}$ добијамо:

$$\begin{aligned} \left(\frac{n^2}{r'^2} - \frac{1}{\xi^2}\right) I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right) = & 2in \left(\frac{y_0 - y}{r'^2} \frac{\partial}{\partial x} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right) + \frac{x - x_0}{r'^2} \frac{\partial}{\partial y} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right) \right) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Ако приметимо да важи:

$$r' = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (4.59)$$

онда очигледно, путем правила композиције за изводе добијамо:

$$\frac{\partial}{\partial x} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right) = \frac{x - x_0}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right); \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right) = \frac{y - y_0}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right). \quad (4.61)$$

Из (4.60) и (4.61) добијамо да је:

$$2in \left(\frac{y_0 - y}{r'^2} \frac{\partial}{\partial x} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right) + \frac{x - x_0}{r'^2} \frac{\partial}{\partial y} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right) \right) = 0.$$

Сада је још потребно констатовати да је:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right); \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y'^2} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right). \quad (4.63)$$

И коначно, можемо написати последњу форму једначине (4.58):

$$\left(\frac{n^2}{r'^2} - \frac{1}{\xi^2}\right) I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right). \quad (4.64)$$

Примећујемо да је (4.64) једначина, коју по дефиницији, задовољава функција $I_n\left(\frac{r'}{\xi}\right)$. Овиме је наш доказ завршен.

Дакле сада када смо показали да N вортекса стварно може бити решење једначине (4.1), коначно можемо да нађемо експлицитан облик параметра уредјења:

$$\psi(x, y) = \psi_0 \sum_k e^{in_k \arctan\left(\frac{y-y_k}{x-x_k}\right)} I_n\left(\frac{\sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2}}{\xi}\right), \quad (4.65)$$

где је (x_k, y_k) центар k -тог вортекса, а n_k његов степен увијања. У даљем рачунању користимо нотацију:

$$F_k = \psi_0 I_n\left(\frac{\sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2}}{\xi}\right), \quad (4.66)$$

$$\phi_k = \arctan\left(\frac{x-x_k}{y-y_k}\right), \quad (4.67)$$

$$\theta_k = n\phi_k. \quad (4.68)$$

Сада ћемо се позабавити рачунањем густине вероватноће и поља густине струје:

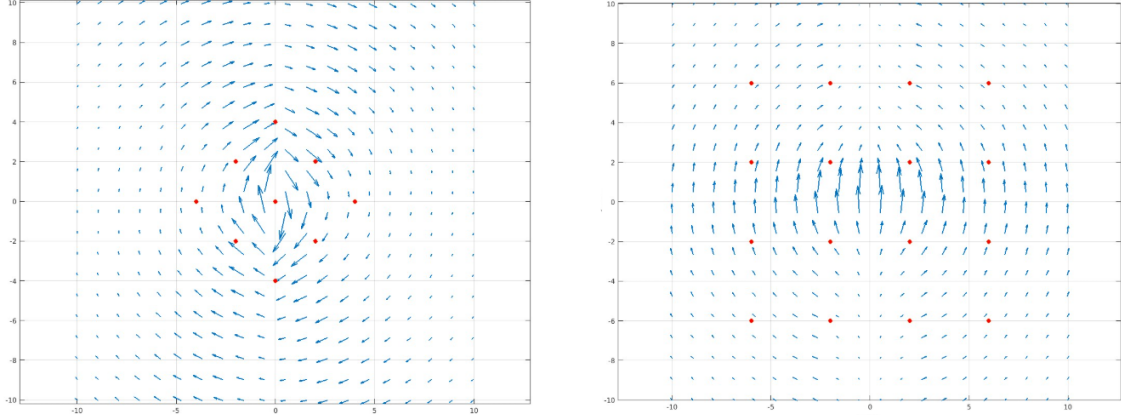
$$\rho = \sum_{k,j} F_k F_j \cos(\theta_k - \theta_j); \quad (4.69)$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{m^*} \sum_{k,j} e^{i(\theta_j - \theta_k)} \left(F_j F_k \frac{\nabla(\theta_k + \theta_j)}{2} + \frac{i}{2} (F_j \nabla F_k - F_k \nabla F_j) \right). \quad (4.70)$$

Густина вероватноће и поље густине струје су рачунати преко дефиницијама (4.7) и (4.6), при увршћавању једначине (4.65). Користећи поље густине струје и поље густине, можемо да добијемо и поље брзине:

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m^*} \frac{\sum_{k,j} e^{i(\theta_j - \theta_k)} \left(F_j F_k \frac{\nabla(\theta_k + \theta_j)}{2} + \frac{i}{2} (F_j \nabla F_k - F_k \nabla F_j) \right)}{\sum_{k,j} F_k F_j \cos(\theta_k - \theta_j)}. \quad (4.71)$$

Величине које смо добили ρ , $\vec{j}$ и $\vec{v}$ су функције од позиције, иако то нисмо нужно назначили у њиховим експлицитним формама. Пре него што наставимо даље са анализирањем динамике и стабилности оваквих система, увешћемо скуп нотација:



Слика 4.7: Поље брзине генерисано од периодично постављаних вортекса са степенима увијања 1 и -1. **Лево:** решетка вортекса димензија 3×3 . **Десно:** решетка вортекса димензија 4×4

$$\vec{j}_k = \vec{j}(x_k, y_k); \quad (4.72)$$

$$\vec{v}_k = \vec{v}(x_k, y_k). \quad (4.73)$$

У овом одељку смо извели све што ће нам требати да у потпуности изанализирамо систем са N вортекса. Показали смо да овакви системи постоје и демонстрирали смо да произвољна конфигурација N вортекса задовољава једначину (4.1). Након тога, нашли смо облик функција густине вероватноће, густине струје и поља брзине, што су све функције које су нам неопходне у наредном одељку.

На слици (4.7) видимо примере два поља брзина генерисаних од више од два вортекса. Нумеричким методама је могуће одредити трајекторије система N вортекса, и то подразумева имплементирање нумерике на једначину (4.71), али нажалост, нумеричке методе потребне за то превазилазе обим овог рада.

4.2.3 Динамика N вортекса

Динамику вортекса можемо испитивати на два начина: аналитички, што можемо да урадимо само за случај два вортекса и нумерички, што је могуће за N вортекса.

Покажимо како аналитички добијамо трајекторије два вортекса. Почнимо од израза за брзину:

$$\vec{v}(x, y) = \frac{\hbar}{m^*} \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, y) + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \theta(x, y) \right), \quad (4.74)$$

ако узмемо да је $(x, y) = (x_1, y_1)$, односно $(x, y) = (x_2, y_2)$, и вратимо у формулу (4.74), добијамо:

$$\vec{v}_1 = n_2 \frac{\hbar}{m^*} \frac{-(y_1 - y_2)\vec{e}_y + (x_1 - x_2)\vec{e}_x}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (4.75)$$

$$\vec{v}_2 = n_1 \frac{\hbar}{m^*} \frac{-(y_2 - y_1)\vec{e}_y + (x_2 - x_1)\vec{e}_x}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (4.76)$$

Из једначина које смо добили, можемо видети да важи нешто налик на закон одржања импулса:

$$n_1 \vec{v}_1 + n_2 \vec{v}_2 = 0, \quad (4.77)$$

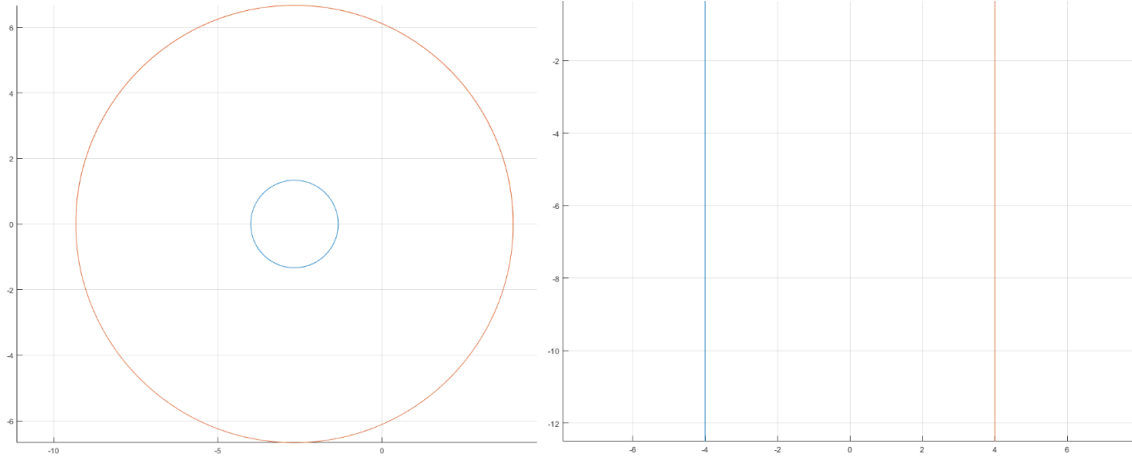
тј. у интегралном облику имамо:

$$n_1 \vec{r}_1 + n_2 \vec{r}_2 = \text{const.} \quad (4.78)$$

Нека су сада $S_1(t)$ и $S_2(t)$ трајекторије као параметризоване криве у зависности од времена. Онда, из једначине (4.78) закључујемо да трајекторије $S_1(t)$ и $S_2(t)$ морају бити или две паралелне праве, или две концентричне кружнице. Трајекторије су паралелне праве ако и само ако је збир бројева увијања једнак нули. У сваком другом случају, трајекторије су две концентричне кружнице. Ако су R_1 и R_2 полупречници кружница, знамо да је збир полупречника кружница једнак растојању између центара вортекса, па из једначине (4.78) такође можемо закључити колики су полупречници ових кружница:

$$R_1 n_1 = R_2 n_2. \quad (4.79)$$

Трајекторије вортекса сепени увијања n_1 и n_2 можемо видети на слици (4.8).



Слика 4.8: Лево: Трајекторије вортекса степена увијања $n_1 = 5$ - плави, $n_2 = 1$ - наранџасти. Десно: Трајекторије вортекса степена увијања $n_1 = -1$ - плави, $n_2 = 1$ - наранџасти.

4.2.4 Стабилност N вортекса

Након што смо проанализирали динамику система вортекса, размотримо када су системи вортекса стабилни. Као и до сад, под стабилности система вортекса, мислимо да енергија не дивергира. За нас је стабилан систем вортекса не онај који је у статичкој равнотежи, него онај који је физички могућ. Могуће је теоријски добити услов за статичку равнотежу система вортекса, али ми се тиме нећемо бавити у овом раду.

Погледајмо израз (4.71), приметимо да када r тежи бесконачности, сви углови ϕ_k и све функције F_k имају исту вредност. Онда се израз (4.71) своди на:

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m^*} \frac{\sum_{k,j} e^{i(\theta_j - \theta_k)} \frac{\nabla(\theta_k + \theta_j)}{2}}{\sum_{k,j} \cos(\theta_k - \theta_j)}. \quad (4.80)$$

Да би систем био стабилан, потребно је да у овом лимесу ($r \rightarrow +\infty$), густина кинетичке енергије тежи нули. Неопходан услов за то је да:

$$\sum_{k,j} F^2 \cos(\phi(n_j - n_k)) \left(\sum_{k,j} e^{i\phi(n_j - n_k)} (n_k + n_j) \nabla \phi \right)^2 = 0. \quad (4.81)$$

Рачунањем извода и сређивањем израза добијамо да је услов стабилности:

$$\sum_{k,j} e^{i\phi(n_j - n_k)} (n_j + n_k) = 0 \quad (4.82)$$

Примећујемо да је услов поприлично нетривијалан, али у систему каквом ми ми имамо, ово није много неочекивано. Наиме, у систему вортекса, не важи класичан закон слагања брзина, важи линеарност по параметру уређења, што нам даје да ψ стандардно суперпонирамо (4.45), а брзина је нека нелинеарна функција параметра уређења, што даље резултује у нетривијалном сабирању брзина.

4.3 Вортекси у ограниченим просторима

Сада, када смо завршили са анализом вортекса у бесконачном равном суперфлуиду, време је да видимо како се ствари мењају ако уведемо нека ограничења. У физичком смислу, ово је као да смо суперфлуид убацили у неку кофу. Та кофа може бити разних облика и величина, али је увек кофа. Суперфлуид се налази унутар кофе, и ван кофе не постоји. Такође, суперфлуид при контакту са кофом не покушава да прође кроз кофу.

За нас физичаре, веома је важно да знамо шта тачно математички значи да је суперфлуид просторно ограничен. Какве граничне услове то намеће?

Гранични услови које кофа намеће су: густина вероватноће суперфлуида ван кофе је нула и суперфлуид који се налази на самој граници (додирује кофу) нема компоненту паралелну вектору нормале површине (кофе) у тој тачки.

Сада када смо дефинисали шта значи да је суперфлуид просторно ограничен, можемо да испитамо како на њега утичу различита просторна ограничења.

4.3.1 Суперфлуид у полуравни

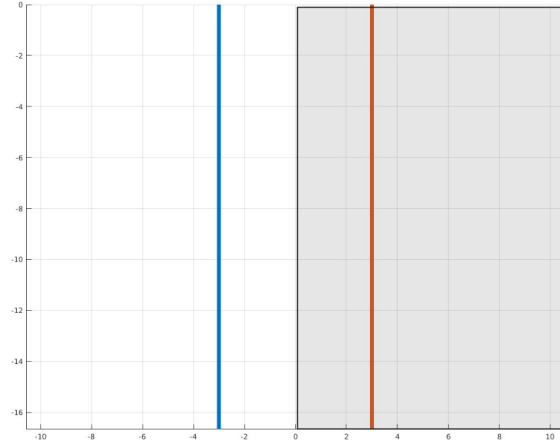
У овом одељку, опет се бавимо бесконачним равним суперфлуидом, али овај пут суперфлуид постоји ако и само ако је $y > 0$. Разматраћемо овај систем када се у суперфлуиду налази само један вортекс. Видећемо како систем еволуира кроз време, и анализираћемо стабилност система. Почетне координате вортекса у овом систему су $(0, h)$.

Услов који се намеће оваквом границом, је да за $y = 0$, вектор брзине буде нормалан на y -осу:

$$\vec{e}_y \cdot \vec{v}(y = 0) = 0. \quad (4.83)$$

Постоји класа решења које задовољавају овај услов, али ми ћемо се фокусирати на она облика (4.22). Штавише пошто сва дају физички иста решења, можемо одабрати оно које је нама математички најзгодније за рад.

Инспирисани теоремом о ликовима из електростатике, покажимо да је систем два вортекса супротних степена увијања, на истом растојању од y -осе, један наспрам другог, систем еквивалентан систему једног вортекса у равном



Слика 4.9: Трајекторије вортекса. Сива површина је унутрашњост суда, наранџаста линија је трајекторија реалног, а плава, индукованог вортекса.

ограниченом суду. Да бисмо ово доказали, довољно је да покажемо да је гранични услов испуњен:

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_y \cdot \vec{v} &= \vec{e}_y \cdot \frac{(1 + \cos(\theta_1 - \theta_2)) \nabla(\theta_1 + \theta_2)}{2 + 2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \\
 &= c \vec{e}_y \cdot \nabla \left(n \arctan \left(\frac{x}{y - h} \right) - n \arctan \left(\frac{x}{y + h} \right) \right) \\
 &= nc \left(-\frac{x}{x^2 - (y - h)^2} + \frac{x}{x^2 - (y + h)^2} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

Овде смо користили чињенице да је $y = 0$ симетрала дужи која спаја центре вортекса и, наравно, да је $y = 0$.

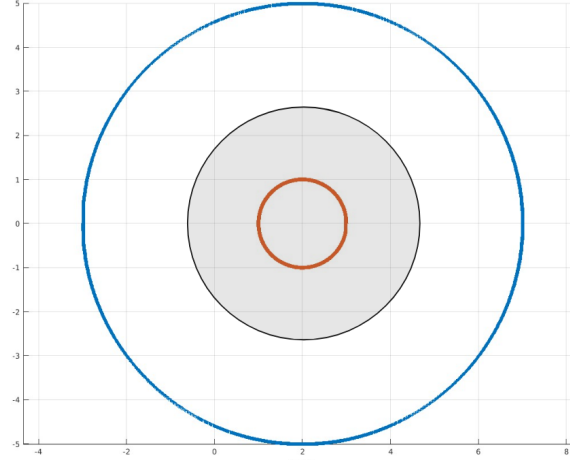
Дакле добили смо да је систем вортекса у суду са равном границом еквивалентан систему од два вортекса супротних степена увијања.

Динамика, као и стабилност овог система сведу се на већ обрађен случај (4.78), када је $n_1 = -n_2$. Закључујемо да је систем вортекса у суперфлуиду са равном границом енергетски стабилан и динамички еквивалентан систему два вортекса са супротним степенима увијања.

На слици (4.9) видимо трајекторије вортекса и индукованог вортекса.

4.3.2 Суперфлуид унутар круга

Као што смо видели у прошлом одељку, проблем суда се може лепо решити применом теореме о ликовима. У овом примеру, обрадићемо проблем равнот



Слика 4.10: Трајекторије вортекса у кружном суду. Сива површина је унутрашњост суда, наранџаста линија је трајекторија реалног, а плава, индукованог вортекса.

суперфлуида који се налази у кружној посуди полупречника R . Почетне координате нашег вортекса ће бити $(r_1, 0)$ и нека је његов степен увијања n_1 .

Услов који имамо овде је да за $r > R$, суперфлуид не постоји, и да за $r = R$, брзина суперфлуида буде нормална на радијални вектор.

Математичка формулација границе коју имамо је:

$$\vec{e}_r \cdot \vec{v} = 0. \quad (4.85)$$

Инспирисани теремом о ликовима, овде ћемо претпоставити да постоји вортекс, степена увијања n_2 , на координатама (r_2, π) . Лако се може проверити да ово решење задовољава једначину (4.85) ако и само ако важи:

$$n_1 r_1 - n_2 r_2 = 0. \quad (4.86)$$

Интуиција иза знака „ $-$ ” је да су вортекси са супротних страна центра круга. Ово се опет сведе на систем који смо раније анализирали, али са једном кључном разликом. Динамички гледано, систем са вортексом у кружној посуди је комплетно еквивалентан систему два вортекса различитих степена увијања тако да важи (4.86), што је случај $n_1 \neq n_2$ једначине (4.78). Са становишта стабилности то није случај. На слици (4.10) видимо трајекторије вортекса у овом систему.

Како вредност $dE = dS \cdot \frac{\rho v^2}{2}$ не дивергира ни у једној тачки, онда знамо да укупна енергија не дивергира, све док интегралимо по коначној површини, што овде јесте случај. Дакле, овај систем јесте енергетски стабилан (има коначну вредност кинетичке енергије) само зато што је просторно ограничен.

5

Закључак

У овом раду смо почевши од Ландау-Гинзбург теорије фазних прелаза, веома темељно доказали постојање система једног и више вортекса. Извели смо генерализоване једначине кретања за вортекс, као и услов за стабилност вортекса. Поред система сачињених само од вортекса, показали смо како суперфлуид са вортексима у себи реагује на постојање различитих врста граница. У раду са вортексима, фокусирали смо се на просторно блиске интеракције.

Поред саме анализе различитих вортексних конфигурација, анализирали смо различите суперфлуидне системе без обзирања на вортексне ексцитације. Показали смо зашто се јавља Мајснеров ефекат и израчунали смо Лондонову дужину. Анализирали смо спојеве различитих материјала, феноменолошки описивајући порекло слободне енергије у различитим системима.

Свему овоме је предходило комплетно извођење ЛГ једначина и Грос-Питаевски једначине, уз максималан ниво математичког ригора.

[1]

Литература

- [1] Henri J. F. Jansen (2010), *Thermodynamics*, Oregon State University
- [2] David Tong, *Statistical Physics*
- [3] Иванка Милошевић и Милан Дамњановић, *Квантна механика*
- [4] Федор Хербут (1999), *Квантна механика за испраживаче*
- [5] Baruch Rosenstein i Dingping Li (2009),
The Ginzburg-Landau Theory of Type II superconductors in magnetic field
- [6] John C. Wheatly (1975), *Experimental properties of superfluid ^3He*
- [7] G. J. Strijkers, Y. Ji, F. Y. Yang, i C. L. Chien,
*Andreev reflections at metal/superconductor point contacts:
Measurement and analysis*