

Математичка гимназија

Матурски рад из математике

Примена комплексних бројева у геометрији

Ученик:

Жељана Стаматовић

Ментор:

Милица Живановић Чукић

Београд, 11. мај 2025.

Садржај

1	Увод	2
2	Појам комплексног броја	3
2.1	Поље комплексних бројева	3
2.2	Тригонометријски облик комплексног броја	4
2.3	Гранична вредност низа комплексних бројева	5
3	Примена комплексних бројева у геометрији	7
3.1	Комплексни бројеви и изометријске трансформације	7
3.2	Комплексни бројеви и колинеарност тачака	9
3.3	Комплексни бројеви и сличност троуглова	13
3.4	Комплексни бројеви и круг	17
4	Птоломеј-Ојлерова теорема	20
5	Морлијева теорема	21
6	Литература	24

1 Увод

Овај рад ћемо започети кратком причом о откривању комплексних бројева, те ћемо поменути и математичаре који су томе највише допринели.

Корен математике лежи у геометрији, човеку најближој и најинтуитивнијој њеној грани, јер се може лакше замислити и објаснити. Чак све до периода ренесансе математичари су алгебарске проблеме преводили у геометријске, претварајући бројеве у геометријске фигуре. Данас је опште познато решење једначине облика $ax^2 + bx + c = 0$, $x, a, b \in \mathbb{R}$. Ипак, мало ко зна за њену геометријску интерпретацију, начин решавања који је математичарима познат још од античког доба.

Могло би се претпоставити да је исто тако лако наћи опште решење једначине трећег степена облика $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $x, a, b, c \in \mathbb{R}$. Но, овај проблем је математичарима представљао изазов вековима. Чак су многи сматрали да опште решење не постоји. Први који се приближио разоткривању ове енгиме био је италијански математичар Николо Фонтана Тартаља. Он је, служећи се тродимензионалном геометријом, нашао алгоритам за решавање једначине облика $ax^3 + cx + d = 0$. Такође италијански математичар, Ђироламо Кардано, је успео да изведе опште решење кубне једначине служећи се Тартаљиним открићем.

Испитивајући своју формулу, Кардано је приметио једну занимљиву ствар - ролажењем кроз алгоритам, у неким корацима може да се деси да се добије корен из негативног броја, или преведено на језик геометрије, негативна површина. Како су се, до тада, математичари бавили само квадратном једначином, корен негативног броја је означавало да једначина нема решење. Али, овај случај је другачији, јер се занемаривањем геометријске нелогичности, у крајњем резултату алгоритма добије реалан број који јесте решење. Ипак, Кардано занемарује овај проблем, називајући проблематичне бројеве бескорисним.

Тек десет година каснија, француски математичар Рафаел Бомбели посвећује пажњу овим бројевима, који, како каже, нису ни позитивни ни негативни, већ засебна врста бројева. Рене Декарт их популаризује и назива имагинарним. Испоставља се да, иако парадоксни, имају широку примену у геометрији. Чињеница да пружају елегантна решења многих геометријских проблема је управо разлог зашто сам избрала ову тему за свој матурски рад.

2 Појам комплексног броја

2.1 Поље комплексних бројева

Постоје једначине облика $P(x) = 0$, $P(x)$ је полином, које немају решење у скупу реалних бројева. Пример је једначина $x^2 + 1 = 0$. Због тога је поље $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ проширено, те је из њега настало поље комплексних бројева $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ такво да у њему све поменуте једначине имају решење.

Дефиниција 1 Скуп $\mathbb{C}$ комплексних бројева је скуп $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ свих уређених парова реалних бројева у ком се сабирање и множење уводе са

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (1)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1), \quad (2).$$

Сваки члан $z = (x, y)$ скупа $\mathbb{C}$ назива се комплексним бројем. Компонената x се назива реалним, а компонента y имагинарним делом броја z са ознакама $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Теорема 1 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ је поље.

Теорема 2 Функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}$, $f(x) = (x, 0)$, је изоморфизам поља $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ на подопоље $\{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ поља $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Доказ: Теорема 1 доказује се рутинском провером. Докажимо теорему 2.

Функција f је очигледно бијекција. Користећи (1) и (2) добијамо:

$$f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0) = f(x_1) + f(x_2),$$

$$f(x_1x_2) = (x_1x_2, 0) = (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = f(x_1)f(x_2) \text{ чиме је тврђење 2 доказано.}$$

Овај доказ имплицира да комплексне бројеве облика $(x, 0)$ можемо идентификовати са реалним бројевима x .

Дефиниција 2 Комплексни број $(0, 1)$ називамо имагинарном јединицом и означавамо са i .

Дакле, $i = (0, 1)$ и $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = -1$. Примећујемо да је i решење једначине $x^2 + 1 = 0$.

Теорема 3 Сваки комплексан број се може записати у облику $z = x + yi$, где је $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Доказ: $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + (0, 1)(y, 0) = x + yi$.

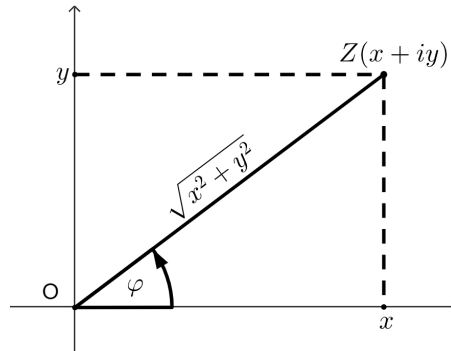
Запис $z = x + yi$ комплексног броја $z = (x, y)$ назива се његовим алгебарским записом.

Дефиниција 3 За комплексан број $z = x + yi$, њему коњугован број је $\bar{z} = x - yi$. Модул комплексног броја $z = x + yi$ је број $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Дефиниција 4 Комплексан број је z чисто имагинаран ако је његов реалан део једнак нули ($\operatorname{Re} z = 0$).

2.2 Тригонометријски облик комплексног броја

Скуп $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ се може схватити као раван у којој је уведен правоугли координатни систем. Како су сви комплексни бројеви облика $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, можемо их замислити као тачке у тзв. комплексној равни. Ако тачки Z одговара комплексан број $z = x + iy$ то ћемо означавати са $Z(z)$. Координате тачке z су (x, y) и онда та тачка има координате (x, y) . Број z назива се координатом тачке Z . Можемо приметити да координата на x -оси одговара реалном делу броја z те се она назива реална оса, а координата на y -оси имагинарном делу броја z те се назива имагинарна оса комплексне равни. (Слика 1)



Слика 1

Сваком комплексном броју $z = x + iy$ се може придружити вектор са почетком у координатном почетку и крајем у одговарајућој тачки $Z(z)$ комплексне равни. У овом случају $z = \overrightarrow{OZ}$. Једноставно се проверава да се операције сабирања и множења комплексних бројева могу извести по правилима векторске алгебре.

Посматрајмо тачку Z у комплексној равни која одговара комплексном броју $z = x + iy$, $xy \neq 0$. Број $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ је једнак растојању од тачке z до координатног почетка O . Косинус оријентисаног угла $\angle xOZ$ је $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, а синус тог угла је $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Угао $\varphi = \angle xOz$ је из интервала $(-\pi, \pi]$. Примећујемо да је

$$|z|(\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} i \right) = x + yi = z.$$

Дефиниција 5 Запис комплексног броја $z \neq 0$ у облику $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где је $r = |z|$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, је тригонометријски облик тог броја. Позитиван број r је модул, а φ је аргумент броја са ознаком $\arg z$. Ради једноставнијег записа уводи се $\text{cis} \varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Теорема 4 Ако је $z_j = r_j \text{cis} \varphi_j$, $j = 1, 2$, тада је $z_1 z_2 = r_1 r_2 \text{cis}(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Теорема 5 Ако је $z = r \text{cis} \varphi$ и $n \in \mathbb{N}$, тада су сва решења једначине $\omega^n = z$ дата са $\omega_k = \sqrt[n]{r} \text{cis} \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Теорема 6 (Муаврова¹ формула) Ако је $z = r \operatorname{cis} \varphi$ и $n \in \mathbb{N}$, *тада* је $z^n = r^n \operatorname{cis} n\varphi$.

Бројеви $\varphi_1 + \varphi_2$, $n\varphi$ и $\frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ не морају припадати полусегменту $(-\pi, \pi]$. У том случају се „проблематичном” броју додаје јединствени број $2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$ и добијамо број из $(-\pi, \pi]$ који је примерен тригонометријском облику комплексног броја.

Теорема 7 За свако $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ важи:

$$\begin{aligned} a) \quad z + \bar{z} &= 2\operatorname{Re} z; & b) \quad |z|^2 &= z\bar{z}; & c) \quad \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \\ d) \quad \overline{z_1 \cdot z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2; & e) \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; & f) \quad |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|; \\ g) \quad |z|^n &= |z^n|; & h) \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}; & i) \quad ||z_1| - |z_2|| &\leq |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

2.3 Гранична вредност низа комплексних бројева

Дефиниција 6 Комплексан број a је гранична вредност низа комплексних бројева z_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - a| = 0$.

Теорема 8 Нека је $z_n = r_n \operatorname{cis} \varphi_n$, $r_n = |z_n|$, $\varphi_n = \arg z_n$. Ако $r_n \rightarrow r$ и $\varphi_n \rightarrow \varphi$ *тада* $z_n \rightarrow r \operatorname{cis} \varphi$.

Функција e^z се дефинише као и реална функција e^x , тј. $e^z := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n$. Докажимо постојање лimesа за свако $z \in \mathbb{C}$. Након што запишемо $z = x + iy$, добијамо

$$\begin{aligned} |(1 + \frac{z}{n})^n| &= |(1 + \frac{x + iy}{n})^n| = (1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2})^{\frac{n}{2}} \text{ и} \\ \arg(1 + \frac{z}{n})^n &= n \arg(\frac{n + x}{n} + i \frac{y}{n}) = n \operatorname{arctg} \frac{y}{n + x}. \end{aligned}$$

Примећујемо да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(1 + \frac{z}{n})^n| = (1 + \frac{2x}{n} + o(\frac{1}{n}))^{\frac{n}{2}} = e^x \text{ и}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arg(1 + \frac{z}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{arctg} \frac{y}{n + x} = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{y}{n + x} + o(\frac{1}{n})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ny}{n + x} + o(0) = y,$$

што по претходној теорему повлачи

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n = e^x (\cos y + i \sin y) = e^{x+iy}, \text{ за свако } z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

¹Abraham de Moivre (1667-1754) - француски математичар

Након што у последњем ланцу једначина заменимо x са 0 добијемо Ојлерову² формулу $e^{iy} = \cos y + i \sin y = \operatorname{cis} y$.

Применом Ојлорове формуле сваки комплексан број са модулом r и аргументом φ може се записати у облику $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$. Елементарном провером се доказује $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ тј. експоненцијална функција са комплексним аргументом наслеђује идентитет множења који важи за експоненцијалну функцију са реалним аргументом.

Лема 1 $\bar{z} = re^{-i\varphi}$ важи за све $\varphi \in (-\pi, \pi]$ и $r \geq 0$.

Доказ:

$$\overline{re^{i\varphi}} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = re^{-i\varphi}.$$

Теорема 9 За свако $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ важи $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Доказ:

Нека је $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2e^{i\varphi_2}, -\pi < \varphi_1, \varphi_2 \leq \pi$.

Тада важи

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \leq \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2} = r_1 + r_2 = |z_1| + |z_2|.$$

Једнакост важи за $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1 \Leftrightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = 0 \Leftrightarrow \varphi_2 = \varphi_1$, тј за тачке z_1 и z_2 које се налазе на полуправој чији је почетак у тачки $O = (0, 0)$.

Са друге стране,

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \geq \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2} = |r_1 - r_2| = ||z_1| - |z_2||.$$

Једнакост важи за $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1 \Leftrightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ тј. z_1 и z_2 се налазе на правој која пролази кроз тачку $O = (0, 0)$ али на супротним странама од тачке O .

Након што у неједнакости из теореме 9 заменимо z_2 са $-z_2$ добијамо:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1 + z_2| \text{ за } \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Будући да за $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ имамо

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = ((x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2))((x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2)) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

следи да је $|z_1 - z_2|$ растојање између тачака z_1 и z_2 . Зато се растојање између тачака z_1 и z_2 често означава са $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Позивајући се на теорему 9, добијамо:

²Leonhard Euler (1707-1783) - швајцарски математичар и физичар

$|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3 + z_3 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| \Leftrightarrow d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$
за $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Овим смо доказали неједнакост троугла.

Појам имагинарне јединице i у свет математике увео је Ојлер, а назив комплексни број, Гаус³. Основе диференцијалног и интегралног рачуна функција чији је аргумент комплексни број поставио је Коши⁴. За Ојлера се везује једнакости $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$. Констатовао је да једнакост $e^{i\pi} = -1$ повезује три, за математику битна броја, e , π и i .

3 Примена комплексних бројева у геометрији

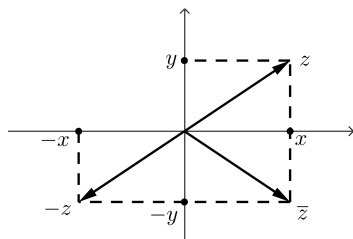
3.1 Комплексни бројеви и изометријске трансформације

Ради поједностављења записа, често ћемо $Z(z)$ означавати само са z .

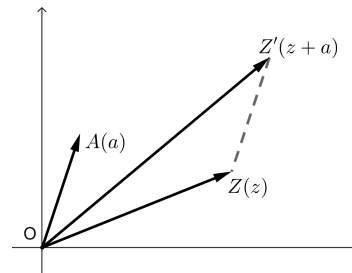
Теорема 10 Број $\bar{z}$ је симетричан броју z у односу на реалну осу. Број $-z$ је симетричан броју z у односу на координатни почетак. (Слика 2)

Теорема 11 Комплексан број z је реалан ако и само ако је $z = \bar{z}$. Другим речима, комплексан број z је реалан ако и само ако се тачка $Z(z)$ налази на реалној оси.

Нека су $z = x + iy$ и $a = p + iq$ произвољни комплексни бројеви. Њиховим сабирањем добијамо $z' = z + a = (x + p) + i(y + q)$. Тачку $Z'(z')$ добијемо транслацијом тачке $Z(z)$ за вектор a . (Слика 3)



Слика 2

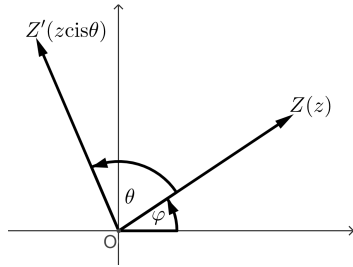


Слика 3

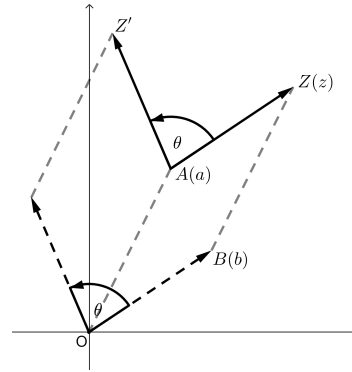
Нека је $z = re^{i\varphi}$, $a = e^{i\theta}$. Тада је $az = e^{i\theta}re^{i\varphi} = re^{i(\varphi+\theta)}$. Дакле, тачка $Z'(az)$ се добија ротацијом тачке $Z(z)$ око O за угао $\theta = \arg a$. Другим речима, да бисмо тачку $Z(z)$ ротирали око координатног почетка за угао θ потребно је z помножити са $e^{i\theta}$, тј. са $\text{cis}\theta$. (Слика 4)

³Johann Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) - немачки математичар

⁴Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) - француски математичар



Слика 4



Слика 5

Како ротирати тачку $Z(z)$ око произвољне тачке $A(a)$ за угао θ ?
 Уводимо тачку $B(b)$ такву да је $b = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AZ} = z - a$. Вектор $\overrightarrow{OB}$ једнак је вектору $\overrightarrow{AZ}$ али има почетак у координатном почетку. Уведену тачку B ћемо ротирати око O за θ тако што ћемо b помножити са $\text{cis}\theta$, а затим је транслирамо за a . За тако добијену тачку $Z'(z')$, $z' = b\text{cis}\theta + a = (a - z)\text{cis}\theta + a$, важи $|\overrightarrow{AZ}| = |\overrightarrow{AZ}'|$ и $\angle ZAZ' = \theta$ те је Z' тачка која се добија ротацијом Z око A за угао θ . (Слика 5)

Пример 1 Ако су дати једно теме $A(a)$ и тежиште $T(t)$ једнакостраничног троугла $\triangle ABC$, наћи координате преостала два темена.

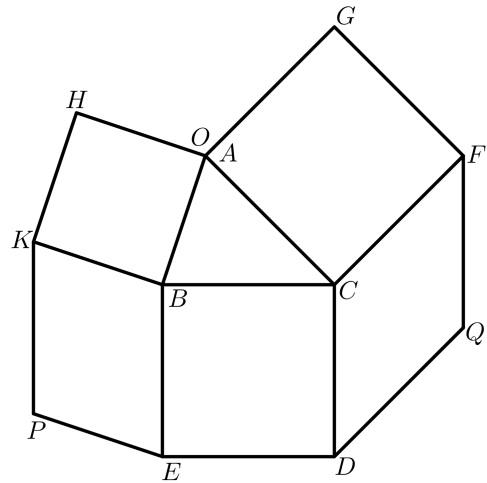
Теме $B(b)$ добија се ротацијом темена A око тежишта за 120° .

$$b = t + (a - t)\text{cis}\left(\frac{2}{3}\pi\right).$$

Теме $C(c)$ добија се ротацијом темена A око тежишта за 240° .

$$c = t + (a - t)\text{cis}\left(-\frac{2}{3}\pi\right).$$

Пример 2 Над страницама BC , CA , AB троугла ABC споља су конструисани квадрати $BCDE$, $CAFG$, $ABHK$ који одређују паралелограме $FCDQ$ и $EBKP$. Доказати да је APQ једнакокраки правоугли троугао. (Слика 6)



Слика 6

Троугао ABC смештамо у комплексну равн тако да се тачка A налази у координатном почетку. Одговарајуће комплексне бројеве ћемо означити малим словом.

$$\begin{aligned}
g &= c \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = ci \\
f &= c + g = c + ci \\
d &= c + (b - c) \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = c + (b - c)i \\
q &= (f - c) + (d - c) + c = bi + c \\
k &= b + (a - b) \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = b - bi \\
e &= b + (c - b) \operatorname{cis} \frac{-\pi}{2} = b - (c - b)i \\
p &= (e - b) + (k - b) + b = b - ci \\
q &= c + bi = (-ci + b)i = p \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Из последње једнакости се види да се Q добија ротацијом тачке P за 90° око тачке A . Дакле, $\triangle APQ$ је једнакокрак, са правим углом код темена A .

Нека је $Z(z)$ тачка комплексне равни, $z = x + yi$ и a прозивољан реалан број. Ако z помножимо са a добијемо комплексан број $z' = ax + ayi$ коме одговара тачка Z' . Тачка Z' се налази на правој OZ тако да важи распоред:

- (1) $\mathcal{B}(Z', O, Z)$ за $a < 0$;
- (2) $\mathcal{B}(O, Z', Z)$ за $0 < a < 1$;
- (3) $\mathcal{B}(O, Z, Z')$ за $1 < a$.

Теорема 12 *Ако знамо да Z дели дуж AB у односу $\alpha : \beta$ онда важи:*

$$\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = \frac{z - a}{b - z} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow z = \frac{\beta a + \alpha b}{\alpha + \beta}$$

Пример 3 Наћи тежиште троугла $\triangle ABC$ ако су познате координате његових темена.

Уводимо тачку $A'(a')$ која је средиште странице BC , $a' = \frac{b+c}{2}$. Тежиште $T(t)$ дели дуж AA' у односу $2 : 1$.

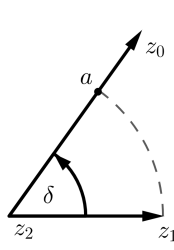
$$\frac{t - a}{a' - t} = \frac{2}{1}, \text{ добијамо да је } t = \frac{a + 2a'}{3} = \frac{a + b + c}{3}.$$

3.2 Комплексни бројеви и колинеарност тачака

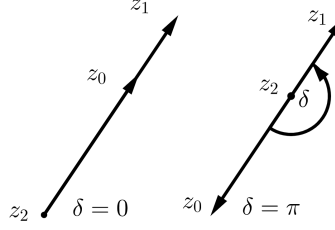
У нашем тексту користимо оријентисане углове. Ознака $\angle\{ABC\}$, где су A, B и C тачке комплексне равни, везује се за угао чији су краци полуправе BA и BC , почетак полуправих је у тачки B . Да би мера $\angle\{ABC\}$ била у полусегменту $(-\pi, \pi]$ изједначава се са углом минималне ротације која полуправу BA пресликава у полуправу BC . Угао је позитиван или негативан зависно од смера ротације.

Нека су z_0, z_1, z_2, z_3 комплексни бројеви и $\delta = \angle\{z_1, z_2, z_0\}$. Користићемо ознаке $V(z_0, z_1, z_2) = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2}$ и $W(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{V(z_0, z_1, z_2)}{V(z_0, z_1, z_3)}$.

Нека је тачка $a = z_2 + (z_1 - z_2) \operatorname{cis} \delta$ настала ротацијом тачке z_1 око z_2 за угао δ (Слика 7). Тада се тачка z_0 добија скраћивањем или продужавањем вектора $a - z_2$,



Слика 7



Слика 8

тј. $z_0 = z_2 + d(a - z_2) = z_2 + d(z_1 - z_2)\text{cis}\delta$, $d \in \mathbb{R}^+$. Примећујемо да је

$$V(z_0, z_1, z_2) = \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{d(z_1 - z_2)\text{cis}\delta}{z_1 - z_2} = d\text{cis}\delta, \text{ дакле } \delta = \angle\{z_1, z_2, z_0\} = \arg V(z_0, z_1, z_2).$$

Тачке z_0 , z_1 и z_2 су колинеарне (Слика 8) ако и само ако је $\delta = 0$ или $\delta = \pi$. То значу да је $\arg V(z_0, z_1, z_2) = 0$ или $\arg V(z_0, z_1, z_2) = \pi$ што је еквивалентно са $V(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{R}$. Користећи теорему 11, добијамо

$$\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} = \overline{\left(\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2}\right)} \Leftrightarrow \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\overline{z_0} - \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}}.$$

Закључујемо да су тачке z_0 , z_1 и z_2 су колинеарне ако и само ако је

$$\frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\overline{z_0} - \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}}.$$

Права l која пролази кроз тачке z_1 и z_2 је геометријско место тачака z за које важи $\frac{z - z_2}{z - z_1} = \frac{\overline{z} - \overline{z_2}}{\overline{z} - \overline{z_1}}$. Након сређивања, добијамо једначину праве l :

$$(\overline{z_1} - \overline{z_2})z - (z_1 - z_2)\overline{z} + (z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2) = 0.$$

Увођењем смене $z_1 - z_2 = \overline{b}$ и $z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 = c$, можемо установити да:

Теорема 13 *Једначина сваке праве у комплексној равни се може записати у облику: $bz - \overline{b}\overline{z} + c = 0$, где је c чисто имагинарни број. Важи и обротно, тј. свака једначина која има овај облик задаје неку праву.*

Пример 4 Наћи растојање праве l задате једначином $bz - \overline{b}\overline{z} + c = 0$, c је чисто имагинаран број, од координатног почетка O .

Једначину праве l можемо записати у облику $-c = bz - \overline{b}\overline{z}$.

Из $|c| = |bz - \overline{b}\overline{z}| \leq$ (по теореме 9) $|bz| + |\overline{b}\overline{z}| = 2|b||z|$ следи $|z| \geq \frac{|c|}{2|b|}$ и једнакост важи ако и само ако бројеви bz и $-\overline{b}\overline{z}$ имају исти аргумент.

Нека је $bz = qe^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$. Тада је $-\bar{b}\bar{z} = -qe^{-i\theta} = e^{i\pi}qe^{-i\theta} = qe^{i(\pi-\theta)}$.

Решимо једначину $\arg bz = \arg(-\bar{b}\bar{z}) \Leftrightarrow \arg e^{i\theta} = \arg e^{i(\pi-\theta)}$. Имамо два случаја:

$$(a) 0 \leq \theta \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \pi - \theta \leq \pi \Rightarrow \theta = \pi - \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$(b) -\pi \leq \theta \leq 0 \Leftrightarrow \pi \leq \pi - \theta \leq 2\pi \Rightarrow \pi - \theta - 2\pi = \theta \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$$

Закључујемо, растојање од тачке O до праве l је $\frac{|c|}{2|b|}$.

Тачка на правој l најближа тачки O добија се решавањем једначине $\arg bz = \pm \frac{\pi}{2}$.

Теорема 14 Нека су $Z_0(z_0)$, $Z_1(z_1)$, $Z_2(z_2)$, $Z_3(z_3)$ шачке комплексне равни. Вектори $\overrightarrow{Z_0Z_1}$ и $\overrightarrow{Z_2Z_3}$ су нормални ако и само ако је $\frac{z_1 - z_0}{z_3 - z_2}$ чисто имагинаран број.

Доказ: $\overrightarrow{Z_0Z_1} \perp \overrightarrow{Z_2Z_3} \Leftrightarrow \arg \frac{z_1 - z_0}{z_3 - z_2} = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{z_1 - z_0}{z_3 - z_2}$ је чисто имагинаран број
 $\Leftrightarrow \frac{z_1 - z_0}{z_3 - z_2} + \overline{\left(\frac{z_1 - z_0}{z_3 - z_2}\right)} = 0 \Leftrightarrow \frac{z_1 - z_0}{z_3 - z_2} + \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2} = 0 \Leftrightarrow R_e \frac{z_1 - z_0}{z_3 - z_2} = 0$.

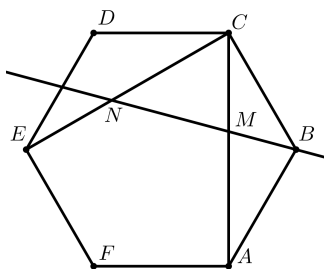
Теорема 15 Нека су $Z_0(z_0)$, $Z_1(z_1)$, $Z_2(z_2)$, $Z_3(z_3)$ шачке комплексне равни. Вектори $\overrightarrow{Z_0Z_1}$ и $\overrightarrow{Z_2Z_3}$ су паралелни ако и само ако је $\frac{z_1 - z_0}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Доказ:

(1) $\overrightarrow{z_0z_1} \parallel \overrightarrow{z_2z_3}$ и имају исти смер $\Leftrightarrow \arg \frac{z_1 - z_0}{z_3 - z_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{z_1 - z_0}{z_3 - z_2}$ је позитиван реалан број.

(2) $\overrightarrow{z_0z_1} \parallel \overrightarrow{z_2z_3}$ и имају супротне смерове $\Leftrightarrow \arg \frac{z_1 - z_0}{z_3 - z_2} = \pi \Leftrightarrow \frac{z_1 - z_0}{z_3 - z_2}$ је негативан реалан број.

Пример 5 Дијагонале AC и CE правилног шестоугла $ABCDEF$ су унутрашњим тачкама M и N редом подељене тако да је $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$. Наћи r за које су B , M и N колиенарне. (Слика 9)



Слика 9

Не умањујући општост, радићемо са шестоуглом дужине странице 1. Сместимо центар шестоугла у координатни почетак O , тако да је $b = 1$ координата тачке B . Како се свака наредна тачка шестоугла добија ротацијом претходне око O за 60° , координате тачака C, D, E, F, A су редом $e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\pi}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Означимо са m и n координате тачака M и N .

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MC}} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}} = \frac{r\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC}(1-r)} = \frac{r}{1-r}, \quad \text{па је по теорему 12,}$$

$$m = (1-r)a + rc = (1-r)e^{-i\frac{\pi}{3}} + re^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$\frac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{NE}} = \frac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CN}} = \frac{r\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{CE}(1-r)} = \frac{r}{1-r}, \quad \text{па је по теорему 12,}$$

$$n = (1-r)e^{i\frac{\pi}{3}} + re^{i\pi}.$$

Знамо да су тачке B, M и N колинеарне ако и само ако је $\frac{m-b}{n-b} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\frac{m-b}{n-b} = \frac{(1-r)e^{-i\frac{\pi}{3}} + re^{i\frac{\pi}{3}} - 1}{(1-r)e^{i\frac{\pi}{3}} + re^{i\pi} - 1} = \frac{\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}(1-3r^2)i}{\beta}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0.$$

Последњи израз је добијен након уобичајног поступка свођења имениоца на реалан број. Решавањем једначине $1-3r^2=0$ добијамо да је $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Лема 2 Нека су $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $z_1 z_2 z_3 \neq 0$, $z_1 + z_2 + z_3 = 1$. Тада је $|z_1| + |z_2| + |z_3| = 1$ ако и само ако је $z_1 > 0, z_2 > 0, z_3 > 0$.

Доказ:

($\Leftarrow$) Из $z_1 > 0, z_2 > 0, z_3 > 0 \Rightarrow z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow |z_1| + |z_2| + |z_3| = z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

($\Rightarrow$) Како је $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$ (по доказу теореме 9) $\Rightarrow \arg z_1 = \arg z_2 = \arg z_3 = \varphi \Rightarrow z_1 = r_1 e^{i\varphi}, z_2 = r_2 e^{i\varphi}, z_3 = r_3 e^{i\varphi}$.

Имамо $z_1 + z_2 + z_3 = 1 \Leftrightarrow (r_1 + r_2 + r_3)e^{i\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow z_1 = r_1 > 0, z_2 = r_2 > 0, z_3 = r_3 > 0$.

Пример 6 Нека је $\triangle ABC$ оштроугли троугао и нека је P тачка у његовој унутрашњости. Доказати да је $\alpha PB \cdot PC + \beta PC \cdot PA + \gamma PA \cdot PB = \alpha\beta\gamma$, α, β и γ су дужине страница наспрам темена A, B, C редом, ако и само је P ортоцентар $\triangle ABC$.

Сместимо P у $O(0,0)$ и означимо са a, b, c координате тачака A, B, C . Једнакост из формулације задатка своди се на:

$$|ab(a-b)| + |bc(b-1)| + |ca(c-a)| = |(a-b)(b-c)(c-a)|.$$

Када ову једнакост поделимо са $|(a-b)(b-c)(c-a)|$ добијамо:

$$\frac{|ab|}{|(b-c)(c-a)|} + \frac{|bc|}{|(a-b)(c-a)|} + \frac{|ca|}{|(a-b)(b-c)|} = 1.$$

Нека је $z_1 = \frac{ab}{(a-c)(b-c)}$, $z_2 = \frac{bc}{(b-a)(c-a)}$ и $z_3 = \frac{ca}{(a-b)(c-b)}$.

Примећујемо да је $z_1 + z_2 + z_3 = \frac{(a-c)(b-a)(c-b)}{(a-c)(b-a)(c-b)} = 1$. Ако важи једнакост из формулације задатка, то значи да важи и $|z_1| + |z_2| + |z_3| = 1$, те су по леми 2, z_1 , z_2 и z_3 позитивни бројеви. Онда се задатак своди на доказ тврђења: P је ортоцентар $\triangle ABC$ ако и само ако су z_1 , z_2 и z_3 позитивни бројеви.

($\Rightarrow$) Нека је P ортоцентар $\triangle ABC$. (Слика 10)

$$\arg \frac{a}{b-c} = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b-c} = r_1 e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

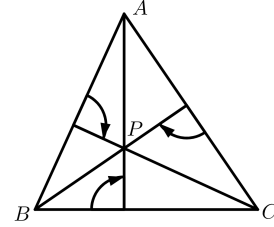
$$\arg \frac{b}{c-a} = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{b}{c-a} = r_2 e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

$$\arg \frac{c}{a-b} = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{c}{a-b} = r_3 e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

$$\text{те је } z_1 = \frac{ab}{(a-c)(b-c)} = r_1 r_2 > 0,$$

$$z_2 = \frac{bc}{(b-a)(c-a)} = r_2 r_3 > 0 \text{ и } z_3 =$$

$$\frac{ca}{(a-b)(c-b)} = r_3 r_1 > 0.$$



Слика 10

($\Leftarrow$) Нека су z_1 , z_2 и z_3 позитивни бројеви.

Из

$$\frac{z_1 z_2}{z_3} = -\left(\frac{b}{c-a}\right)^2 > 0, \quad \frac{z_2 z_3}{z_1} = -\left(\frac{c}{a-b}\right)^2 > 0,$$

$$\frac{z_3 z_1}{z_2} = -\left(\frac{a}{b-c}\right)^2 > 0 \text{ следи да су } \frac{b}{c-a}, \frac{c}{a-b},$$

$\frac{a}{b-c}$ чисто имагинарни бројеви па по теореме

14 важи $AP \perp BC$, $BP \perp CA$ што повлачи да је P ортоцентар $\triangle ABC$.

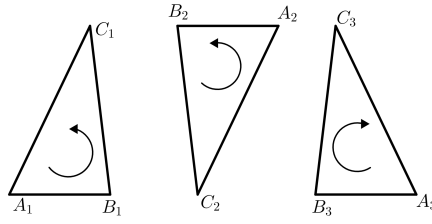
3.3 Комплексни бројеви и сличност троуглова

На нашем цртежу (Слика 11) троуглови $\triangle A_1 B_1 C_1$ и $\triangle A_2 B_2 C_2$ су слични и исто оријентисани док су $\triangle A_1 B_1 C_1$ и $\triangle A_3 B_3 C_3$ слични и супротно оријентисани. Користимо ознаке $\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle A_2 B_2 C_2$ и $\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle A_3 B_3 C_3$ (супротно).

Теорема 16 *Троуглови $\triangle z_1 z_2 z_3$ и $\triangle \omega_1 \omega_2 \omega_3$ су слични ако и само ако је*

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1}.$$

Доказ: Два троугла су слична ако и само ако две странице једног троугла сразмерне оговарајућим страницама другог троугла, а углови захваћени тим страницама једнаки.



Слика 11

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta \omega_1 \omega_2 \omega_3 \Leftrightarrow \left| \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right| = \left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1} \right| \text{ и } \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1} \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1}.$$

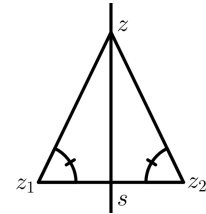
Теорема 17 *Трокутники $\Delta z_1 z_2 z_3$ и $\Delta \omega_1 \omega_2 \omega_3$ су схожі и супротно орієнтовані ако и само ако је*

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\overline{\omega_2} - \overline{\omega_1}}{\overline{\omega_3} - \overline{\omega_1}}.$$

Доказ: Из очигледног $\Delta \overline{\omega_1} \overline{\omega_2} \overline{\omega_3} \sim \Delta \omega_1 \omega_2 \omega_3$ (супротно) следи: $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta \omega_1 \omega_2 \omega_3$ (супротно) $\Leftrightarrow \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta \overline{\omega_1} \overline{\omega_2} \overline{\omega_3}$.

Пример 7 (a) Наћи једначину симетрале дужи $z_1 z_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
(b) Наћи центар круга описаног око Δabc , $a, b, c \in \mathbb{C}$.

(a) Нека је z произвольна тачка на симетралу s . Из $\Delta z z_1 z_2 \sim \Delta z z_2 z_1$ (супротно) следи $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} = \frac{\overline{z_2} - \overline{z}}{\overline{z_1} - \overline{z}}$. Сређивањем једнакости добијамо да је једначина симетрале: $(\overline{z_1} - \overline{z_2})z + (z_1 - z_2)\overline{z} = |z_1|^2 - |z_2|^2$. (Слика 12)



(b) Користећи (a) добијамо једначине симетрала страница Δabc :

$$\begin{aligned} S_a : (\overline{b} - \overline{c})z + (b - c)\overline{z} &= |b|^2 - |c|^2, \\ S_b : (\overline{c} - \overline{a})z + (c - a)\overline{z} &= |c|^2 - |a|^2, \\ S_c : (\overline{a} - \overline{b})z + (a - b)\overline{z} &= |a|^2 - |b|^2. \end{aligned}$$

Слика 12

Означимо са δ центар описаног круга. Након решавања система једначина добијамо:

$$\delta = \frac{|a|^2(b - c) + |b|^2(c - a) + |c|^2(a - b)}{\overline{a}(b - c) + \overline{b}(c - a) + \overline{c}(a - b)}.$$

Теорема 18 Троугао $\triangle abc$ је једнакостраничан ако и само ако је $a + \omega b + \omega^2 c = 0$ или $a + \omega c + \omega^2 b = 0$, где је $\omega = \text{cis} \frac{2\pi}{3}$.

Доказ: Прво треба да уочимо да је $1 + \omega + \omega^2 = 1 + \text{cis} \frac{2\pi}{3} + \text{cis} \frac{4\pi}{3} = 0$, тј. да је $-1 = \omega + \omega^2$.

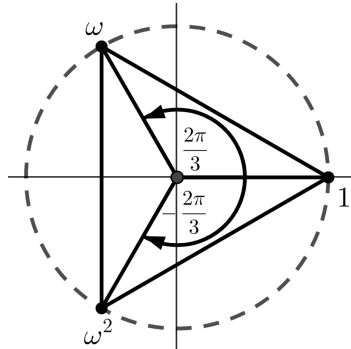
Троугао $\triangle abc$ је једнакостраничан ако и само ако је $\triangle abc \sim \triangle cab \Leftrightarrow \frac{b-a}{c-a} = \frac{a-c}{b-c}$.

Последња једнакост повлачи $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$. (*)

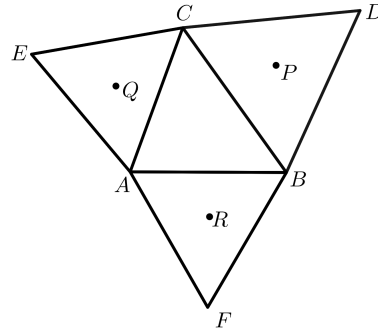
$$\begin{aligned} \text{Такође важи } a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc &= \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + (\omega + \omega^2)(ab + ac + bc) = \\ &= a^2 + \omega ab + \omega^2 ac + b^2 + \omega bc + \omega^2 ab + c^2 + \omega ac + \omega^2 bc = \\ &= a(a + \omega b + \omega^2 c) + c\omega(a + \omega b + \omega^2 c) + b\omega^2(a + \omega b + \omega^2 c) = \\ &= (a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega c + \omega^2 b). \quad (**) \end{aligned}$$

Из (*) и (**) следи да је троугао $\triangle abc$ једнакостраничан ако и само ако је $(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega c + \omega^2 b) = 0$, тј. ако и само ако је $a + \omega b + \omega^2 c = 0$ или $a + \omega c + \omega^2 b = 0$.

Лако се проверава $a + \omega b + \omega^2 c = 0 \Leftrightarrow \triangle abc \sim \triangle 1\omega\omega^2$ и $a + \omega c + \omega^2 b = 0 \Leftrightarrow \triangle abc \sim \triangle 1\omega^2\omega$. Троугао $\triangle 1\omega\omega^2$ је једнакостраничан што је геометријски очигледно. (Слика 13)



Слика 13



Слика 14

Пример 8 Нека су P , Q и R центри једнакостраничних троуглова споља конструисаних над странама произвољног троугла $\triangle ABC$. Доказати да је $\triangle PQR$ једнакостраничан (тзв. Наполеонов троугао). (Слика 14)

Одговарајуће комплексне бројеве ћемо означавати малим словима. Водећи рачуна о оријентацији и чињеници да су доцртани троуглови једнакостранични, добијамо:

$$\begin{aligned} d + \omega c + \omega^2 b &= 0, \\ c + \omega e + \omega^2 a &= 0, \\ b + \omega a + \omega^2 f &= 0. \end{aligned}$$

По примеру 3, следи да је:

$$p = \frac{d+c+b}{3}, \quad q = \frac{c+e+a}{3}, \quad r = \frac{b+a+f}{3}.$$

Како нам је циљ да докажемо да је $\triangle pqr$ једнакостраничан, израчунајмо:

$$\begin{aligned} p + \omega q + \omega^2 r &= \\ &= \frac{1}{3}(d+c+b) + \frac{\omega}{3}(c+e+a) + \frac{\omega^2}{3}(b+a+f) = \\ &= \frac{1}{3}((d+\omega c+\omega^2 b) + (c+\omega e+\omega^2 a) + (b+\omega a+\omega^2 f)) = 0. \end{aligned}$$

Закључујемо да $\triangle PQR$ јесте једнакостраничан троугао.

Пример 9 Нека су $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ једнакостранични са истом оријентацијом. Доказати да се од дужи AA' , BB' и CC' може формирати троугао.

Означимо са a, b, c, a', b', c' комплексни бројеви који одговарају теменима троуглова. Из сличности троуглова следи:

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{c-a} &= \frac{b'-a'}{c'-a'} \Leftrightarrow (c'-a')(b-a) = (b'-a')(c-a) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a'(b-c) + b'(c-a) + c'(a-b) = 0 \quad (*). \end{aligned}$$

Троугао $\triangle ABC$ је сличан са самим собом, те важи и:

$$a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = 0 \quad (**).$$

Након што се од једнакости (*) одузме једнакост (**) добијамо

$$(a+a')(b-c) + (b-b')(c-a) + (c-c')(a-b) = 0,$$

што значи да вектори $(a+a')(b-c)$, $(b-b')(c-a)$ и $(c-c')(a-b)$ формирају троугао. Применом неједнакости троугла добијамо

$$|a-a'||b-c| \leq |b-b'||c-a| + |c-c'||a-b|.$$

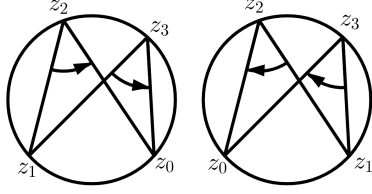
Како је $|b-c| = |c-a| = |a-b|$, дељењем неједнакости са $|b-c|$ закључујемо

$$AA' \leq BB' + CC'.$$

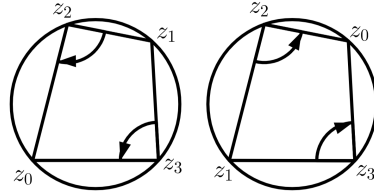
Уз два дргачија распореда код примене неједнакости троугла добијамо

$$BB' \leq AA' + CC' \text{ и } CC' \leq AA' + BB'$$

чиме је тврђење доказно.



Слика 15: случај 1^о



Слика 16: случај 2^о

3.4 Комплексни бројеви и круг

Нека су z_0, z_1, z_2, z_3 коцикличне тачке (налазе се на истом кругу) у комплексној равни. Разматраћемо два случаја, сваки ће бити пропраћен са два цртежа. (Слике 15 и 16)

Теоријска основа случаја 1^о је у следећој теорему:

Ако је $ABCD$ конвексан четвороугао и $\angle ACB = \angle ADB$ тада је он тетиван. Важи и обротно.

Тачке z_0, z_1, z_2, z_3 су концикличне $\Leftrightarrow \arg V(z_0, z_1, z_2) = \arg V(z_0, z_1, z_3) \Leftrightarrow \arg W((z_0, z_1, z_2, z_3)) = 0 \Leftrightarrow W((z_0, z_1, z_2, z_3))$ је позитиван реалан број.

Теоријска основа случаја 2^о је у следећој теорему:

Конвексни четвороугао је тетиван ако и само ако су његови наспрамни углови сумплементни.

Тачке z_0, z_1, z_2, z_3 су концикличне $\Leftrightarrow \arg V(z_0, z_1, z_2) - \arg V(z_0, z_1, z_3) = \pm\pi \Leftrightarrow \arg W((z_0, z_1, z_2, z_3)) = \pi \Leftrightarrow W((z_0, z_1, z_2, z_3))$ је негативан реалан број.

Закључујемо:

Теорема 19 Тачке z_0, z_1, z_2, z_3 припадају кругу ако и само ако је $W((z_0, z_1, z_2, z_3)) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Како је $W(z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{\overline{z_0} - \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}} : \frac{\overline{z_0} - \overline{z_3}}{\overline{z_1} - \overline{z_3}}$, одакле можемо добити једначину круга тако што ћемо z_0 заменити промењивом z .

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{\overline{z} - \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}} : \frac{\overline{z} - \overline{z_3}}{\overline{z_1} - \overline{z_3}} \Leftrightarrow$$

$$(z - z_2)(\overline{z} - \overline{z_3})[(z_1 - z_3)(\overline{z_1} - \overline{z_2})] = (z - z_3)(\overline{z} - \overline{z_2})[(z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_3})].$$

Тржену једначину можемо записати у облику:

$az\overline{z} + bz - \overline{b}\overline{z} + c = 0$, где је

$$a = (z_1 - z_3)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) - (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_3}),$$

$$b = -\overline{z_3}(z_1 - z_3)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) + \overline{z_2}(z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_3}),$$

$$c = z_1\overline{z_3}(z_1 - z_3)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) - z_3\overline{z_2}(z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_3}).$$

Закључујемо:

Теорема 20 Једначина сваког круга у комплексној равни се може записати у облику: $az\overline{z} + bz - \overline{b}\overline{z} + c = 0$, $a \neq 0$ и c су чисто имагинарни бројеви. Обротно, ГМТ за које важи једнакост овог облика је круг.

Примећујемо да за $a = 0$ добијамо једначину праве.

Круг k пречника r са центром у $S(s)$ је скуп свих тачака које су од центра удаљене r , тј. све тачке $Z(z)$ за које важи $|s - z| = r$.

$$|s - z| = r \Leftrightarrow (s - z)(\bar{s} - \bar{z}) = r^2 \Leftrightarrow z\bar{z} - \bar{s}z - s\bar{z} + |s|^2 - r^2 = 0$$

$$\text{Једначина круга } k, a \neq 0, \text{ гласи: } z\bar{z} + \frac{b}{a}z - \frac{\bar{b}}{a}\bar{z} + \frac{c}{a} = 0.$$

$$\text{Из ове две једначине следи: } \bar{s} = -\frac{b}{a} \text{ и } s = \frac{\bar{b}}{a}.$$

$$\text{Из } \frac{c}{a} = |s|^2 - r^2 \text{ добијамо } r^2 = s^2 - \frac{c}{a} = -\frac{b}{a} \frac{\bar{b}}{a} - \frac{c}{a} = -\frac{|b|^2 + ac}{a^2}.$$

Због чисте имагинарности броја a тј. $a^2 < 0$ закључујемо:

1. $ac + |b|^2 < 0$, круг не постоји,
2. $ac + |b|^2 = 0$, круг се своди на тачку $\frac{\bar{b}}{a}$,
3. $ac + |b|^2 > 0$, $z\bar{z} + \frac{b}{a}z - \frac{\bar{b}}{a}\bar{z} + \frac{c}{a}$, $a \neq 0$ и c су чисто имагинарни бројеви, је једначина круга са центром у $\frac{\bar{b}}{a}$ полупречника $r = -\frac{|b|^2 + ac}{a^2}$.

Пример 10 Одредити центар s и пречник r круга који пролази кроз тачке a, b , и c .

$$|z - s| = r \Leftrightarrow (z - s)(\bar{z} - \bar{s}) = r^2 \Leftrightarrow s\bar{z} + \bar{s}z + r^2 - |s|^2 = |z|^2.$$

У последњој једнакости ћемо z редом заменити са a, b, c , а затим ћемо решити формирану систем од три линеарне једначине по $s, \bar{s}$ и $r^2 - |s|^2$. Добије се:

$$s = -\frac{\Delta_1}{\Delta}, r^2 = |s|^2 - \frac{\Delta_2}{2} \text{ где је } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & \bar{a} \\ 1 & b & \bar{b} \\ 1 & c & \bar{c} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & |a|^2 \\ 1 & b & |b|^2 \\ 2 & c & |c|^2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \bar{a} & |a|^2 \\ 1 & \bar{b} & |b|^2 \\ 2 & \bar{c} & |c|^2 \end{vmatrix}.$$

Пример 11 (Клиффордова⁵теорема) Нека су S_1, S_2, S_3, S_4 четири круга у равни и нека су z_1 и ω_1 тачке у којима се секу S_1 и S_2 , z_2 и ω_2 тачке у којима се секу S_2 и S_3 , z_3 и ω_3 тачке у којима се секу S_3 и S_4 , z_4 и ω_4 тачке у којима се секу S_4 и S_1 . Тада тачке z_1, z_2, z_3, z_4 леже на неком кругу или некој правој σ ако и само ако тачке $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ леже на неком кругу или на некој правој σ' . Доказати. (Слика 17)

Услови имплицирају: тачке $z_1, z_2, \omega_1, \omega_2$ леже на кругу S_2 , тачке $z_2, z_3, \omega_2, \omega_3$ леже на кругу S_3 , тачке $z_3, z_4, \omega_3, \omega_4$ леже на кругу S_4 , тачке $z_4, z_1, \omega_4, \omega_1$ леже на кругу S_1 . Одатле следи да су четири двоструке пропорције:

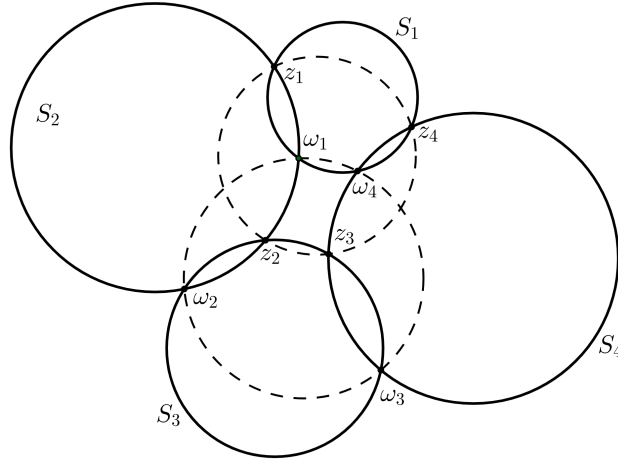
⁵William Kingdon Clifford (1845 - 1879) - британски математичар и филозоф

$$\begin{aligned}
W(z_1, \omega_2, z_2, \omega_1) &= \frac{z_1 - z_2}{\omega_2 - z_2} : \frac{z_1 - \omega_1}{\omega_2 - \omega_1}, \\
W(z_2, \omega_3, z_3, \omega_2) &= \frac{z_2 - z_3}{\omega_3 - z_3} : \frac{z_2 - \omega_2}{\omega_3 - \omega_2}, \\
W(z_3, \omega_4, z_4, \omega_3) &= \frac{z_3 - z_4}{\omega_4 - z_4} : \frac{z_3 - \omega_3}{\omega_4 - \omega_3}, \\
W(z_4, \omega_1, z_1, \omega_4) &= \frac{z_4 - z_1}{\omega_1 - z_1} : \frac{z_4 - \omega_4}{\omega_1 - \omega_4}
\end{aligned}$$

из скупа $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, те је

$$\begin{aligned}
\frac{W(z_1, \omega_2, z_2, \omega_1)W(z_3, \omega_4, z_4, \omega_3)}{W(z_2, \omega_3, z_3, \omega_2)W(z_4, \omega_1, z_1, \omega_4)} &= \left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \right) \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_3 - \omega_2} : \frac{\omega_1 - \omega_4}{\omega_3 - \omega_4} \right) = \\
&= W(z_1, z_3, z_2, z_4)W(\omega_1, \omega_3, \omega_2, \omega_4) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

Дакле, $W(z_1, z_3, z_2, z_4)$ је реалан број различит од нуле ако и само ако је $W(\omega_1, \omega_3, \omega_2, \omega_4)$ реалан број различит од нуле, чиме је тврђење доказано.



Слика 17

4 Птоломеј-Ојлерова теорема

Нека су $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ и $D(d)$ тачке у комплексној равни. Примећујемо да

$$(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) + (c-a)(b-d) = 0$$

важи за све комплексне бројеве. Применом неједнакости троугла се добија

$$|a-b||c-d| + |a-d||b-c| \geq |a-c||b-d|.$$

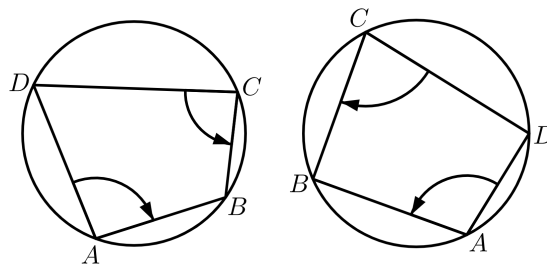
По доказу теореме 9, једнакост важи ако и само ако је

$$\arg((a-b)(c-d)) = \arg((a-d)(b-c)) \Leftrightarrow \frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(b-c)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$W(b, d, a, c) = \frac{b-a}{d-a} : \frac{b-c}{d-c} \leq 0 \Leftrightarrow \arg\left(\frac{b-a}{d-a} : \frac{b-c}{d-c}\right) = \pi \Leftrightarrow$$

$$\arg \frac{b-a}{d-a} - \arg \frac{b-c}{d-c} = -\pi \text{ или } \arg \frac{b-a}{d-a} - \arg \frac{b-c}{d-c} = \pi,$$

тј. тачке A , B , C и D граде оријентисан тетиван четвороугао $ABCD$.



Слика 18

Након спроведене анализе можемо формулисати тврђење:

Теорема 21 (Птоломеј⁶-Ојлерова теорема) *За све тачке A , B , C , D у комплексној равни важи $AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$. Једнакост важи ако и само ако је четвороугао $ABCD$ тетиван и тачке A и C се налазе са различитих страна праве BD .*

Теорема 22 (Питагорина теорема) *Троугао $\triangle ABC$ је правоугли, $\angle ACB = 90^\circ$, ако и само ако је $AC^2 + BC^2 = AB^2$.*

Доказ: Применом Птоломеј-Ојлорове теореме на правоугаоник $ADBC$ добијамо $AC \cdot DB + BC \cdot AD = AB \cdot CD \Leftrightarrow AC^2 + BC^2 = AB^2$.

⁶Клаудије Птоломеј из Александрије (2. век) - последњи од великих хеленских математичара, географа и астронома

5 Морлијева теорема

Лема 3 *Ако се тачке $T_1(t_1)$, $T_2(t_2)$, $T_3(t_3)$, $T_4(t_4)$ налазе на јединичном кругу, онда се праве T_1T_2 и T_3T_4 секу у тачки $z = \frac{\overline{t_1} + \overline{t_2} - \overline{t_3} - \overline{t_4}}{t_1t_2 - t_3t_4}$.*

Доказ: Једначина праве p која пролази кроз t_1 и t_2 је:

$$(\overline{t_1} - \overline{t_2})z - (t_1 - t_2)z + (t_1\overline{t_2} - \overline{t_1}t_2) = 0.$$

Да би образовале праву, тачке $T_1(t_1)$ и $T_2(t_2)$ морају бити различите, што значи $\overline{t_1} \neq \overline{t_2}$ те једначину можемо поделити са $\overline{t_1} - \overline{t_2}$:

$$z - \frac{t_1 - t_2}{\overline{t_1} - \overline{t_2}} + \frac{t_1\overline{t_2} - \overline{t_1}t_2}{\overline{t_1} - \overline{t_2}} = 0.$$

Како се тачке налазе на јединичном кругу важи $|t_1| = |t_2| = |t_3| = |t_4| = 1$, па одатле следи:

$$t_1 - t_2 = |t_2|^2 t_1 - |t_1|^2 t_2 = t_2 \overline{t_2} t_1 - t_1 \overline{t_1} t_2 = -t_1 t_2 (\overline{t_1} - \overline{t_2}) \Leftrightarrow -\frac{t_1 - t_2}{\overline{t_1} - \overline{t_2}} = t_1 t_2$$

и

$$t_1 \overline{t_2} - \overline{t_1} t_2 = -|t_1|^2 + t_1 \overline{t_2} - \overline{t_1} t_2 + |t_2|^2 = t_1 \overline{t_1} + t_1 \overline{t_2} - \overline{t_1} t_2 - t_1 \overline{t_1} = -(t_1 + t_2)(\overline{t_1} - \overline{t_2}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{t_1 \overline{t_2} - \overline{t_1} t_2}{\overline{t_1} - \overline{t_2}} = -(t_1 + t_2),$$

па се једначина праве p може записати у облику:

$$z + t_1 t_2 \overline{z} - t_1 - t_2 = 0.$$

Једначина праве q која пролази кроз t_3 и t_4 се може записати у истом облику :

$$z + t_3 t_4 \overline{z} - t_3 - t_4 = 0.$$

Решавањем система једначина по z добијамо тачку пресека правих p и q ,

$$z = \frac{\overline{t_1} + \overline{t_2} - \overline{t_3} - \overline{t_4}}{t_1 t_2 - t_3 t_4}.$$

Теорема 23 (Морлијева⁷ теорема) *Трисектрисе унутрасњих улова произвольної троугла секу се у тачкама једнакостраничног троугла (трисектрисе су две полуправе које садрже теме угла и иду доде на три једнака дела).*

Доказ: Без губљења општости, произвольни троугао $\triangle ABC$ ћемо сместити у јединични троугао са центром O , тако да је $a = 1$ координата тачке A . Нека је:

⁷Frank Morley (1860–1937) - британско-амерички математичар

$$\angle AOB = 3\gamma, \text{ где је } 0 < \gamma < \frac{2\pi}{3},$$

$$\angle AOC = 3\beta, \text{ где је } -\frac{2\pi}{3} < \gamma < 0,$$

$$\angle BOC = 3\alpha, \text{ где је } \alpha = \frac{2\pi - (3\gamma - 2\beta)}{3} = \frac{2\pi}{3} + \beta - \gamma. (\text{Слика 20})$$

Нека су c и b тачке на јединичној кружности такве да је $\arg c = \gamma$ и $\arg b = \beta$, и нека је $\omega = \frac{2\pi}{3}$. Тачкама B и C одговарају редом бројеви c^3 и b^3 . Аргументи тачака које деле кружни лук $\widehat{BC}$ на три једнака дела су (Слика 19):

$$\alpha + 3\gamma = (\frac{2\pi}{3} + \beta - \gamma) + 3\gamma = \frac{2\pi}{3} + \beta + 2\gamma \text{ и}$$

$$2\alpha + 3\gamma = 2(\frac{2\pi}{3} + \beta - \gamma) + 3\gamma = \frac{4\pi}{3} + 2\beta + \gamma,$$

те њима одговарају редом бројеви ωbc^2 и $\omega^2 b^2 c$.

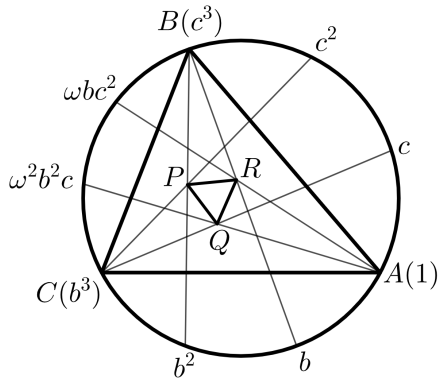
Тачкама које деле лук $\widehat{CA}$ на три једнака дела одговарају бројеви b и b^2 , а тачкама које деле $\widehat{AB}$ на три једнака дела одговарају c и c^2 .

Тачка $P(p)$ се добија у пресеку праве која садржи c^3 и b^2 и праве која садржи b^3 и c^2 , те је по леми 3:

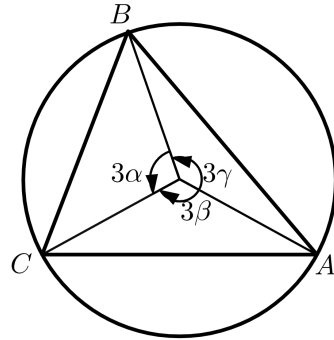
$$p = \frac{b^{-2} + c^{-3} - b^{-3} - c^{-2}}{b^{-2}c^{-3} - b^{-3}c^{-2}} = \frac{bc^3 + b^3 - c^3 - b^3c}{b - c} = b^2 + bc + c^2 - b^2c - bc^2.$$

Тачка $Q(q)$ се добија у пресеку праве која садржи A и $\omega^2 b^2 c$ и праве која садржи b^3 и c .

$$\begin{aligned} q &= \frac{1 + \omega^2 b^2 c - b^{-3} - c^{-1}}{\omega^{-2} b^{-2} c^{-1} - b^{-3} c^{-1}} = \frac{b^3 c + b\omega - c - b^3}{b\omega - 1} = \frac{c(b^3 - 1) - b(b^2 - \omega)}{\omega(b - \omega^2)} \frac{\omega^2}{\omega^2} = \\ &= \frac{\omega^2(c(b^3 - \omega^6) - b(b^2 - \omega^4))}{b - \omega^2} = \omega^2(c(b^2 + b\omega^2 + \omega) - b(b + \omega^2)). \end{aligned}$$



Слика 19



Слика 20

Тачка $R(r)$ се добија у пресеку праве која садржи A и ωbc^2 и праве која садржи b и c^3 .

$$\begin{aligned} r &= \frac{1 - \omega^{-1}b^{-1}c^{-2} - b^{-1} - c^{-3}}{\omega^{-1}b^{-1}c^{-2} - b^{-1}c^{-3}} = \frac{bc^3 + c\omega^2 - c^3 - b}{c\omega^2 - 1} = \frac{b(c^3 - 1) - c(c^2 - \omega^2)}{\omega^2(c - \omega)} \frac{\omega}{\omega} = \\ &= \frac{\omega(b(c^3 - \omega^3) - c(c^2 - \omega^2))}{c - \omega} = \omega(b(c^2 + c\omega + \omega^2) - c(c + \omega)). \end{aligned}$$

Уочавамо да је:

$$p + \omega q + \omega^2 r =$$

$$\begin{aligned} &b^2 + bc + c^2 - b^2c - bc^2 + cb^2 + cb\omega^2 + c\omega - b^2 - b\omega^2 + bc^2 + bc\omega + b\omega^2 - c^2 - c\omega \\ &= bc(1 + \omega + \omega^2) = 0 \end{aligned}$$

па је по теорему 18 троугао $\triangle PQR$ једнакостраничан, чиме је доказ завршен.

Ову теорему је поставио Френк Морли 1899. године, а данас се сматра можда и најлепшом теоремом у математици. Кроз овај, као и кроз претходне примере, приказали смо корисност комплексних бројева у геометрији и софистицираност рада са њима.

Литература

- [1] Зоран Каделбург, Срђан Огњановић, Владимир Мићић, Соња Чукић *Анализа са алгебром 3*, Круг, 2021.
- [2] Titu Andreescu, Dorin Andrica, *Complex Numbers from A to... Z*, Birkhäuser, 2nd Edition, 2014.
- [3] Isaak Moiseevich Yaglom *Complex Numbers in Geometry*, Academic Press, New York and London, 1968.
- [4] Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry*, The Mathematical Association of America, 1994.
- [5] Orlando Merino, *A Short History of Complex Numbers*, University of Rhode Island, 2006.