

Dodatna nastava iz matematike

Trigonometrija

Predavač: Aleksandar Pejčev

1. Neka je O centar opisanog kruga trougla ABC , $BO \cap AC = E$, $CO \cap AB = F$. Ako su uglovi CFE , AFE , BAC međusobno jednaki, odrediti njihovu veličinu.
2. Neka je dat krug k i tačka P van njega. Proizvoljna sečica iz P seče krug k u tačkama A i B . Dokazati da je $\frac{XA}{YA} = \frac{XB}{YB}$, gde su X i Y dodirne tačke tangenti iz P na dati krug.
3. Jednakokrako pravougli trouglovi ABC_1 , BCA_1 , CAB_1 su konstruisani u spoljašnosti trougla ABC nad stranicama AB , BC , CA kao hipotenzuzama. Dokazati da su prave AA_1 , BB_1 , CC_1 konkurentne.
4. Neka je l tangenta u tački M kruga k sa prečnikom MN . Na duži MN je data tačka A . Proizvoljni krug sa centrom na l seče l u tačkama C i D . Neka prave NC i ND seku krug k redom u tačkama P i Q . Dokazati da prava PQ prolazi kroz fiksnu tačku.
5. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao i X tačka preseka njegovih dijagonala. Ako je $XA \sin A + XC \sin C = XB \sin B + XD \sin D$, onda je $ABCD$ tetivan. Dokazati.
6. U trouglu ABC u kom su uglovi u temenima B i C redom 50 i 30 stepeni, data je tačka P takva da su uglovi MBC i MCB redom jednaki 20 i 10 stepeni. Dokazati da je AM normalno na BC .
7. Dokazati identitete
 - (a) $\tan 50^\circ + \tan 60^\circ + \tan 70^\circ = \tan 80^\circ$;
 - (b) $\tan^2 10^\circ + \tan^2 50^\circ + \tan^2 70^\circ = 9$.
8. Na kracima BC i BA jednakokrakog trougla ABC ($\angle B = 20^\circ$) date su redom tačke P i Q tako da je $\angle PAC = 50^\circ$ i $\angle QCA = 60^\circ$. Odrediti ugao PQC .
9. Dat je trougao ABC i $\angle BAC = 60^\circ$. Neka je $IF \parallel AC$, gde je I centar upisanog kruga trougla ABC i $F \in AB$. Neka je $P \in BC$, gde je $3BP = BC$. Dokazati da je $\angle BFP = \frac{\angle ABC}{2}$.
10. Na stranici BC trougla ABC date su tačke D i E tako da su uglovi BAD i CAE jednaki i važi $\mathcal{B}(B, D, E, C)$. Ako upisani krugovi trouglova ABD i ACE dodiruju BC u M i N redom, dokazati da je $\frac{1}{BM} + \frac{1}{MD} = \frac{1}{EN} + \frac{1}{NC}$.
11. Izračunati $\prod_{i=1}^n \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi \cdot 3^i}{3^n + 1} \right)$.
12. Neka je P unutrašnja tačka trougla ABC . Dokazati da je barem jedan od uglova PAB , PBC , PCA manji ili jednak $\frac{\pi}{6}$. Uopštiti.
13. Tangente iz tačaka A i B kruga opisanog oko trougla ABC seku tangentu iz C u tačkama U i T redom. Neka je $AT \cap BC = \{P\}$ i $BU \cap AC = \{R\}$. Ako su Q i S redom središta duži AP i BR . Dokazati da je $\angle ABQ = \angle BAS$.
14. Na stranici AB trougla ABC data je tačka X takva da je $\frac{AX}{XB} = \frac{4}{5}$, Y na CX tako da je $\frac{CY}{YX} = \frac{1}{2}$ i Z na polupravoj CA tako da je $\angle CXZ = \pi - \angle ABC$. Ako je $\angle XYZ = 45^\circ$, dokazati da je trougao ABC jednoznačno odredjen i odrediti mu najmanji ugao.